THEORIE
DER
BEWEGUNG UND DER KRÄFTE.

EIN LEHRBUCH
DER
THEORETISCHEN MECHANIK.

MIT BESONDERER RÜCKSICHT
AUF DAS
WISSENSCHAFTLICHE BEDÜRFNISS TECHNISCHER HOCHSCHULEN

BEARBEITET VON

DR. WILHELM SCHELL,
GROSSHERZOGL. BADISCHEM HOFRATHE UND PROFESSOR AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

„Geometrica geometrice“.

ZWEITE, UMGEARBEITETE AUFLAGE.

I. BAND.
1. GEOMETRIE DER STRECKENSYSTEME UND GEOMETRIE DER MASSEN.
2. GEOMETRIE DER BEWEGUNG UND THEORIE DER BEWEGUNGSZUSTÄNDE (KINEMATIK).

MIT VIELEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1879.

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Elementarbuch der Mechanik schliesst sich hinsichtlich des Lehrganges den besseren vorhandenen Werken im Allgemeinen an, geht aber im Einzelnen einen beträchtlichen Schritt weiter. Voran steht die Geometrie der Bewegung, eine Lehre, welche darauf abzielt, dass die reine Bewegungstheorie, insofern sie von den Begriffen, welche die Energie der Bewegung ausdrücken, mit der Theorie der geometrischen Verwandtschaften im Grunde identisch ist. Durch das Voranstellen dieser Lehre tritt der geometrische Charakter der Mechanik mit der wünschenswerthen Deutlichkeit hervor. Der folgende Theil entwickelt den Begriff der Geschwindigkeit, der dritte den der Beschleunigung der ersten und zweiten Ordnung und gibt die nöthigen Andeutungen bezüglich der Beschleunigung höherer Ordnungen. Endlich der letzte Theil behandelt den aus der Uebereinanderlagerung der Systeme entspringenden Begriff der Masse, der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen in derartigen zusammengesetzten Systemen. Er führt den herkömmlichen Namen der Theorie der Kräfte, wenn auch von den „unbekannten Ursachen der Bewegung“ darin ebensowenig etwas gelehrt wird, als in anderen Lehrbüchern, sondern nur von Grössen mv, $m\varphi$, u. s. w., welche im Grunde nichts weiter als Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zusammengesetzter Punkte sind. Von Kräften, als solchen, lehrt keine Mechanik etwas, ebensowenig als von der Ruhe.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass der hier adoptirte Lehrgang dem heutigen Entwickelungsgange der Wissenschaft besser entspricht, als viele andere. Auch hat er die gewaltige Autorität Jacobi's für sich, der bereits bei seiner Doctorpromotion am 13. August 1825 als fünfte These den Satz vertheidigte:

"Theoria mechanices analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur; de quibus theoremata proponi possint prorsus analoga iis, quae de vi et de velocitate circumferuntur."

Die wissenschaftlichen Vortheile dieses Lehrganges bestehen hauptsächlich 1. in dem scharf ausgeprägten synthetischen Aufbau der Wissenschaft überhaupt, 2. in dem engeren Anschlusse an die analoge Aufstufung der Differentialrechnung und wenn man will, an die Lehre von der geometrischen Differentiation, Hamilton's Quaternions u. s. w., 3. in der breiteren Anlage des Grundplanes der Wissenschaft, in welchen sich sehr ungezwungen weitere Lehren einfügen lassen, 4. in der klaren Stellung, welche die sogenannten Principe der Mechanik für die verschiedenen Ordnungen erlangen, 5. in dem Wegfallen verschiedener Axiome und Principien rein physicalischen Inhaltes, endlich 6. in der Vermeidung der unlogischen Spaltung der mechanischen Wissenschaft in die Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung (gibt es doch auch ein Gleichgewicht der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen aller Ordnungen). Hiezu kommen aber noch einige nicht unwesentliche pädagogische Vortheile, welche bestehen: 1. in der grösseren Durchsichtigkeit des Studienplanes, 2. in der nützlichen Wiederholung gewisser Algorithmen auf den verschiedenen Stufen des Lehrganges, 3. in der Anregung zur Aufsuchung von Analogien zwischen den einzelnen Zweigen der Mechanik und 4. in der Vermeidung gewisser misslicher Verwechslungen bei dem Studirenden, wie zwischen Gleichgewicht und Ruhe, zwischen den mechanischen Begriffen und den Voraussetzungen der physicalischen Wissenschaften, zwischen den Gedanken des Mathematikers und ihrer Projection auf die Aussenwelt.

Das Buch ist geschrieben für solche Studirende, welche eine gute Grundlage für künftige technische Studien suchen, welche aber bereits irgend einen einleitenden Cursus der Mechanik und einen ersten Cursus der Differential- und Integralrechnung absolvirt haben und die nothwendigsten geometrischen Kenntnisse besitzen. Es soll ihnen die mechanische Wissenschaft in einer consequenten, systematisch geordneten Darstellung vorführen; es soll sie in den Stand setzen, die neueren Erscheinungen der Literatur mit Nutzen zu studiren, ihnen einige Uebung verschaffen, ein mechanisches Problem einzukleiden und zu lösen, sowie endlich sie zu dem Studium der Quellen, der Literaturkenntniss und der Geschichte der Wissenschaft anleiten.

Mit Rücksicht auf den geringen Grad von Vorkenntnissen, welche das Buch voraussetzt, müssen verschiedene Theorien, die ein Handbuch zu geben verpflichtet ist, hier beiseite gelassen werden. Dahin gehört die vollständige Reduction von Problemen, welche von elliptischen Functionen abhängen, die feineren Untersuchungen der Potentialtheorie, eine ausgeführte Theorie der elastischen Systeme, die Bewegung von Systemen in flüssigen Medien, eine allgemeine Theorie der relativen Bewegung, Störungstheorie, die ausführliche Theorie des Jacobi'schen letzten Multiplicators, der Hamilton'schen Quaternions in ihrer Anwendung auf Mechanik, der Plücker'schen neuen Methoden u. s. w. Dagegen wurde vieles andere im Einzelnen sorgfältiger ausgearbeitet, als wohl sonst zu geschehen pflegt. Dahin gehört der ganze erste Theil, die Geometrie der Bewegung, insbesondere die geometrische Theorie der relativen Bewegung, die Reduction von Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräften für ihre Centralaxen, die Beschleunigung zweiter und höherer Ordnung, die Theorie der Krümmung der Bahnen der Punkte des unveränderlichen Systems, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, die Theorie des Trägheitsmomentes, die Theorie der Momentankräfte u. s. w.

Die Darstellungsweise wird man, wie ich hoffe, klar finden. Es ist natürlich, dass sie zu Anfang des Buches ausführlicher und breiter sein muss, als in späteren Parthien, denn der Studirende wird durch das Buch selbst allmählig auf eine höhere Stufe mathematischer Bildung gehoben. Von Ueberschwänglichkeiten beim Begriff der lebendigen Kraft wird man nichts finden; der theoretischen Mechanik ziemt eine Nüchternheit, die in der Physik bei weitem noch nicht allgemein ist. Dass von einem Principe der Trägheit im Buche nicht die Rede sein konnte und dasselbe nicht vermisst wird, wird man begreiflich finden.

Der kundige Leser wird die Eigenthümlichkeit des Buches weniger im Grossen und Ganzen, als in einer Menge kleiner Züge bemerken, welche darauf abzielen, den Studirenden die ersten Schritte geschickt machen zu lehren, ihn allmählich auf ein gewisses wissenschaftliches Niveau zu erheben, ihm von da den gesicherten Besitz der Wissenschaft zu zeigen, ihn zur eigenen Thätigkeit anzuspornen und ihm das Gefühl hoher Achtung vor den Werken der grossen Meister mit in seinen technischen Beruf zu geben, in welchem die erhebende Idealität des mathematischen Gedankens für unsere Zeit immer mehr Bedürfniss wird.

Carlsruhe, den 21. October 1870.

Schell.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage meiner theoretischen Mechanik hat, in so weit es den Inhalt des vorliegenden ersten Bandes betrifft, einige Aenderungen erlitten, welche bei der wachsenden Fülle des Stoffes grösserer Präcision und Uebersichtlichkeit wegen nothwendig waren. Zunächst sind gewisse geometrische Theorien, welche die gemeinsame Grundlage für verschiedene Parthien der Mechanik bilden, nämlich die Geometrie der Strecken- und

Werthpunktsysteme, zu einem Ganzen vereinigt, als erster Theil vorangestellt worden. Bei diesem Ausscheidungsprocess durfte ich jedoch über eine gewisse Grenze nicht hinausgehen. Denn so viele Vortheile derselbe auch für die Abkürzung des Vortrags und das leichtere Verständniss späterer Lehren bieten mag, so schien es mir doch nicht unzweckmässig, manche Untersuchungen, welche man nur bei Kräften durchzuführen pflegt, obgleich sie auch in der Kinematik ihre Analoga finden, vorläufig auch in der Theorie der Kräfte zu entwickeln. Ferner habe ich die in der ersten Auflage ohne Rücksicht auf die Zeit behandelte Geometrie der Bewegung mit der Theorie der Bewegungszustände zu einem Haupttheile als Kinematik vereinigt. Ich habe dadurch Raum gewonnen für die Mittheilung mancher wichtigen Lehre, die in der älteren Auflage fehlt. Ohnehin ist die Wahl der Variabelen, welche man in der Mechanik die Zeit nennt, willkürlicher, als es zu sein scheint. Die Lehre von der Beschleunigung im unveränderlichen System hat eine wesentliche Umgestaltung und Erweiterung erlitten, wenigstens nach der Seite synthetischer Betrachtungen hin. Auch ist ein kurzer Abschnitt über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand gewisser veränderlicher Systeme hinzugekommen, in welchem wenigstens einige der Resultate neuerer Forschungen mitgetheilt sind. Durchweg habe ich ferner der Literaturangabe für die einzelnen Capitel der Mechanik eine grössere Sorgfalt gewidmet. Manche Lehren habe ich aus dem Inhalte des jetzigen ersten Bandes ausgeschieden, um sie an geeigneteren Stellen des zweiten zu verwenden, so z. B. die Anwendung des Imaginären auf die Bewegungstheorie, das Princip der kleinsten Wirkung, das Princip des letzten Multiplicators, die relative Bewegung des Pendels an der Oberfläche der Erde etc.

Von dem Ziele des Werkes, das Studium der theoretischen Mechanik durch ausgedehnteren Gebrauch synthetisch-geometrischer Methoden zu beleben, bin ich nicht abgewichen, vielmehr hoffe ich demselben etwas näher gekommen zu sein. Auch dem weiteren Ziele, die Mechanik möglichst unabhängig von physikalischen Voraussetzungen darzustellen, glaube ich mich genähert zu haben.

Für die vielen Beweise wohlwollender Aufnahme meines Buches und freundlicher Berichtigungen mancher Mängel desselben spreche ich meinen aufrichtigsten Dank aus. Ebenso dankbar muss ich die Bereitwilligkeit der hochgeschätzten Verlagshandlung anerkennen, mit welcher sie allen meinen Wünschen in Bezug auf das Buch auf das freundlichste entgegengekommen ist.

Carlsruhe, den 26. December 1878.

Schell.

Inhalt des ersten Bandes.

Erster Theil.

Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen. (S. 11—143.)

I. Capitel. Geometrische Summe und Differenz von Strecken. Aequivalenz von Streckensystemen im Stralenbüschel und Stralenbündel. (S. 11—20.)

II. Capitel. Streckenpaare und deren Aequivalenz. (S. 20—29.)

Zweiter Theil.

Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik). (S. 144—580.)

I. Capitel. Uebergang des Systems uus einer Lage in eine andere. Rotation, Translation und Schraubenbewegung des unveränderlichen Systems. (S. 144—162.)

II. Capitel. Aequivalenz der Bewegungen des unveränderlichen Systems. (S. 163—187.)

III. Capitel. Geschwindigkeit eines Punktes. Projectionen und Componenten derselben auf Axen und Ebenen. Roberval's Methode der Tangenten. Aequivalenz der Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten. (S. 187—218.)

VIII. Capitel. Beschleunigung der Bewegung eines Punktes; Projectionen und Componenten derselben. Arbeit der Beschleunigung. Sectorenbeschleunigung. (S. 312—332.)

IX. Capitel. Problem der geradlinigen Bewegung eines Punktes. (S. 332—348.)

X. Capitel. Probleme der krummlinigen Bewegung eines Punktes. (S. 348—387.)

XI. Capitel. Die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn. (S. 187—413.)

XV. Capitel. Beschleunigung der Windungsbewegung des unveränderlichen Systems. (S. 500—517.)

XVI. Capitel. Die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Punktes im unveränderlichen System. (S. 517—544.)

XVII. Capitel. Beschleunigung zweiter und höherer Ordnung. (S. 544—571.)

XVIII. Capitel. Einiges über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand projectivisch-veränderlicher Systeme.

(S. 571—580.)

Einleitung.

§. 1. Mechanik ist die Wissenschaft der Bewegung. Ihre Untersuchungen haben zum Gegenstande 1. das Bewegliche, 2. die verschiedenen Bewegungszustände und die Bedingungen, welche sie definiren (directes Problem der Bewegung) und 3. die Bestimmung einer Bewegung mit Hülfe gegebener Bedingungen, denen sie genügen soll (umgekehrtes Problem der Bewegung).

§. 2. Das Bewegliche ist ein Raumgebilde, ein Punkt oder ein System von Punkten, Flächen oder Körpern. Das einfachste Gebilde ist der Punkt. Aus Punkten besteht das Punktsystem; dasselbe ist entweder ein Aggregat von Punkten, welche durch Zwischenräume getrennt, nach bestimmten Gesetzen im Raume geordnet sind, oder eine continuirliche Folge von Punkten, oder eine Verbindung von Punktaggregaten mit continuirlichen Punktfolgen. Zu den Punktaggregaten gehören: 1. die Punktreihe, eine Reihe gesonderter Punkte, längs einer Linie vertheilt, 2. das Netz, eine Folge gesonderter Punktreihen, 3. das körperliche Punktsystem, eine Reihe getrennt auf einander folgender Netze. Punktreihe, Netz und körperliches Punktsystem sind Mannigfaltigkeiten von Punkten erster, zweiter, dritter Ordnung (einer, zweier, dreier Dimensionen). Die einfachste continuirliche Punktfolge ist die Linie oder Faser; sie ist das Element 1. der Faserreihe, einer geordneten Folge gesonderter Linien, 2. des Fasersystems, einer Folge von Faserreihen durch Zwischenräume getrennt, 3. des einfachen Gewebes, einer Verbindung zweier Faserreihen der Art, dass jede Faser der einen Reihe alle Fasern der andern Reihe schneidet, 4. des zusammengesetzten Gewebes, einer Verbindung zweier oder mehrerer einfacher Gewebe, welche, getrennt von einander, durch ein oder mehrere Systeme von Faserreihen durchsetzt werden. Ein weiteres continuirliches Punktgebilde ist die Fläche oder Schale, eine continuirliche Folge von Fasern; sie ist das Element 1. der Schalenreihe, eines Aggregats geordnet auf einander folgender, getrennter Flächen, 2. des Fach- oder Zellensystems, gebildet aus zwei, drei oder mehreren Schalenreihen, welche sich wechselseitig (bienenzellenartig) durchschneiden. Das dritte continuirliche Punktgebilde ist das continuirliche körperliche System (der Körper), gebildet von einer continuirlichen Folge von Flächen. Dasselbe kann selbst wieder als Element einer Reihe von Gebilden auftreten. So liefert der Stab, ein Körper mit vorherrschender Längenausdehnung: 1. die einfache Stabreihe, 2. das Stabsystem, 3. das einfache Stabgitter und 4. das Stabgittersystem, welche Gebilde der Faserreihe, dem Fasersystem, dem einfachen und dem zusammengesetzten Gewebe analog gebildet sind. Ebenso kann die Kugel, oder jede andere geschlossene Fläche das Element einer ähnlichen Reihe von Gebilden werden. So bildet z. B. der Ring die Kette, panzerartige Gelenksysteme etc.

Die hier erwähnten continuirlichen Gebilde können aus den ihnen entsprechenden, aus discreten Elementen gebildeten durch einen Grenzenübergang abgeleitet werden; so die Linie oder Faser aus der Punktreihe durch eine ohne Ende fortzusetzende Einschaltung von Punkten zwischen die bereits vorhandenen, die Fläche aus dem Netze durch Einschaltung von Punktreihen, welche selbst in dem Processe des Ueberganges in Linien begriffen sind, das continuirliche körperliche System aus dem körperlichen Punktsystem durch Einschaltung von Netzen, welche in Flächen als Grenzgebilde übergehen.

Die Gebilde, welche Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung sind, können auf verschiedene Arten in Gebilde niederer Ordnung zerlegt und aus ihnen zusammengesetzt werden. So enthält ein Netz vielerlei Punktreihen, aus denen es gebildet werden kann, ebenso eine Fläche mannigfache Curvensysteme; so kann ein Körper auf viele Arten in Elemente zerlegt werden, wie dies z. B. durch die Flächensysteme geschieht, welche den üblichen Coordinatensystemen zu Grunde liegen. Die Gebilde erlangen durch die verschiedenen Arten ihrer Zerlegung eine gewisse Schichtung, Faserung und überhaupt ein gewisses Gefüge, welches mechanisch vielfach von besonderer Bedeutung werden kann.

§. 3. Die Punkte eines Systems können sämmtlich gleichwerthig oder von verschiedenem Werthe sein, so dass der eine mechanisch die doppelte, dreifache, vierfache Bedeutung eines andern erlangt. Diese Verschiedenheit des Werthes wird durch Coefficienten in die Untersuchung eingeführt, die man den einzelnen Punkten beilegt. In den Anwendungen der Mechanik drückt ein solcher Werthcoefficient die materielle Beschaffenheit (Masse), den elektrischen oder magnetischen Zustand etc. des Punktes aus, dem er angehört. Im Allgemeinen ist dieser Coefficient aller reellen constanten oder variabelen Zahlenwerthe fähig, kann aber nach Umständen auf das positive oder negative Zahlengebiet beschränkt werden. Für die Untersuchung der Bewegung eines einzelnen Punktes fällt der Werthcoefficient als bedeutungslos aus der Betrachtung heraus, erst bei dem Zusammentreten von Punkten ungleicher Art zum System tritt er in dieselbe ein. Ein Punkt, dessen Coefficient Null ist, verschwindet aus dem System; es dient daher der

Werthcoefficient überhaupt auch dazu, das System zu begrenzen und in gewissen Fällen seine Ausdehnung auf einen bestimmten Raum zu beschränken.

Continuirliche Systeme, deren Punkte gleichwerthig sind, heissen homogen; ist dies nicht der Fall, heterogen.

§. 4. Die Verbindung, in welche die Elemente (Punkte, Ebenen etc.) eines Systems zusammentreten, um dieses zu bilden, ist entweder fortwährend dieselbe oder sie kann wechseln. Im ersteren Falle heisst das System unveränderlich, im zweiten veränderlich; in diesem behalten die Elemente ihre Dimensionen und ihre gegenseitige Lage bei, in jenem findet dies nicht statt. Die Veränderlichkeit eines Systems kann sehr mannigfach sein; gewisse Arten derselben werden geometrisch definirt, bei anderen ist dies heutzutage noch nicht möglich. Zu der ersteren Art gehören die Systeme, welche während der Bewegung sich ähnlich bleiben oder überhaupt sich nach den Gesetzen irgend einer der bekannteren geometrischen Verwandtschaften verändern, zu den übrigen gehören die allgemein biegsamen, elastischen, flüssigen Systeme u. a. m. Der Begriff des unveränderlichen Systems ist nicht identisch mit dem des starren Systems; letzterer ist vielmehr im ersteren als specieller Fall enthalten; denn ein System kann biegsam sein und dennoch während der Bewegung den Charakter eines unveränderlichen Systems bewahren.

§. 5. Die theoretische Mechanik, deren Grundsätze in diesem Buche entwickelt werden, hat alle Verschiedenheiten, welche die Natur des beweglichen Systems betreffen, möglichst abstract zu fassen. Die Gebilde, von denen sie handelt, sind gedachte Dinge, wie die geometrischen, denen sie nur noch gewisse Eigenschaften hinsichtlich des Werthes ihrer Elemente, der Biegsamkeit, Dehnung, des flüssigen Zustandes u. s. w. beilegt. In den Anwendungen der Mechanik auf die Erklärung der Vorgänge der physischen Welt ist in jedem einzelnen Falle sorgfältig zu prüfen, mit welcher Berechtigung und mit welchem Grade der Annäherung man einen physischen Körper als ein System von der Art ansehen darf, wie es die theoretische Mechanik voraussetzt.

§. 6. Das directe Problem der Bewegung fordert die Untersuchung der Bewegungszustände und der Bedingungen, welche dieselben definiren. Dieselbe betrifft 1. den geometrischen Vorgang der Bewegung und 2. die Intensität, mit welcher die Bewegung erfolgt.

Bewegung eines Raumgebildes überhaupt ist die Veränderung seiner Lage, seiner Gestalt oder beider zugleich. Man kann zwei Arten der Bewegung unterscheiden, welche sich in gewissem Sinne dual gegenüberstehen.

Es sei in einem Raume eine continuirliche Folge von Gebilden derselben Art, d. h. derselben Ordnung der Mannigfaltigkeit, gegeben. Ein weiteres Gebilde dieser Art falle nach und nach mit den Gebilden dieser Folge zusammen. Sein Durchgang durch diese Folge von Gebilden ist seine Bewegung in dem Raume, welchem die Folge angehört. Sind die Gebilde der Folge unter sich und dem beweglichen Gebilde congruent, so bleibt letzteres während der Bewegung unveränderlich und ändert blos seine Lage im Raume; sind sie es nicht, so ist es veränderlich und wird seine Veränderung durch die Verwandtschaft bestimmt, in welcher die Gebilde der Folge zu einander stehen. So können dieselben z. B. unter einander ähnlich oder projectivisch sein; dann bleibt das bewegliche Gebilde sich während der Bewegung ähnlich oder projectivisch.

Es sei andererseits in einem Raume ein einzelnes Gebilde gegeben; ein anderer Raum enthalte eine continuirliche Folge von Gebilden derselben Art, wie jenes einzelne und mögen die Gebilde dieser Folge der Reihe nach mit jenem einzelnen Gebilde zusammenfallen. Der Durchgang der Folge durch das einzelne Gebilde ist die Bewegung des Gebildes, welchem die Folge angehört, in dem Einzelgebilde.

Den Unterschied bei den Bewegungen kann man sich an der Bewegung eines flüssigen Systems sehr gut verdeutlichen. Die Untersuchung der ersten Art der Bewegung beantwortet die Frage, welche Lage die flüssige Masse im Raume durchläuft, welche Bahnen ihre Punkte und welche Flächen bestimmte Flüssigkeitsfäden beschreiben; für die Untersuchung der zweiten Art der Bewegung sind diese Bahnen und Flächen, so wie überhaupt der Fortschritt der flüssigen Masse im Raume ohne Interesse, dagegen wünscht man durch sie zu erfahren, welche Punkte und wie dieselben nach einander an einem bestimmt angenommenen Punkte des Raumes vorüberziehen, welche Flüssigkeitsmasse durch eine bestimmte Fläche, z. B. durch einen bestimmten Querschnitt, hindurchströmt u. s. w. Auch der Mechanismus der Drehbank kann zur Erläuterung des fraglichen Unterschiedes dienen. Befestigt man das Werkzeug an der Axe und hält das zu bearbeitende Material fest, so durchläuft die Schärfe des ersteren als bewegliches System im Raume des Materials eine continuirliche Folge congruenter Gebilde, befestigt man aber das Material an der Axe und hält das Werkzeug fest, so durchläuft eine Folge der Schärfe congruenter Gebilde diese Schärfe.

Das dauernde Zusammenfallen eines Gebildes mit ein und demselben andern Gebilde und seiner Elemente mit bestimmten Elementen jenes heisst die Ruhe desselben in jenem. Das dauernde Zusammenfallen beider Gebilde im Allgemeinen genügt nicht zur Ruhe. So kann eine Kugel, eine Cylinderfläche, eine Gerade, eine Schraubenfläche mit einem ihr congruenten Gebilde fortwährend zusammenfallen und sich dennoch in diesem bewegen.

§. 7. Aus dem Ebenerwähnten geht zur Genüge hervor, dass Bewegung

ein relativer Begriff ist. Von der Bewegung eines Punktes oder allgemein eines Systems an sich kann man nicht reden, vielmehr nur von der Bewegung desselben in einem Raume oder deutlicher gesagt, in einem andern System. Die Bewegung eines Systems in einem andern ist nichts weiter, als das successive Zusammenfallen seiner Punkte mit Punkten jenes. Es findet daher ebensogut eine Bewegung des zweiten Systems im ersten, wie eine Bewegung dieses in jenem statt. Man nennt daher die Bewegung jedes der beiden Systeme im andern seine relative Bewegung in diesem. So sind die oben unterschiedenen Bewegungen relative Bewegungen zweier Systeme in Bezug auf einander. Werden beide Systeme in einem dritten Systeme gedacht, so hat jedes der drei in jedem der beiden andern eine relative Bewegung (die relative Ruhe als speciellen Fall mit eingeschlossen). Dabei kann man die relative Bewegung des ersten im dritten z. B. entweder unmittelbar untersuchen oder auch dadurch gewinnen, dass man die relative Bewegung des ersten im zweiten mit der relativen Bewegung des zweiten im dritten in Verbindung bringt. Mit der Zahl der Systeme wächst die Mannigfaltigkeit der relativen Bewegungen beträchtlich, von einer absoluten Bewegung kann dabei ebensowenig als von einer absoluten Ruhe die Rede sein, wenn das Wechselseitige, welches im Begriffe der Bewegung liegt, deutlich erfasst wird. Nichtsdestoweniger erlaubt man sich oft, bei drei Systemen von der absoluten Bewegung zweier in Bezug auf das dritte und ihrer relativen Bewegung unter sich zu reden. Es ist dies nicht correct und nur zulässig, wenn die relative Bewegung des dritten Systems in den beiden andern für die Untersuchung keinen Werth hat. Die Vorstellung der absoluten Ruhe des dritten Systems ist für das Verständniss der Mechanik weder nothwendig noch förderlich, jedenfalls also entbehrlich. Auch kommt in den Anwendungen der Mechanik kein Fall vor, welcher diese Vorstellung unabweisbar verlangte.

§. 8. Zur Bewegung eines Systems in einem andern ist nicht durchaus erforderlich, dass alle seine Punkte zugleich in Bewegung sind, vielmehr kann der Fall eintreten, dass ein Punkt, oder eine Punktreihe oder überhaupt eine Partie des Systems ruht, während die übrigen sich bewegen. Bei der Rotation eines unveränderlichen Systems um eine Axe z. B. ruhen alle Punkte desselben, welche auf dieser Axe liegen, bei der Bewegung eines flüssigen Systems können die tiefer im Innern gelegenen Theile desselben ruhen, während die Punkte der Oberfläche eine vielleicht sehr heftige Wellenbewegung erleiden. Wenn nicht sämmtliche Punkte eines Systems zugleich in Bewegung sind, sondern nach Beschaffenheit des Systems einzeln oder partienweise nach und nach von der Bewegung ergriffen werden, so betrachtet man die Fortpflanzung des Bewegungsphänomens selbst, wenn auch uneigentlich, als eine Bewegung, indem man den Inbegriff aller zugleich in Bewegung begriffener Punkte (den Erschütterungsraum) als ein ideales, im System bewegliches Specialsystem ansieht. In ähnlicher Weise betrachtet man den Wechsel einer ruhenden Linie bei der Rotation oder der Schraubenbewegung als ideelle Bewegung einer fingirten, im Raume fortschreitenden Axe. Während aber die oben bezeichneten Bewegungen nothwendig als continuirlich gedacht werden müssen und ein Uebergang in eine folgende Lage ohne Durchlaufen von Zwischenlagen ausgeschlossen ist, kann in den vorliegenden Fällen ideeller Bewegung sehr wohl eine Discontinuität stattfinden. Die ideelle Bewegung kann mit einer Lage des Erschütterungsraumes, einer Lage der Rotationsaxe etc. an einer Stelle des Systems plötzlich aufhören uud an einer anderen Stelle auftreten, ohne dass der Erschütterungsraum oder die Axe continuirlich durch Zwischenlagen hindurch an jene Stelle gelangt ist.

§. 9. Um die innere Natur einer Bewegung, oder die Intensität, mit welcher sie erfolgt, zu beurtheilen, vergleicht man sie mit einer andern, ihrer inneren Natur nach bereits vollkommen erkannten Bewegung. Am geeignetsten hierzu ist die einfachste aller Bewegungen, die unterschiedslos immer in derselben Weise erfolgende gleichförmige Bewegung. Sieht man bei der gleichförmigen Bewegung von allem ab, was das Bewegliche und die geometrische Beschaffenheit der Bewegung betrifft, so bleibt blos die Vorstellung der continuirlichen, stets in derselben Weise erfolgenden Ortsveränderung, d. h. die Vorstellung der Dauer übrig; sieht man aber auch noch von dem Begrenztsein der Dauer ab, so erlangt man die Vorstellung der unbegrenzten Dauer ohne Anfang und Ende, die Vorstellung der Zeit. Es ist nicht unrichtig, die Zeit als die allgemeinste, aller speciellen Merkmale entkleidete Vorstellung der Bewegung zu bezeichnen; insofern können alle andern Bewegungen mit ihr verglichen, auf sie bezogen und durch sie gemessen werden. In ähnlicher Weise, wie man von einem speciellen Raum durch Tilgung seiner speciellen Eigenschaften der Gestalt und Grösse zu der Darstellung des unendlichen Raumes gelangt, in welchem alle besonderen räumlichen Dinge enthalten sind, gelangt man auch von der speciellern begrenzten Dauer zur Vorstellung der unendlichen Zeit, in welcher alle besonderen Bewegungen erfolgen; indess muss betont werden dass die von der Bewegung im Raume herübergenommene „Bewegung in der Zeit" eine an sich unklare Vorstellung oder besser gesagt, eine unklare Redensart ist. Wie man den Raum durch einen bestimmten, übrigens beliebigen Raum misst, so misst man die Zeit durch eine bestimmte, im Uebrigen ebenfalls beliebig wählbare Dauer einer gleichförmigen Bewegung. Man wählt hierzu die Dauer der gleichförmig erfolgenden Rotation der Erde, nennt den vollen Umlauf derselben einen Tag und theilt ihn in der üblichen Weise in Stunden, Minuten und Secunden ein. Die

Wahl einer gleichförmig fliessenden Zeit als Grundlage für die Beurtheilung der Bewegungen ist übrigens nur eine Sache der Convention, kein absolutes Bedürfniss der Mechanik, ebensowenig wie ein gleichförmiges Wachsthum der unabhängigen Variabeln in der Analysis.

Vergleichung einer gegebenen Bewegung mit der zur Basis gewählten gleichförmigen Bewegung, die wir als Zeit bezeichnen, führt zu dem Begriffe der Geschwindigkeit jener Bewegung, welcher den nächsten Aufschluss über die Intensität gibt, mit welcher sie erfolgt. Ist die Geschwindigkeit nicht constant, so muss das Gesetz ihrer Veränderung ermittelt werden. Indem man in dieser Hinsicht die Geschwindigkeit der gegebenen Bewegung mit der Geschwindigkeit einer Bewegung vergleicht, bei welcher sich diese in allen Beziehungen gleichförmig ändert, gelangt man zu dem Begriffe der Beschleunigung. Ebenso kann man weiter aufsteigen zur Beschleunigung der Beschleunigung oder der Beschleunigung zweiter Ordnung, zur Beschleunigung dritter und höherer Ordnung, von denen jede folgende zu der vorhergehenden in derselben Beziehung steht, wie diese zu der ihr zunächst vorhergehenden und welche alle zusammen schliesslich die Gesetze liefern, welchen die Intensität der Bewegung unterworfen ist. Die einzelnen Punkte eines Systems besitzen im Allgemeinen verschiedene Geschwindigkeit und Beschleunigungen, doch sind dieselben nicht von einander unabhängig, vielmehr vermöge des Zusammenhanges der Systempunkte unter einander durch gewisse unter ihnen bestimmt. Der Gesammtgeschwindigkeits- und Beschleunigungszustand eines Systems wird daher durch gewisse Geschwindigkeitselemente und Beschleunigungselemente in jedem Momente der Bewegung repräsentirt, so dass aus ihnen die Geschwindigkeit und Beschleunigung aller Systempunkte für jedes Stadium der Bewegung gefolgert werden kann.

Die Intensität der Bewegung eines Systems pflegt man oft in noch anderer Weise darzustellen, indem man Ursachen einführt, welche den Punkten desselben ihre Geschwindigkeit und ihre Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen zu ertheilen vermögen. Diese Ursachen heissen Kräfte und zwar wird die Ursache der Geschwindigkeit eines Punktes eine Momentankraft, die Ursache der Beschleunigung erster Ordnung eine continuirliche Kraft oder kurzweg eine Kraft genannt und in ähnlicher Weise können Kräfte zweiter, dritter und höherer Ordnung als die Ursachen der Beschleunigungen der gleichnamigen Ordnungen bezeichnet werden. Ein System von Momentankräften würde hiernach den Geschwindigkeitszustand, ein System von continuirlichen Kräften den Beschleunigungszustand, ein weiteres System von Kräften zweiter Ordnung den Beschleunigungszustand zweiter Ordnung hervorrufen u. s. w. Die Momentankräfte werden als fähig gedacht, den Geschwindigkeitszustand plötzlich (momentan) hervorzurufen, die continuirlichen Kräfte erster Ordnung verändern diesen Geschwindigkeitszustand in jedem Augenblicke unendlich wenig, indem sie zu den vorhandenen Geschwindigkeiten unendlich kleine Geschwindigkeiten, sogenannte Elementarbeschleunigungen hinzufügen, welche in Verbindung mit jenen die Geschwindigkeiten für den folgenden Moment bilden. Aehnliches gilt für die Wirkung der Kräfte höherer Ordnungen. Alle diese Kräfte sind gedachte Dinge. In den Anwendungen der Mechanik auf die Bewegungen der materiellen Welt treten sie als Hypothesen auf, deren Zulässigkeit nur durch die grössere oder geringere Uebereinstimmung der aus ihnen folgenden Bewegungszustände mit der Beobachtung allein gestützt wird. Die physische Existenz von Kräften kann nicht behauptet werden.

§. 10. Das umgekehrte Problem der Bewegung verlangt die Bestimmung einer unbekannten Bewegung mit Hülfe gegebener Bedingungen. Diese Bedingungen sind entweder rein-geometrischer Natur, oder sie betreffen den Geschwindigkeitszustand, oder den Beschleunigungszustand irgend einer Ordnung, oder es wird durch sie ein Momentankräftesystem, oder ein continuirliches Kräftesystem bestimmt, welches die gesuchte Bewegung zur Folge hat. Die Lösung des Problems steigt stufenweise von der Ordnung der gegebenen Bedingungen bis zur Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes und zum geometrischen Vorgange der Bewegung herab, erfordert aber, dass der Bewegungszustand der niederen Ordnungen für irgend einen Moment oder für irgend eine Lage des beweglichen Systems bekannt sei. Wenn Kräfte gegeben sind, so kann dabei der eigenthümliche Fall eintreten, dass dieselben gegenseitig ihre Wirkung tilgen, so dass sie keinen Einfluss auf den Bewegungszustand ausüben. Man nennt diesen Fall der gegenseitigen Vernichtung der Kraftwirkungen das Gleichgewicht der Kräfte am beweglichen System, auch wohl, wenn auch weniger passend, das Gleichgewicht des beweglichen Systems.

Bei allen Problemen der vorliegenden Art wird Beweglichkeit des Systems vorausgesetzt. Es gibt aber verschiedene Grade der Beweglichkeit, indem dieselbe durch mancherlei Nebenbedingungen beschränkt sein kann. Diese Bedingungen modificiren die Wirkung der Kräfte, können aber ebendeshalb in den meisten Fällen durch Kräfte vertreten werden.

§. 11. Man pflegte früher das Studium der Mechanik mit der Theorie der Kräfte zu beginnen. Sie hiess sehr richtig die Dynamik und der specielle Theil derselben, welcher vom Gleichgewicht handelt, die Statik. Allmählich gewann aber das Wort Dynamik die Bedeutung von Bewegungslehre und zerfiel die mechanische Wissenschaft in zwei Theile, die sich logisch nicht gegenüberstehen, nämlich in die Lehre vom Gleichgewichte und die Lehre von der Bewegung. Diejenigen Theile der Mechanik, welche nicht von den Kräften handeln, verdanken ihre Vervollkommnung vorzugsweise der Neuzeit und werden vielfach mit dem Gesammtnamen der Phoronomie oder Kinematik belegt. Das Wort κίνημα bedeutet die Bewegung als Zustand, κίνησις Bewegung als Thätigkeit, das Hervorbringen der Bewegung. Wir verstehen daher unter Kinematik die Theorie der Bewegungszustände; sie hat unserer Ansicht nach zu umfassen den geometrischen Vorgang der Bewegung oder die Geometrie der Bewegung, den Geschwindigkeitszustand und die Beschleunigungszustände der verschiedenen Ordnungen. Kinetik wird sachgemäss die Erzeugung der Bewegung durch Kräfte genannt. Im Grossen und Ganzen bezeichnet also Kinematik das directe Problem der Bewegung, Kinetik das umgekehrte Problem derselben. Zwischen beide Abtheilungen gehört die allgemeine Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz, welchen Zweigen die Namen Dynamik und Statik entsprechen (denn Aequivalenz und Gleichgewicht der Kräfte sind Begriffe, welche auf einander reducirbar sind). Eine sorgfältige Betrachtung der Mittel, deren sich die Mechanik zur Lösung ihrer Aufgabe bedient, zeigt, dass gewisse allgemeine Theorien sowol in der Lehre von der Geschwindigkeit, als auch in der Lehre von den Beschleunigungen und in der Lehre von den Kräften zugleich Anwendung finden, so dass es nicht unzweckmässig erscheint, diese Theorien zu einem besonderen Abschnitt zusammenzufassen und allen übrigen vorangehen zu lassen. Es sind dies die geometrische Theorie der Streckensysteme, die der Massenpunktsysteme und der Momente verschiedener Ordnungen, insbesondere die der sogenannten Trägheitsmomente. Wir werden daher unsere Wissenschaft in folgenden Abtheilungen behandeln:

I. Theil: Geometrie der Streckensysteme und Geometrie der Massen.
II. Theil: Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände (Kinematik).
III. Theil: Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im ursprünglichen Sinne und Statik).
IV. Theil: Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im neueren Sinne).

Was hier unter I. als Geometrie der Streckensysteme bezeichnet ist, sind die Elemente einer heutzutage sorgfältig gepflegten Disciplin, deren Spuren sich als Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte Jahrhunderte weit rückwärts verfolgen lassen. Nur allmählich wurde sie selbständig in verschiedenem Sinne als Geometrie des Imaginären, als Theory of Quaternions, als lineale Ausdehnungslehre etc. von den bedeutendsten Mathematikern, Gauss, Hamilton, Möbius, Grassmann etc. ausgebildet, so dass sie heutzutage in Verbindung mit der Theorie der Liniencomplexe als eines der kräftigsten Hülfsmittel der Mechanik angesehen werden muss. Es ist daher auch an der Zeit, sie als ein Fundament unserer Wissenschaft voranzustellen. Indem der Verfasser dieses Buches dies thut, ist er sich genau der Grenzlinie bewusst, bis zu welcher die Ausscheidung derartiger Lehren aus den rein mechanischen Theorien heutzutage in einem Lehrbuche möglich ist.

Aehnliches gilt von der gleichfalls unter I. aufgeführten Geometrie der Massen. Sie verfolgt zwei Richtungen: Das Studium der Vertheilung der Massenpunkte im Raume und der Beziehungen zwischen Massenpunktsystemen und Axen, Ebenen und Punkten des Raumes. Die erstere Richtung zielt nach den Gesetzen der Anordnung von Punktsystemen nach gegebenen Rücksichten, der Regelmässigkeit, der Homogenetät, der Isotropie etc., während die andere die Theorie der Momente verschiedener Ordnungen entwickelt. Die erstere lassen wir hier ganz beiseite und hinsichtlich der zweiten begnügen wir uns mit dem Nothwendigsten. Ein Lehrbuch muss sich bescheiden; es verliert an Werth, wenn es zu viel gibt. Es ist kein Repertorium, sondern eine Anleitung zum Studium; umfassendes Wissen kann es nur durch Angabe der Literatur fördern, zum tüchtigen Können soll es befähigen.

Die Mechanik ist eine vorzugsweise geometrische Wissenschaft, sie enthält sogar viele Sätze rein geometrischen Inhaltes. Sowie die Geometrie heutzutage nach zwei Richtungen ausgebildet wird und wir in Folge dessen eine analytische und eine synthetische Geometrie besitzen, kann auch die Mechanik sich sowohl der erstern, als der zweiten Richtung besonders zuwenden. Wenn wir auch mit Rücksicht auf den Zweck dieses Buches und im Hinblick auf das geringere Maass von Vorkenntnissen, welche wir voraussetzen wollen, diese Scheidung nach analytischen und synthetischen Methoden nicht in aller Schärfe durchführen können, so glauben wir doch mit Recht von den synthetischen Methoden einen ausgedehnteren Gebrauch machen zu dürfen, als bisher zu geschehen pflegte. Wir huldigen der Ansicht, dass beide Methoden, die analytische, wie die synthetische, heutzutage nur vereint im Stande sind, der Mechanik die Schärfe und Klarheit zu verleihen, welche alle mathematischen Wissenschaften auszeichnen sollen.

Erster Theil.

Geometrie der Streckensysteme.
Geometrie der Massen.

I. Capitel.

Geometrische Summe und Differenz von Strecken. Aequivalenz von Streckensystemen im Stralenbüschel und Stralenbündel.

§. 1. An jeder Strecke AA' unterscheidet man Richtung, Sinn, Länge und Lage im Raume. Den Sinn bezeichnet die Folge der Buchstaben des Anfangs- und Endpunktes; ein beweglicher Punkt kann die Strecke im Sinne AA' oder im entgegengesetzten Sinne $A'A$ durchlaufen. Die Lage der Strecke im Raume wird bestimmt durch ihre Lage auf der Geraden, welche sie enthält und durch die Lage dieser Geraden im Raume.

Zwei Strecken von gleichem Sinne und gleicher Länge, auf derselben oder auf parallelen Geraden liegend, heissen geometrisch gleich. Eine nach Richtung, Sinn und Länge bestimmte Strecke AA' bezeichnen wir mit Möbius durch $[AA']$ und die geometrische Gleichheit dieser Strecke mit einer anderen $[BB']$, d. h. die Uebereinstimmung beider nach Richtung, Sinn und Länge, so dass sie sich blos der Lage nach von einander unterscheiden können, drücken wir durch die Gleichung $[AA'] = [BB']$ aus, in welcher das Gleichheitszeichen eine etwas allgemeinere Bedeutung hat als sonst, indem es sich neben der Gleichheit der Länge auch noch auf die Gleichheit der Richtung bezieht.

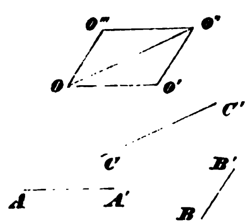

Fig. 1.

§. 2. Es seien zwei Strecken $[AA']$, $[BB']$ gegeben (Fig. 1). Von irgend einem Punkte O aus ziehen wir $[OO'] = [AA']$ und vom Endpunkte O' weiter $[O'O''] = [BB']$. Die Bildung des gebrochenen Linienzuges $OO'O''$ nennen wir die geometrische Addition von $[BB']$ zu $[AA']$ und die Schlusslinie $[OO'']$ dieses Linienzuges oder jede ihr geometrisch gleiche Strecke $[CC']$ die geometrische Summe von $[AA']$

und $[BB']$. Zu derselben Summe gelangen wir auch, indem wir $[OO'''] = [BB']$ ziehen und an dem Endpunkte O''' eine Strecke geometrisch gleich $[A'A'']$ antragen, d. h. $[AA']$ zu $[BB']$ geometrisch addiren. Die Strecken $[AA']$ und $[BB']$, welche durch ihre Addition die geometrische Summe $[CC']$ bilden, nennen wir die **Summanden** der Summe. Ihre Ordnung ist willkührlich. Die geometrische Addition von $[AA']$ und $[BB']$ bezeichnen wir durch $[AA'] + [BB']$ oder $[BB'] + [AA']$, welche beide Zeichen den Bildungsprozess des Linienzuges $OO'O''$ und des Linienzuges $OO'''O''$ ausdrücken sollen. Insofern beide dasselbe Resultat, nämlich die geometrische Summe liefern, nennen wir beide Linienzüge der Summe $[CC']$ geometrisch gleich und drücken dies durch die geometrische Gleichung

$$[CC'] = [AA'] + [BB'] \quad \text{oder} \quad [CC'] = [BB'] + [AA']$$

aus, deren linke Seite die durch den vollendeten Prozess der Addition gebildete geometrische Strecke darstellt, während die rechte Seite den der Summe geometrisch gleichen, noch die Spuren des Bildungsprozesses zeigenden Linienzug $OO'O''$ oder $OO'''O''$ bedeutet.

Zur Bildung der geometrischen Summe können wir uns auch der Vollendung des Parallelogramms bedienen, in dessen Ecke O die beiden der gegebenen Strecke geometrisch gleichen Strecken $[OO']$ und $[OO''']$ zusammenstossen. Die Diagonale, welche die Ecke O mit der ihr gegenüber liegenden O'' verbindet, stellt die geometrische Summe dar.

Sind $[AA']$ und $[BB']$ Strecken von derselben Richtung und demselben Sinne, so fallen $[OO']$ und $[O'O'']$ in eine Gerade derselben Richtung und sind ebenfalls von gleichem Sinne. Die Gleichung

$$[CC'] = [AA'] + [BB']$$

geht über in $[CC'] = [AA' + BB']$, wenn $AA' + BB'$ die gewöhnliche Summe der Längen AA' und BB' ist. Aehnliches findet statt, wenn $[AA']$ und $[BB']$ bei derselben Richtung entgegengesetzten Sinnes sind. Es wird dann $[CC'] \doteq [AA' - BB']$, wo $AA' - BB'$ der Längenunterschied zwischen beiden Strecken im gewöhnlichen Sinne ist.

§. 3. Ist die geometrische Summe $[CC']$ und einer der Summanden, z. B. $[BB']$ gegeben, so kann der andere Summand $[AA']$ gefunden werden. Die Strecke $[AA']$, welche mit $[BB']$ zusammen die geometrische Summe $[CC']$ bildet, heisst die **geometrische Differenz** zwischen $[CC']$ und $[BB']$; $[CC']$ ihr **Minuend**, $[BB']$ ihr **Subtrahend**. Die Bildung dieser Differenz heisst die **geometrische Subtraction** der Strecke $[BB']$ von $[CC']$ und wird mit $[CC'] - [BB']$ bezeichnet. Daher ist

$$[AA'] = [CC'] - [BB'].$$

Wir finden die Differenz $[AA']$, indem wir von dem Endpunkte O'' aus an $[OO''] = [CC']$ die Strecke $[O''O'] = [B'B]$, d. h. $[BB']$ im umgekehrten Sinne antragen und $[OO']$ ziehen. $[OO']$ ist die Strecke, welche mit $[O'O''] = [BB']$ die Summe $[CC']$ liefert, mithin die gesuchte Differenz $[AA']$. Da $[OO'] = [OO''] + [O''O']$, so ist $[AA'] = [CC'] + [B'B]$. Die Vergleichung mit $[AA'] = [CC'] - [BB']$ zeigt, dass $[B'B] = -[BB']$. Die Bildung der geometrischen Differenz ist identisch mit der Bildung der geometrischen Summe des Minuenden und des Subtrahenden, letzterer im entgegengesetzten Sinne genommen. Das subtractive $-[BB']$ ist gleich dem additiven $+[B'B]$ oder die Summe entgegengesetzt geometrisch gleicher Strecken ist Null, nämlich $[BB'] + [B'B] = 0$.

Wird $[BB'] = [CC']$, so folgt $[AA'] = [CC'] - [BB'] = 0$, d. h. die Differenz geometrisch gleicher Strecken ist Null.

§. 4. Um die geometrische Summe von drei Strecken $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ zu finden, ziehe man von einem beliebigen Punkte O aus (Fig. 2)

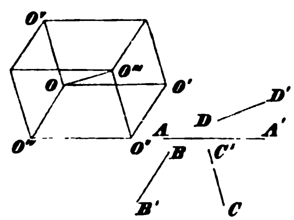

Fig. 2.

$$[OO'] = [AA'],\quad [O'O''] = [BB']$$

und $[O''O'''] = [CC']$ und ziehe $[OO''']$; so wird $[OO''']$ oder jede ihr geometrisch gleiche Strecke

$$[DD'] = [AA'] + [BB'] + [CC'].$$

Denn es ist $[OO'''] = [OO''] + [O''O''']$ und $[OO''] = [OO'] + [O'O''] = [AA'] + [BB']$ mithin $[DD'] = [AA'] + [BB'] + [CC']$. Zieht man noch $[OO^{IV}] = [BB']$, $[OO^{V}] = [CC']$ und vollendet das Parallelepiped OO''', so stellt die Diagonale, welche O mit der gegenüberliegenden Ecke O''' verbindet, die geometrische Summe $[DD']$ dar und ist jeder zusammenhängende Kantenzug, dessen Schlusslinie diese Diagonale ist, gleich der geometrischen Summe der drei Strecken. Diese Kantenzüge unterscheiden sich durch die Ordnung der Kanten, d. h. die Summanden der Summe, von einander. Durch successive Vertauschung zweier auf einander folgender Summanden kann man alle Anordnungen derselben erreichen.

§. 5. Allgemein findet man die geometrische Summe von n Strecken

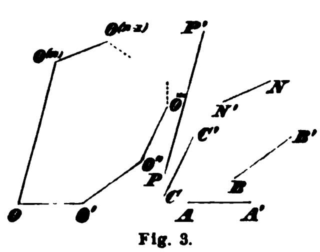

Fig. 3.

$[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, ... $[NN']$ mit Hülfe eines Streckenzuges (Fig. 3), der in einem beliebigen Punkte O beginnt und dessen Seiten $[OO']$, $[O'O'']$, $[O''O''']$, ... $[O^{(n-1)}O^{(n)}]$ den gegebenen Strecken in beliebiger Aufeinanderfolge geometrisch gleich sind. Die Schlusslinie $[OO^{(n)}]$ des Zuges oder jede ihr geometrisch gleiche Strecke $[PP']$ stellt die Summe dar. Denn zieht man die Diagonalstrecken $[OO'']$, $[OO''']$, ... $[OO^{(n-1)}]$, so ist

$$
\begin{aligned}
[OO''] &= [OO'] + [O'O''] \\
[OO'''] &= [OO''] + [O''O'''] \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
[OO^{(n)}] &= [OO^{(n-1)}] + [O^{(n-1)}O^{(n)}]
\end{aligned}
$$

mithin nach der Addition dieser Gleichungen

$$
\begin{aligned}
[OO^{(n)}] &= [OO'] + [O'O''] + [O''O'''] + \cdots + [O^{(n-1)}O^{(n)}] \\
&= [AA'] + [BB'] + [CC'] + \cdots + [NN'] = [PP'].
\end{aligned}
$$

Durch successive Vertauschung zweier auf einander folgenden Summanden können alle Streckenzüge, welche die geometrische Summe zur Schlusslinie haben, erreicht werden.

Fällt der Endpunkt $O^{(n)}$ des Streckenzuges mit dem Anfangspunkte O zusammen, d. h. schliesst sich der Streckenzug, so ist die geometrische Summe $[PP']$ der Strecken Null. Sind die Strecken alle einer Ebene parallel, so ist der Streckenzug eine ebene Figur. Sind die Strecken alle von gleicher Richtung (bei demselben oder auch entgegengesetztem Sinne), so fallen die Seitenlinien des Streckenzuges sammt der Schlusslinie in eine Gerade derselben Richtung. Die Länge der geometrischen Summe ist alsdann die algebraische Summe der n gegebenen Streckenlängen, wenn Streckenlängen entgegengesetzten Sinnes als Glieder der Summe von entgegengesetztem Zeichen angesehen werden.

§. 6. Wenn Punkte $A, B, C, D, \ldots M, N$ in gerader Linie liegen, so ist

$$[AB] + [BC] + [CD] + \cdots + [MN] + [NA] = 0,$$

wie auch immer die Punkte in der Geraden gegen einander liegen mögen. Denn man kann immer ein Parallelstreckensystem von Strecken geometrisch gleich $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, ... $[MN]$, $[NA]$ irgendwie im Raume denken und dessen geometrische Summe von A aus bilden. Dieselbe ist die Schlusslinie des auf der linken Seite der Gleichung dargestellten Streckenzuges. Da der Anfangspunkt A desselben zugleich der Endpunkt ist, so ist der Streckenzug geschlossen und mithin die geometrische Summe Null. Man erreicht diesen Satz gewöhnlich direct, indem man die Richtigkeit der Gleichung $[AB] + [BC] + [CA] = 0$ für alle Lagen der drei Punkte A, B, C in der geraden Linie darthut, zu ihr die analog gebildeten

$$
\begin{gathered}
[AC] + [CD] + [DA] = 0, \quad [AD] + [DE] + [EA] = 0, \ldots \\
[AM] + [MN] + [NA] = 0
\end{gathered}
$$

addirt und berücksichtigt, dass $[AC] + [CA] = 0$, $[AD] + [DA] = 0$, ... $[AM] + [MA] = 0$ ist.

§. 7. Der Gebrauch der Zeichen der Addition, der Subtraction und der Gleichheit, wie er in den vorstehenden Erörterungen vorkommt, ist ein allgemeinerer, als der gewöhnliche, bei welchem blos die Grösse der zu verbindenden Elemente in Frage kommt. An sich würde es daher zweckmässig sein, diese verallgemeinerte Bedeutung der Zeichen durch eine Marke z. B. in der Art, wie $\overset{*}{+}$, $\overset{*}{-}$, $\overset{*}{=}$ auszudrücken. Es hat sich hiefür indess noch kein bestimmter Gebrauch gebildet und pflegt man aus der Natur der Untersuchung selbst herauszulesen, in welchem Sinne diese Zeichen zu nehmen sind.

§. 8. Von den Polygonen, deren Seiten solchen Sinn haben, dass ein beweglicher Punkt sie auf einander folgend in continuirlichem Zuge durchlaufen kann und den Projectionen solcher Polygone auf Axen und auf Ebenen werden wir häufig Gebrauch machen; wir fügen daher über sie Einiges hinzu.

Eine Strecke wird durch zwei Parallelebenen, welche durch ihre Endpunkte gehen, auf eine Axe projicirt. Ihre Projection ist die ins Innere der Parallelschicht dieser Ebenen hineinfallende Strecke, welche durch sie auf der Axe bestimmt wird. Der Sinn der Projection hängt von dem Sinne der projicirten Strecke ab und ist der Sinn, in welchem ein beweglicher Punkt die Projection durchläuft, wenn er selbst die Projection eines andern Punktes ist, welcher die zu projicirende Strecke in deren Sinn beschreibt. Die Projection eines Polygons ist das Aggregat der Projectionen seiner Seiten.

Ist r eine nach Länge, Richtung und Sinn bestimmte Strecke, r_x ihre Projection auf eine Axe, mit welcher r den Winkel α bildet, so ist für orthogonale Projectionen $r_x = r \cos \alpha$. Diese Formel setzt voraus, dass der Sinn der Axe und der Sinn der Drehung in einer zu r und r_x parallelen Ebene fixirt seien, wenn sie r_x vollkommen bestimmen soll. Sind die Projectionen nicht orthogonal, sondern einer Ebene δ parallel, so ist

$$r_x = r \cdot \frac{\sin (r\delta)}{\sin (x\delta)}.$$

1. **Die Projection** $abc \ldots na$ **eines geschlossenen Polygons** $ABC \ldots NA$ **auf eine Axe** x **ist für jede Lage von** x **im Raume Null.** Denn sie ist $ab + bc + cd + \cdots + na$, also gleich Null nach §. 6.

2. **Die Projection** $abc \ldots n$ **eines nicht geschlossenen Polygons** $ABC \ldots N$ **auf irgend eine Axe** x **ist gleich der Projection der Schlusslinie** AN **auf diese Axe.** Denn schliesst man das Polygon mit NA so ist die Projection von $ABC \ldots NA$ gleich

$$ab + bc + \cdots + mn + na = 0,$$

also

$$ab + bc + cd + \cdots + mn = -na = an;$$

es ist aber an die Projection der Schlusslinie AN.

3. **Die Projection eines offenen Polygons verschwindet nur für Axen, welche zur Schlusslinie senkrecht sind.**

4. **Ist die Projection eines Polygons für jede Axe des Raumes Null, so ist das Polygon geschlossen.** Denn die Projection eines offenen Polygons kann nach 3. nicht für alle Axen verschwinden.

5. **Ist die Projection eines Polygons für irgend drei nicht ein und derselben Ebene parallele Axen Null, so ist sie für jede Axe Null und folglich das Polygon geschlossen.** Denn wäre die Projection für irgend eine Axe nicht Null, so könnte das Polygon nicht geschlossen sein und wäre seine Projection für jede Axe gleich der Projection der Schlusslinie auf diese Axe. Die Projection der Schlusslinie müsste daher für die drei genannten Axen zugleich verschwinden und müsste mithin die Schlusslinie des Polygons zu dreien einer Ebene nicht parallelen Richtungen zugleich senkrecht sein, was nicht angeht.

§. 9. Um die geometrische Summe $[R]$ eines Systems von Strecken $[P]$, $[P']$, $[P'']$, ... $[P^{(n)}]$, nämlich

$$[R] = [P] + [P'] + [P''] + \cdots + [P^{(n)}]$$

analytisch zu bestimmen, suchen wir zunächst ihre Projectionen A, B, C auf drei rechtwinklige Axen OX, OY, OZ des Punktes O, an welchem wir die Summe $[R]$ bilden. Diese Projectionen sind die Summen der Projectionen der Strecken P auf die Axen und wenn wir diese mit $X, X', X'', \ldots X^{(n)}$ für die Axe OX, mit $Y, Y', Y'', \ldots Y^{(n)}$ für die Axe OY und mit $Z, Z', Z'', \ldots Z^{(n)}$ für die Axe OZ bezeichnen, so werden:

$$\begin{aligned} A &= X + X' + X'' + \cdots + X^{(n)} = \Sigma X, \\ B &= Y + Y' + Y'' + \cdots + Y^{(n)} = \Sigma Y, \\ C &= Z + Z' + Z'' + \cdots + Z^{(n)} = \Sigma Z, \end{aligned}$$

wo die Summen algebraische Summen darstellen.

Sind $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \ldots \alpha^{(n)}, \beta^{(n)}, \gamma^{(n)}$ die Richtungswinkel der Strecken P gegen die Axen, so hat man

$$\begin{aligned} X &= P\cos\alpha, \quad & X' &= P'\cos\alpha', \ \ldots \ & X^{(n)} &= P^{(n)}\cos\alpha^{(n)}, \\ Y &= P\cos\beta, \quad & Y' &= P'\cos\beta', \ \ldots \ & Y^{(n)} &= P^{(n)}\cos\beta^{(n)}, \\ Z &= P\cos\gamma, \quad & Z' &= P'\cos\gamma', \ \ldots \ & Z^{(n)} &= P^{(n)}\cos\gamma^{(n)}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Richtungswinkel von $[R]$ gegen die Axen mit a, b, c, so ist ferner:

$$\frac{\cos a}{A} = \frac{\cos b}{B} = \frac{\cos c}{C} = \frac{1}{R},$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Die letztere Gleichung bestimmt die Länge der geometrischen Summe R, die ihr vorangehenden Proportionalitäten, in welchen R als Absolutwerth aufzufassen ist, während A, B, C Strecken von bestimmten Zeichen auf den Axen bedeuten, geben die Richtung und den Sinn von R.

Aus $R^2 = A^2 + B^2 + C^2$ folgt, dass R nur dann verschwindet, wenn gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ist; d. h. wenn die drei Projectionen von R verschwinden, welche drei Bedingungen wir in der Form schreiben wollen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Sie drücken aus, dass der Streckenzug der P sich schliesst.

Sind die Strecken $[P]$ alle einer Ebene parallel, so genügen zwei Axen OX, OY, parallel zu dieser Ebene. Es sind dann alle γ gleich $\frac{1}{2}\pi$ und alle Z Null. Es bleibt daher zur Bestimmung von $[R]$ als ausreichend:

$$A = \Sigma X, \qquad \operatorname{tg} a = \frac{B}{A},$$

$$B = \Sigma Y, \qquad R^2 = A^2 + B^2.$$

§. 10. In der Theorie der Streckensysteme werden zwei Strecken von gleichem Sinne und gleicher Länge, welche auf derselben Geraden liegen als gleichwerthig oder aequivalent betrachtet, so dass sie für einander substituirt werden können. Die Aequivalenz solcher Strecken ist ein specieller Fall der geometrischen Gleichheit; er tritt ein, wenn die Richtungslinien zweier geometrisch gleicher Strecken zusammenfallen. Eine Strecke kann auf ihrer Richtungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sie aufhört, sich selbst aequivalent zu bleiben. Zwei entgegengesetzt gleiche Strecken auf derselben Geraden sind unabhängig von ihrer Entfernung von einander, zusammen aequivalent Null. Sie können in jedem Streckensystem getilgt oder auch demselben hinzugefügt werden, ohne dass das System dadurch alterirt wird.

Schneiden sich die Richtungslinien zweier Strecken $[AA']$, $[BB']$ in einem Punkte O (Fig. 4), an welchen Punkt man dem eben Gesagten gemäss dieselben verschieben kann, und bildet man am Punkte O die geometrische Summe $[R] = [AA'] + [BB']$, so nennt man dieselbe in der so gewonnenen Lage oder in jeder andern Lage $[RR']$ auf ihrer Richtungslinie die Resultante von $[AA']$ und $[BB']$. Die Resultante zweier sich schneidender Strecken ist demnach die geometrische Summe derselben in solcher Lage, dass ihre Richtungslinie durch den Schnittpunkt der Strecken geht. Die Resultante wird als der Verbindung der beiden Strecken aequivalent angesehen. Allgemein heisst die geometrische Summe irgend welcher Strecken, welche auf Stralen eines Stralenbüschels oder Stralenbündels liegen, in einer Lage, dass ihre Richtungslinie durch den Mittelpunkt des Büschels oder

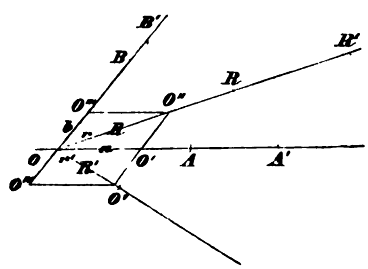

Fig. 4.

Bündels geht. die Resultante des Streckensystems im Büschel oder Bündel und wird als diesem System aequivalent angesehen.

§. 11. Sind a, b, r die Stralen des Punktes O, auf welchen die Strecken $[AA']$, $[BB']$ und ihre Resultante $[RR']$ liegen, so ist

$$\frac{[AA']}{\sin rb} = \frac{[BB']}{\sin ar} = \frac{[RR']}{\sin ab}$$

und

$$\overline{RR'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + 2AA' \,.\, BB' \,.\cos(ab)\,.$$

Die Resultante zweier gleicher Strecken im Büschel halbirt den Winkel von deren Richtungsstralen. Das Parallelogramm OO'' der Strecken geht dann in einen Rhombus über und wird $RR' = 2AA' \,.\cos \tfrac{1}{2}ab$. Wechselt eine der Strecken, z. B. $[BB']$ den Sinn, so fällt das Streckenparallelogramm über $[OO'] = [AA']$ und $[OO^{IV}] = [B'B]$ und mit ihm die Resultante

$$[R'] = [AA'] + [B'B] = [AA'] - [BB']$$

in den Nebenwinkel des Winkels (ab). Der Richtungsstral r der Resultanten $[R]$ theilt den Winkel (ab) nach dem Sinusverhältniss

$$\sin ar : \sin rb = [BB'] : [AA'];$$

der Richtungsstral r' der Resultanten $[R']$ aber nach dem Verhältniss

$$\sin ar' : \sin r'b = [B'B] : [AA'] = -[BB'] : [AA']\,.$$

Daher ist

$$\frac{\sin ar}{\sin rb} : \frac{\sin ar'}{\sin r'b} = -1\,,$$

d. h. es sind $a, b; r, r'$ vier harmonische Stralen und sind die Richtungen der beiden Resultanten zugeordnet.

§. 12. Die Anfangspunkte A, B der Strecken $[AA']$, $[BB']$ bestimmen mit ihrem Schnittpunkt O einen Kreis AOB (Fig. 5), welcher von der Resultanten $[R]$ in einem Punkte R geschnitten wird, den wir als Anfangspunkt der Resultanten ansehen können. Bleiben nun die Punkte A, B fest und die Strecken von unveränderlicher Länge, während O den Kreis durchläuft, so ändern sich weder die Winkel, noch die Seiten des Streckenparallelogramms OO'', aus welchem die Resultante hervorgeht und bildet diese fortwährend dieselben Winkel mit den Seiten desselben. Sie bleibt daher gleichfalls von unveränderlicher Grösse und R ist ein fester Punkt des Kreises, dessen Lage von dem Verhältniss der Strecken abhängig ist.

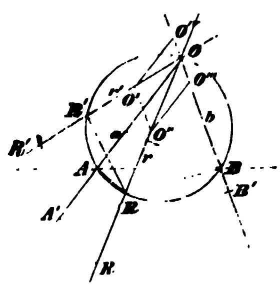

Fig. 5.

Nun war

$$\frac{[AA']}{\sin rb} = \frac{[BB']}{\sin ar} = \frac{[R]}{\sin ab}$$

und das Dreieck ABR liefert nach dem Satze von der Gleichheit der Peripheriewinkel im Kreise $\sin rb = \sin A$, $\sin ar = \sin B$, $\sin ab = \sin R$ und wenn wir die Verhältnisse der Sinusse der Winkel durch die Verhältnisse der Gegenseiten ersetzen, so kommt:

$$\frac{[AA']}{RB} = \frac{[BB']}{AR} = \frac{[R]}{AB}.$$

Der Punkt R liegt so, dass $AR : RB = BB' : AA'$, d. h. er theilt den Bogen AB so, dass die Sehnen AR, RB im umgekehrten Verhältniss der Strecken AA', BB' stehen. Kehrt BB' den Sinn um, so fällt die Resultante R' von AB und $B'B$ in den Nebenwinkel O und geht durch den festen Punkt R' des Kreises, wofür

$$\frac{[AA']}{R'B} = -\frac{[BB']}{AR'} = \frac{[R']}{AB}$$

ist, d. h. R' theilt AB so, dass das Verhältniss der Sehnen

$$AR' : R'B = -BB' : AA'.$$

Die Punkte A, B; R, R' liegen daher auf dem Kreise so, dass zwischen den Sehnen, welche sie verbinden, die Relation besteht:

$$\frac{AR}{RB} : \frac{AR'}{R'B} = -1.$$

Lassen wir jetzt AA' und BB' parallel werden, so werden auch R, R' ihnen parallel, rückt O ins Unendliche und geht der Kreis in die Gerade über, welche A und B verbindet (Fig. 6). Sie enthält die Punkte R, R' und A, B; R, R' sind vier harmonische Punkte, so dass R zwischen A und B liegend die Strecke AB im Verhältniss $AR : RB = BB' : AA'$ theilt, während R' ausserhalb AB fällt, sodass $AR' : R'B = -BB' : AA'$ ist. Zugleich ergibt sich hieraus, dass R oder R' immer näher an der absolut grösseren der beiden Strecken AA', BB' liegt. Die Proportionen, welche auch für den vorliegenden Fall unverändert fortbestehen müssen, zeigen, dass $R = AA' + BB'$ und $R' = AA' - BB'$, da sowohl $AR + RB = AB$, als auch $AR' + R'B = AB$ ist. Wir erhalten damit den Satz:

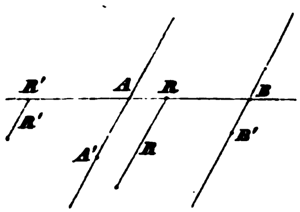

Fig. 6.

Die Resultante zweier paralleler Strecken ist diesen parallel. Bei gleichem Sinne der Strecken fällt die Richtungslinie der Resultanten in den von ihnen bestimmten Parallelstreifen, bei

entgegengetztem Sinne in den Aussenraum. Sie theilt eine beliebige Transversale und die Fläche des Parallelstreifens im umgekehrten Verhältniss der Strecken und ihre Grösse ist die algebraische Summe beider. Ihr Sinn stimmt mit dem Sinne der grösseren Strecke überein.

Werden die Strecken einander gleich, so rückt ihre Resultante im Falle gleichen Sinnes in die Mitte zwischen beide Strecken und wird ihrer Summe gleich. Im Falle entgegengesetzten Sinnes aber rückt sie ins Unendliche und verschwindet ihre Grösse. Zwei entgegengesetzte geometrisch gleiche Strecken sind daher niemals einer endlichen Strecke aequivalent.

II. Capitel.

Streckenpaare und deren Aequivalenz.

§. 1. Die Verbindung zweier entgegengesetzt gleicher, nicht in dieselbe Richtungslinie fallender Strecken heisst ein Streckenpaar, der Abstand ihrer parallelen Richtungslinien oder die Breite des von diesen gebildeten Flächenstreifens der Arm des Paares, die beiden Strecken selbst dessen Seitenlängen und das Produkt aus dem gemeinschaftlichen Werthe der Seitenlängen und dem Arme oder die Fläche des von den Seitenlängen als Gegenseiten gebildeten Parallelogramms das Moment des Paares. Zur geometrischen Bezeichnung des Paares genügt die Figur, welche die Seitenstrecken nach Länge und Sinn, letzteren etwa durch angefügte Pfeilspitzen oder die Folge von Buchstaben an den Enden nebst dem Arme andeutet. Die Lage der Strecken auf ihren Richtungslinien ist willkürlich, da jede Strecke bei der Verschiebung auf ihrer Richtungslinie als sich aequivalent bleibend angenommen wird. Die Ebene des Paares scheidet den Raum in zwei Gebiete; ein sehender Punkt, in dem einen von ihnen befindlich, erkennt den Sinn der Seitenlängen (die Stellung der Pfeilspitzen) übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung, während er ihm von dem anderen Raumgebiete aus umgekehrt erscheint. Zwei Paare in derselben oder in parallelen Ebenen haben gleichen oder entgegengesetzten Sinn, je nachdem derselbe von einem Punkte ausserhalb ihrer Ebene oder ausserhalb der von ihren Ebenen gebildeten Parallelschicht bei beiden oder nur bei einem mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung harmonirend oder nicht harmonirend erkannt wird. Ein Perpendikel, irgendwo auf der Ebene des Paares nach dem Gebiete des Raumes hin errichtet, von welchem aus der Sinn des Paares mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt, heisst die Axe des Paares und eine Strecke auf ihr, welche den numerischen Werth des Momentes darstellt und mit Hülfe einer Pfeilspitze das Gebiet, nach welchem die Axe gerichtet ist und damit den Sinn des Paares bezeichnet, das Axenmoment des Paares.

Es sind verschiedene Bezeichnungsweisen der Paare in Schrift und Zeichnung üblich. Sind AB, CD die gleichen Seitenstrecken, so wählt man nach Bedürfniss die Form (AB, CD), worin die Stellung der Buchstaben den Sinn der Strecken andeutet oder wenn man die Länge der Strecken mit P bezeichnet $(P, -P)$, indem man den Gegensatz des Sinnes durch das Vorzeichen ausdrückt oder man gibt das Moment Pp an, wo p den Arm des Paares bedeutet. (S. Fig. 7.)

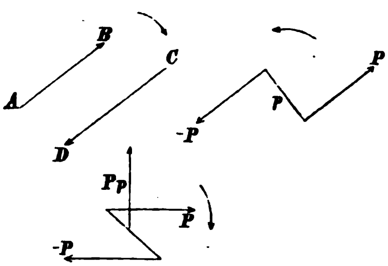

Fig. 7.

§. 2. Für die Aequivalenz der Streckenpaare in derselben und in parallelen Ebenen gelten folgende Sätze:

I. Ein Streckenpaar ist jedem anderen aequivalent, welches, mit ihm in derselben Ebene liegend, gleiche Seitenlängen, gleichen Arm und gleichen Sinn mit ihm besitzt. Jedes Paar bleibt sich daher aequivalent, wenn es in seiner Ebene wie immer seine Lage ändert.

Denn es seien S, S' (Fig. 8) zwei Parallelstreifen gleicher Breite. Dieselben haben einen Rhombus A_0 B_0 C_0 D_0 als gemeinsamen Flächentheil oder sind parallel. Nehmen wir zunächst den ersten Fall an. Auf den Grenzlinien von S liege das Paar (AB, CD), auf den Grenzlinien von S' nehmen wir die vier gleichen, paarweise entgegengesetzten Strecken $A'B'$, $C'D'$; $A''B''$, $C''D''$ an, welche zusammen aequivalent Null sind und von denen jede gleich der Seitenlänge des Paares (AB, CD) sei. Diese vier Strecken bilden zwei Paare, von denen das eine $(A'B', C'D')$ dem Paare (AB, CD) congruent ist und sich von ihm blos seiner Lage nach unterscheidet, in allen übrigen Beziehungen, insbesondere auch dem Sinne nach mit ihm übereinstimmt, während das andere $(A''B'', C''D'')$ ihm entgegengesetzt ist. Das Paar (AB, CD) ist daher sich selbst in Verbindung mit diesen beiden Paaren aequivalent. Da Strecken sich aequivalent bleiben, wenn sie in ihren Richtungslinien verschoben werden, so können wir die Seitenlängen des Paares (AB, CD) an die Ecken des Rhombus $A_0 B_0 C_0 D_0$ verlegen. Dasselbe können wir mit dem Paare $(A''B'', C''D'')$ thun. Die beiden so

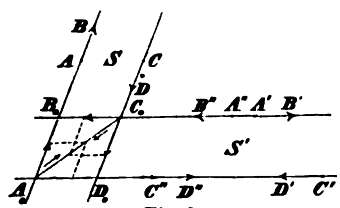

Fig. 8.

verlegten Paare bilden an den beiden gegenüberliegenden Ecken A_0, C_0 des Rhombus ein System von vier paarweise entgegengesetzten Strecken, welche in die Seitenrichtungen des Rhombus fallen. Die Resultante der beiden gleichen Strecken an A_0 fällt in die Diagonale $A_0 C_0$, ebenso die Resultante der beiden Strecken an C_0 und beide Resultanten sind einander entgegengesetzt gleich. Daher sind sie und in Folge dessen die vier Strecken, denen sie aequivalent sind, aequivalent Null und ergibt sich, dass das Paar (AB, CD) aequivalent dem Paare $(A'B', C'D')$ sei, welches ihm congruent ist in beliebig veränderter Lage in der Ebene.

In dem zweiten Falle, wenn nämlich die Streifen S, S' parallel sind, genügt es einen dritten jenen beiden congruenten Streifen anzunehmen, welcher beide Streifen S, S' schneidet, und nachzuweisen, dass jedes der Paare auf S, S' einem ihm congruenten Paare auf dem dritten Streifen aequivalent sei, woraus dann die Aequivalenz der beiden Paare unter einander folgt.

Zugleich gewinnen wir durch diese Entwickelungen den Satz:

Vier gleiche Strecken, welche längs den Seiten eines Rhombus so liegen, dass die in die Gegenseitenpaare fallenden Strecken je ein Paar bilden, sind aequivalent Null, wenn die beiden Paare entgegengesetzten Sinnes sind.

Mit Hülfe von Satz I. kann man ein Paar finden, welches zwei oder mehreren Paaren von gleichen Seitenlängen in einer Ebene zusammen aequivalent ist. Haben nämlich die beiden Paare gleichen Sinn, so schiebe man die Streifen derselben so an einander, dass sie einen Streifen von der Breite gleich der Summe ihrer Breiten bilden. Dies kann auf zwei Arten geschehen. Die Seitenlängen, welche dabei auf die Grenzlinie der an einander stossenden Streifen fallen, sind als entgegengesetzt gleich der Null aequivalent und beide Paare werden mithin dem neugebildeten einen aequivalent von derselben Seitenlänge, demselben Sinne und einem Arme gleich der Summe der Arme der vereinigten Paare. Sind die beiden Paare von entgegengesetztem Sinn, so schiebe man die Streifen über einander, so dass ein Paar Grenzlinien sich decken. Es entsteht dadurch ein den beiden aequivalentes Paar, von denselben Seitenlängen und einem Sinne, welcher mit dem Sinne des Paares vom grösseren Arme übereinstimmt, dessen Arm die Differenz der Arme der gegebenen Paare ist. Wie man mehrere Paare in einer Ebene bei gleichen Seitenlängen und theils gleichem, theils entgegengesetztem Sinne zu einem einzigen ihnen aequivalenten Paare vereinigt, dessen Arm gleich der algebraischen Summe der Arme aller einzelnen Paare gleich ist, ist von selbst klar. Zugleich erhellt, dass zwei Paare von gleichem Arme und gleichen Seitenlängen bei entgegengesetztem Sinne zusammen aequivalent Null sind.

Mit Hülfe desselben Satzes vereinigt man auch zwei oder mehrere Paare von gleichen Armen und verschiedenen Seitenlängen. Vermöge der gleichen Breite kann man die Streifen der Paare über einander schieben, so dass sie sich decken. Dabei addiren oder subtrahiren sich die Seitenlängen der Paare, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Sinn besitzen und bilden ein Paar, dessen Seitenlänge die Summe oder Differenz der Seitenlängen der gegebenen Paare ist. Für mehrere Paare verschiedenen Sinnes bei gleichen Armen ergibt sich für die Seitenlängen des neugebildeten Paares die algebraische Summe der Seitenlängen aller gegebenen Paare.

Eine wesentliche Erweiterung findet Satz I. in dem folgenden:

II. Jedes Streckenpaar ist jedem anderen aequivalent, welches mit ihm gleiche Seitenlängen, gleichen Arm und Sinn besitzt, aber in einer anderen, seiner Ebene parallelen Ebene liegt.

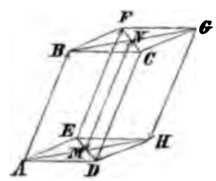

Fig. 9.

Construirt man nämlich über dem Streifen des Paares (AB, CD) einen parallelepipedischen Raum $ABCDEFGH$ und dessen Diagonalebenen, welche sich in MN schneiden, so ist, wenn das Zeichen $(\equiv)$ die Aequivalenz bezeichnet:

$$\begin{aligned}(AB, CD) &\equiv AB, CD, MN, NM \\ &\equiv (AB, NM), (MN, CD) \\ &\equiv (MN, GH), (EF, NM) \equiv (EF, GH)\end{aligned}$$

wo MN und NM als entgegengesetzt gleiche Strecken derselben Richtungslinie zusammen aequivalent Null sind und einerseits

$$(AB, NM) \equiv (MN, GH),$$

so wie andrerseits

$$(MN, CD) \equiv (EF, NM),$$

ist, als congruente Paare gleichen Sinnes in derselben Ebene. Es ist aber (EF, GH) ein Paar congruent und gleichen Sinnes mit (AB, CD) in einer Ebene, welche zur Ebene dieses Paares parallel ist.

III. Zwei Streckenpaare gleichen Sinnes, welche von den beiden Gegenseitenpaaren eines Parallelogramms gebildet werden, sind einander aequivalent.

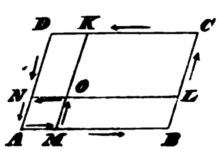

Fig. 10.

Es seien (AB, CD) und (BC, DA) (Fig. 10) die beiden Paare und das Verhältniss der Seiten des Parallelogramms rational, nämlich $AB : BC = m : n$, so dass also eine Länge $AM = AN$ angegeben werden kann, wofür $AB = m \,.\, AM$, $AD = n \,.\, AN$ ist. Legt man durch M und N Parallele LN und KM zu den Seiten des Parallelogramms, so bilden diese einen Rhombus $AMON$, für welchen $(AM, ON) \equiv (MO, NA)$ (Satz I) ist, da diese beiden Paare gleichen Arm und gleiche Seitenlängen haben. Nach den Folgerungen desselben

Satzes ist aber

$$(AB, CD) \equiv n . (AB . LN)$$

und da

$$(AB, LN) \equiv m . (AM, ON)$$

ist, so wird

$$(AB, CD) \equiv nm(AM, ON).$$

Ebenso ist aber auch

$$(BC, DA) \equiv m . (MK, DA) \equiv mn(MO, NA);$$

daher also $(AB, CD) \equiv (BC, DA)$.

Für irrationales Seitenverhältniss ergänzt man den Beweis, wie folgt. Man kann immer eine Länge $AM = AN$ finden, so dass

$$m . AM < AB < (m + 1)AM \quad \text{und} \quad n . AN < BC < (n + 1)AN,$$

wo m und n beliebig grosse Zahlen bedeuten. Dann sind n Paare (AB, LN) noch nicht aequivalent (AB, CD), während $(n + 1)$ solcher Paare überwiegen, d. h. es müsste zu $n . (AB, LN)$ noch ein gewisses Paar hinzutreten oder von $(n + 1)(AB, LN)$ ein gewisses Paar hinweggenommen werden, um ein mit (AB, CD) aequivalentes Paar zu erzeugen. Daher ist:

$$n < \frac{(AB, CD)}{(AB, LN)} < n + 1$$

und da

$$m . (AM, ON) < (AB, LM) < (m + 1)(AM, ON),$$

also

$$m < \frac{(AB, CD)}{(AM, ON)} < m + 1,$$

so ist

$$mn < \frac{(AB, CD)}{(AM, ON)} < (m + 1)(n + 1)$$

und

$$1 < \frac{(AB, CD)}{mn(AM, ON)} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich

$$1 < \frac{(BC, DA)}{nm(MO, NA)} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Diese Ungleichheiten bestehen für alle m und n, wie gross diese Zahlen auch genommen werden mögen. Mithin liegen die Verhältnisse von (AB, CD) und (BO, DA) zu $mn(AM, ON)$ oder $nm(MO, NA)$ zwischen denselben Grenzen, deren Differenz auf jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabgedrückt werden kann. Daher sind diese beiden Verhältnisse gleich und da ihre Nenner übereinstimmen, auch die Zähler gleich; woraus die Aequivalenz von (AB, CD) und (BC, DA) folgt.

Man erweitert den Satz leicht zu dem etwas allgemeineren:

IV. Zwei Streckenpaare gleichen Sinnes, deren Streifen sich in irgend einem Parallelogramm durchkreuzen, und deren Seitenlängen den Seiten des Parallelogramms proportional sind, sind einander aequivalent.

V. Zwei Streckenpaare von gleichem Momente und gleichem Sinne, in derselben oder in parallelen Ebenen liegend, sind aequivalent.

Denn verlegt man die beiden Paare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (Fig. 11), deren Arme p, q seien und zwischen deren Momenten die Gleichung $Pp = Qq$ besteht, in eine Ebene, so dass sich ihre Streifen in einem Parallelogramm $ABCD$ durchkreuzen, so tritt zu der ebengenannten Gleichung noch die folgende hinzu: $AB.p = BC.q$, weil die Arme der Paare zugleich die Höhen des Parallelogramms sind. Aus beiden Gleichungen folgt aber

$$P : Q = AB : BC,$$

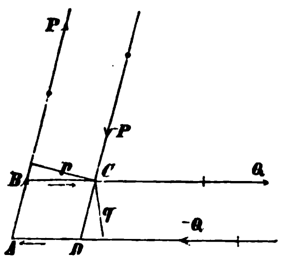

Fig. 11.

d. h. die Seitenlängen der Paare sind den Seiten des Parallelogramms proportional. Mit Berücksichtigung des gleichen Sinnes sind die Paare nach IV. aequivalent.

Nach diesem Satze ist nur das Moment und der Sinn eines Paares das Wesentliche desselben, nicht aber die Grösse der Seitenstrecken und nicht der Arm für sich. Man kann diese beiden Elemente ändern, ohne dass das Paar aufhört, sich aequivalent zu bleiben, so lange nur der Sinn und das Moment, welches durch den Inhalt des Parallelogramms über den Seitenstrecken dargestellt wird, dieselben bleiben.

Mit Hülfe unseres Satzes können zwei Paare von verschiedenen Armen und Seitenstrecken zu einem einzigen, ihnen zusammen aequivalenten vereinigt werden. Denn sind die beiden Paare von gleichem Sinne, so construire man ein Parallelogramm gleich der Summe der beiden Parallelogramme, welche die Momente der gegebenen Paare darstellen. Zwei Gegenseiten dieses Parallelogrammes bilden ein Paar, welches das verlangte ist, sobald sein Sinn mit dem Sinne der beiden gegebenen übereinstimmend genommen wird. Haben aber die beiden Paare entgegengesetzten Sinn, so liefert ein Parallelogramm gleich der Differenz der Momente durch zwei seiner Gegenseiten ein Paar, aequivalent den beiden gegebenen zusammen, wenn sein Sinn mit dem Sinne des Paares vom grösseren Momente übereinstimmend genommen wird.

Die bisher entwickelten Sätze über die Veränderung der Form und Lage, welche Paare erleiden können, ohne aufzuhören, sich aequivalent zu bleiben, lassen sich zu dem allgemeinen Satze vereinigen.

VI. Ein Streckenpaare ist jedem andern Streckenpaare aequivalent, welches mit ihm in derselben oder in einer mit seiner Ebene parallelen Ebene liegt und mit ihm gleiches Moment und gleichen Sinn besitzt.

Indem man auf der Axe des Paares das Axenmoment als Strecke nach Grösse und Sinn aufträgt, kann man diesem Satze auch die Fassung geben:

Das Axenmoment kann ohne Aenderung der Bedeutung des Paares parallel mit sich im Raume beliebig verlegt werden, wenn nur sein Sinn nicht umgekehrt wird.

In dieser Form liefert der Satz eine leichte Methode für die Auffindung eines Paares, welches einem Aggregate von Paaren, in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen gelegen, aequivalent ist. Alle solche Paare haben nämlich parallele Axenmomente, theils gleichen, theils entgegengesetzten Sinnes. Indem man alle diese Axenmomente auf einer ihrer gemeinsamen Richtung parallelen Geraden vereinigt und den Gegensatz des Sinnes durch ihr Vorzeichen berücksichtigt, erhält man das allen zusammen aequivalente Axenmoment als die algebraische Summe der einzelnen Axenmomente und damit auch das allen Paaren zusammen aequivalente Paar. Wir sprechen dies Resultat in einem besonderen Satze aus:

VII. Paare von parallelen Axen sind zusammen einem Paare derselben Axenrichtung aequivalent; das Moment desselben ist die algebraische Summe sämmtlicher Momente der einzelnen Paare, indem als positiv die Momente des einen, als negativ die des andern Sinnes angesehen werden. Das Vorzeichen der algebraischen Summe bestimmt den Sinn des ihnen aequivalenten Paares.

Verschwindet die algebraische Summe der Axenmomente, so ist das allen Paaren zusammen aequivalente Paar Null und sind alle Paare zusammen aequivalent Null.

§. 3. Für die Aequivalenz von Paaren mit nicht parallelen Axen oder also für Paare in verschiedenen sich schneidenden Ebenen führen wir folgende Sätze an:

VIII. Zwei Paare von nicht parallelen Axen sind zusammen einem Paare aequivalent, dessen Ebene der Schnittlinie der Ebenen jener parallel ist und dessen Axenmoment nach Grösse, Richtung und Sinn durch diejenige Diagonale eines Parallelogramms angegeben wird, welches über den Axenmomenten der gegebenen Paare als Seiten construirt werden kann, welche durch den Schnittpunkt dieser Axenmomente hindurchgeht. (Parallelogramm der Axenmomente.)

Man kann nämlich nach IV. die beiden Paare auf gemeinschaftlichen Arm gleich der Längeneinheit reduciren und sie in ihren Ebenen so verlegen, dass die Schnittlinie ihrer Ebenen die Richtung des Armes wird. Die Seitenstrecken AB, CN; AD, EN (Fig. 12) der Paare stellen alsdann die Momente derselben dar. Nun sind aber $[AB]$ und $[AD]$ zusammen ihrer Resultanten $[AF]$ und ebenso $[CN]$ und $[EN]$ ihrer Resultanten $[GN]$ aequivalent. Die Strecken $[AF]$, $[GN]$ bilden aber, wie man leicht sieht, selbst ein Paar, welches den beiden gegebenen aequivalent ist. Zieht man durch irgend einen Punkt, z. B. durch einen Punkt des Armes AN drei Gerade senkrecht zu den Ebenen der drei Paare (AB, CN), (AD, EN), (AF, GN) und trägt auf ihnen nach Grösse und Sinn die Axenmomente dieser Paare auf, welche gleich $[AB]$, $[AD]$ und $[AF]$ sind, so bilden diese drei Strecken unter einander dieselben Winkel, wie die Seitenstrecken $[AB]$, $[AD]$, $[AF]$ und sind, wie diese, die Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms, congruent dem Parallelogramm AF. Daher ist das Axenmoment $[AF]$, welches einem Paare entspricht, das aequivalent den beiden gegebenen Paaren ist, die Diagonale eines Parallelogramms über den Axenmomenten dieser als Seiten.

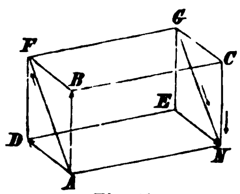

Fig. 12.

Man erweitert den Satz leicht zu einem Satze über das Parallelepiped und Polygon der Axenmomente und erkennt, dass die Methode der geometrischen Addition auch auf Paare anwendbar ist, sobald sie durch Strecken, nämlich durch ihre Axenmomente dargestellt werden. Man kann daher behaupten:

IX. Ein Aggregat von Paaren irgend welcher Axenmomente ist aequivalent einem einzigen Paare, dessen Axenmoment die geometrische Summe der Axenmomente aller Paare ist.

Als specielle Fälle und Folgerungen aus VIII. und IX. heben wir hervor:

Zwei Paare sind zusammen aequivalent Null, wenn ihre Axenmomente parallel und entgegengesetzt gleich sind. Drei Paare sind zusammen aequivalent Null, wenn ihre Axenmomente einer Ebene parallel sind und aus ihnen als Seiten ein Dreieck gebildet werden kann, dessen Umfang ein beweglicher Punkt im Sinne derselben ohne umzukehren durchlaufen kann.

§. 4. Ist $[OM] = [H]$ das Axenmoment eines Paares und zieht man durch O drei zu einander rechtwinklige Axen, so kann $[H]$ nach IX. in drei Axenmomente $OX = H_x$, $OY = H_y$, $OZ = H_z$ von den Richtungen dieser Axen und damit das Paar in drei Paare zerlegt werden, deren Ebenen den Ebenen YOZ, ZOX, XOY parallel sind. Sind λ, μ, ν die Richtungswinkel von $[H]$ gegen die Axen, so ist

$$H_x = H \,.\, \cos\lambda, \quad H_y = H \,.\, \cos\mu, \quad H_z = H \,.\, \cos\nu\,.$$

Umgekehrt erhält man aus drei zu einander rechtwinkligen Axenmomenten H_x, H_y, H_z dreier Paare das Axenmoment H des ihnen zusammen aequivalenten Paares, nämlich

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$$

und für dessen Richtungscosinusse die Proportionalitäten:

$$\frac{\cos\lambda}{H_x} = \frac{\cos\mu}{H_y} = \frac{\cos\nu}{H_z} = \frac{1}{H}.$$

Sind $[H]$, $[H']$, $[H'']$, . . . die Axenmomente von Paaren, so ist das Axenmoment $[G]$ des ihnen zusammen aequivalenten Paares die geometrische Summe derselben, nämlich

$$[G] = [H] + [H'] + [H''] + \cdots$$

Um dieselbe analytisch zu bestimmen, suchen wir, analog Cap. I, §. 9., ihre Projectionen L, M, N auf drei rechtwinklige Axen. Die Projectionen sind die Summen der Projectionen der Strecken $[H]$ auf die Axen und wenn wir dieselben mit H_x, H'_x, H''_x, . . .; H_y, H'_y, H''_y . . .; H_z, H'_z, H''_z, . . . bezeichnen, so wird

$$\begin{aligned} L &= H_x + H'_x + H''_x + \cdots = \Sigma H_x, \\ M &= H_y + H'_y + H''_y + \cdots = \Sigma H_y, \\ N &= H_z + H'_z + H''_z + \cdots = \Sigma H_z. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Richtungswinkel von G gegen die Axen mit λ, μ, ν, so ist weiter:

$$\frac{\cos\lambda}{L} = \frac{\cos\mu}{M} = \frac{\cos\nu}{N} = \frac{1}{G},$$

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Die letztere Gleichung bestimmt die Länge der geometrischen Summe $[G]$; die ihr vorhergehende Proportion, in welcher G als absoluter Werth aufzufassen ist, während L, M, N Strecken von bestimmten Zeichen bedeuten, gibt Richtung und Sinn von $[G]$.

Da G^2 die Quadratsumme von L, M, N ist, so kann G nur dann verschwinden, wenn gleichzeitig $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, oder

$$\Sigma H_x = 0, \quad \Sigma H_y = 0, \quad \Sigma H_z = 0$$

ist. Diese Bedingungen drücken aus, dass das Polygon der Axenmomente sich schliesst.

Wenn das Axenmoment P_p eines Paares verschwindet, so kann dies dadurch erfolgen, dass der Arm des Paares oder dadurch, dass die Seitenlänge desselben verschwindet. Im ersten Falle tilgen sich die zwei Seitenlängen als zwei entgegengesetzte gleiche Strecken auf derselben Richtungslinie, im zweiten Falle ist überhaupt nichts an Strecken vorhanden, was in Frage kommen könnte.

§. 5. Ein Paar und eine endliche Strecke können einander nicht aequivalent sein. Denn ist zunächst die Strecke der Ebene des Paares parallel, so kann man sie durch eine ihr parallele und entgegengesetzt gleiche in bestimmtem Abstande in der durch sie mit der Ebene des Paares parallelen Ebene je nach dem Sinn des Paares diesseits oder jenseits anzunehmende andere Strecke zu einem Paare ergänzen, welches dem gegebenen Paare aequivalent ist. Mithin kann die Strecke dem Paare nicht allein aequivalent sein, weil sonst die zugefügte Strecke für sich aequivalent Null sein müsste. Ist aber die Strecke der Ebene des Paares nicht parallel, so kann man sie in zwei ihr aequivalente spalten, von denen eine der Ebene des Paares parallel ist und ähnlich schliessen.

III. Capitel.

Aequivalenz ebener Streckensysteme.

§. 1. Zwei Streckensysteme sollen als aequivalent gelten, so dass sie für einander substituirt werden können, wenn sie durch Verschiebung von Strecken in ihren Richtungslinien, durch Zufügen oder Tilgen entgegengesetzt gleicher Strecken in denselben Geraden, durch Ersetzen von Strecken, welche durch einen Punkt hindurchgehen, durch ihre Resultante und durch Ersetzen von Paaren durch ihnen aequivalente Paare in einander transformirt werden können. Da die Sätze über Tilgung und Zufügung von Strecken, sowie die über die Paare aus der Voraussetzung der Verschiebbarkeit einer Strecke in ihrer Richtungslinie und aus der Aequivalenz der sich in einem Punkte schneidenden Strecken mit ihrer Resultanten folgen, so kann man kürzer aequivalente Systeme als solche definiren, welche durch Verschiebungen von Strecken in ihren Richtungslinien und Resultantenbildung sich schneidender und paralleler Strecken in einander transformirbar sind. Sind zwei Streckensysteme einem dritten aequivalent, so sind sie unter sich aequivalent. Ist ein Streckensystem einer einzelnen Strecke aequivalent, so heisst diese die Resultante des Systems. Wir untersuchen im vorliegenden Capitel die Aequivalenz ebener Streckensysteme, um im folgenden Capitel die der räumlichen Streckensysteme folgen zu lassen.

§. 2. Durch einen beliebigen Punkt O (Fig. 13) in der Ebene eines ebenen Streckensystems Σ ziehen wir mit jeder Strecke P eine Parallele und fügen längs dieser dem System zwei entgegengesetzt gleiche Strecken P, $-P$ zu. Sie bringen keine Aenderung des Systems hervor, da ihre Resultante Null ist. An die Stelle der ursprünglichen Strecke P sind dadurch drei Strecken getreten, welche ihr zusammen aequivalent sind, die ihr geometrisch gleiche durch den Punkt O gehende Strecke P und die beiden das Paar $(P, -P)$ bildenden, dessen Arm p der Abstand des Punktes O von der ursprünglichen Strecke P ist. Dieses Paar wollen wir durch sein Axenmoment Pp auf der Axe desselben darstellen. Indem wir dieselbe Operation für sämmtliche Strecken des Systems ausführen, erhalten wir ein Aggregat von Strecken P, deren Richtungen sich in O schneiden und ein Aggregat von Paaren Pp von gemeinschaftlicher zur Ebene des Systems senkrechter Axenrichtung. Das erstere ist seiner Resultanten R, welche in die Ebene des Systems fällt und durch O geht, das letztere einem Paare aequivalent, dessen Axenmoment G zur Ebene des Systems senkrecht und gleich der algebraischen Summe der Axenmomente der einzelnen Paare ist. R kann nur in seiner durch O gehenden Richtungslinie μ, G aber parallel mit sich an jede Stelle des Raumes verlegt werden. Die Auffindung der beiden, dem Streckensystem zusammen aequivalenten Elemente R und G nennen wir die Reduction des Streckensystems für den Punkt O als Reductionspunkt; R und G Reductionsresultante und Reductionspaar. Die Aequivalenz des Streckensystems Σ mit R und G drücken wir durch

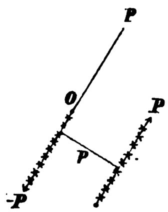

Fig. 13.

$$\Sigma \equiv (R, G)$$

aus.

Da die Wahl des Reductionspunktes willkürlich ist, so kann die Reduction des Systems auf unendlich viele Arten ausgeführt werden. Für alle Reductionen bleibt vermöge der Bildungsweise der Resultanten R durch die geometrische Summe aller P diese nach Grösse, Richtung und Sinn dieselbe. Sie bestimmt durch ihre constante Richtung einen Parallelstralenbüschel (μ). Dagegen variirt das Axenmoment G im Allgemeinen mit der Wahl des Reductionspunktes, denn es ändern sich damit die Arme p der Paare Pp. Ohne die Reduction für einen zweiten Punkt O' (Fig. 14) von Neuem auszuführen, können wir dieselbe durch Uebertragung der Reduction vom Punkte O auf O' finden. Denn da die Resultante für O' geometrisch gleich R ist, so bedarf es blos der Auffindung des Axenmomentes G' für den Punkt O'. Hiezu ziehen wir durch O' den Stral μ' des Parallelstralenbüschels der Resultanten

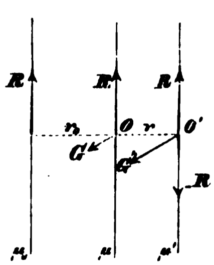

Fig. 14.

und fügen längs desselben den Reductionselementen R, G des Punktes O zwei entgegengesetzt gleiche Strecken R und $-R$ zu. Die erstere von ihnen ist die Reductionsresultante für O', die zweite aber bildet mit der Reductionsresultanten R des Punktes O ein Paar $(R, -R)$, dessen Arm der Abstand r der Stralen μ, μ' ist. Das Axenmoment Rr dieses Paares verbindet sich mit dem Reductionsmomente G des Punktes O zu dem Momente G' für den Punkt O'. Diese Verbindung ist eine Addition oder eine Subtraction, je nachdem der Stral μ' auf die eine oder auf die andere Seite von μ fällt. Der Stral μ zerlegt nämlich die Ebene des Streckensystems in zwei Felder. Für einen von der Pfeilspitze des Axenmomentes G auf die Ebene niederblickenden, nach der Pfeilspitze von R auf μ hingewandten sehenden Punkt erscheint das Paar Rr mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung harmonirend, oder nicht harmonirend, je nachdem der Stral μ' in das Feld zur Rechten oder zur Linken von μ hineinfällt. Im ersten Falle haben G und Rr gleichen Sinn und wird also $G' = G + Rr$, im zweiten Falle sind sie entgegengesetzt und wird $G' = G - Rr$.

Man sieht leicht, dass für alle Punkte desselben Strales μ' das Reductionspaar G' dasselbe bleibt. Daher braucht man nicht sowol von einer Reduction der Strecken für den Punkt O oder O' etc. zu reden, sondern vielmehr nur von einer Reduction für die Stralen μ, $\mu' \ldots$ des Parallelstralenbüschels der Resultanten R.

§. 3. Ist die Reductionsresultante R nicht Null, so sind die Axenmomente G aller Reductionen für die Stralen μ von einander verschieden. Unter allen diesen ist eine Reduction besonders ausgezeichnet. Von der Reduction für irgend einen Stral μ ausgehend kann man in dem soeben als das zur Linken gelegene bezeichneten Feld in einem gewissen Abstande r_0 von μ einen Stral μ_0 des Parallelbüschels (μ) finden, für welchen das Reductionspaar $G_0 = G - Rr_0$ verschwindet. Es ist hiefür $r_0 = \frac{G}{R} \cdot$ Für diesen Stral bleibt also die Resultante R alleiniges Reductionselement und ist das Streckensystem diesem R längs μ_0 aequivalent. Der Stral μ_0 heisst die Centralaxe des Streckensystems. Von der Centralaxe ausgehend, gelangt man zu den Reductionen für sämmtliche Stralen μ, wie folgt. Die Centralaxe zerlegt die Ebene des Systems in zwei Felder; für das eine derselben wird das Axenmoment Rr übereinstimmend mit dem Uhrzeigersinn, für das andere ihm entgegengesetzt. Auf der Axe aufgetragen, fällt es also im einen Falle diesseits, im andern jenseits der Ebene des Systems. Die Reductionen $(R, G = Rr)$ für zwei Stralen μ auf entgegengesetzten Seiten in gleichem Abstand r von μ_0 unterscheiden sich blos durch den verschiedenen Sinn der Reductionspaare. Mit wachsendem r nimmt G proportional r zu. Für die Centralaxe allein wird $G = 0$.

Ist $R = 0$, so reducirt sich das System auf ein Paar, dessen Axenmoment G für alle Reductionen dasselbe ist, wie mit der Verlegbarkeit desselben harmonirt.

Aendert sich das Streckensystem so, dass die Reductionsresultante sich der Null nähert, während dies mit dem Axenmomente G nicht der Fall ist, so rückt die Centralaxe μ_0 ins Unendliche. Denn ihr Abstand $r_0 = G : R$ wird unendlich. Man sieht hieraus, dass das Paar G, welchem das System aequivalent ist, eine verschwindende Resultante längs der unendlichfernen Centralaxe vertritt.

Sind R und G für irgend eine Reduction beide Null, so sind sie es für alle Reductionen. Das Streckensystem ist dann aequivalent Null. Umgekehrt kann das Streckensystem sich nur dadurch auf Null reduciren, dass für alle Reductionen R und G einzeln verschwinden, da ein Paar und eine Strecke sich nicht tilgen können.

Wir fassen unsere Betrachtungen in die Sätze zusammen:

Ein ebenes Streckensystem ist auf unzählige Arten einer Resultante R in Verbindung mit einem Paare G aequivalent. Für alle diese Aequivalenzen bleibt R geometrisch dasselbe, während G mit der Lage von R nach Grösse, Richtung und Sinn sich ändert. Ist R nicht Null, so ist das System einer Einzelresultante R ohne Paar aequivalent längs der Centralaxe des Systems. Ist $R = 0$, so ist das System einem Paare aequivalent. Sind R und G für irgend eine Reduction zugleich Null, so sind sie es für alle Reductionen, das System ist dann aequivalent Null.

§. 4. Ob ein ebenes Streckensystem einer Einzelstrecke oder einem Paare oder der Null aequivalent ist, kann nach den vorigen §§. mit Hülfe irgend einer Reduction (R, G) entschieden werden. Ohne jedoch R zu bilden und damit von vornherein die Richtung des Parallelstralenbüschels (μ) zu bestimmen, genügt die Bestimmung des Axenmomentes G für drei nicht in gerader Richtung liegende Reductionspunkte um dieselbe Entscheidung zu geben.

Das Moment G des Reductionspaares für irgend einen Punkt O ist die Summe der Momente aller Paare Pp. Wir wollen dasselbe kurz das Moment des Systems für den Punkt O nennen und können ohne an die Paare zu denken die Summe der Producte der Strecken P des Systems und der Perpendikel p darunter verstehen, welche man von O auf ihre Richtungslinien fällen kann. Diese Producte sind dabei mit dem positiven oder negativen Zeichen zu nehmen, je nachdem die Stellung der Pfeilspitzen der Strecken P in Bezug auf O mit dem Uhrzeigersinn harmonirt oder disharmonirt.

Wir stellen die beiden Sätze auf:

Im Falle, dass das ebene Streckensystem aequivalent Null ist, ist für jeden Punkt O in der Ebene desselben das Moment Null.

Zwei einander aequivalente ebene in derselben Ebene liegende Streckensysteme haben für jeden Punkt der Ebene gleiches Moment nach Grösse und Sinn.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden; die zweite ergibt sich, wenn man beide Systeme für denselben Punkt O auf (R, G) und (R', G') reducirt. Denn da zwischen einer Einzelstrecke und einem Paare Aequivalenz nicht bestehen kann, so muss R aequivalent R' und G aequivalent G' sein.

Hieraus folgt sofort insbesondere:

Ist ein ebenes Streckensystem einer Einzelstrecke oder einem Paare aequivalent, so ist sein Moment für jeden Punkt der Ebene gleich dem Momente dieser oder dem Momente jenes.

Das Moment einer Strecke ist constant für alle Punkte einer mit der Strecke parallelen Geraden; es hat für Punkte in gleichen Abständen diesseits und jenseits von der Richtungslinie der Strecke entgegengesetzt gleiche Werthe und verschwindet für alle Punkte der Richtungslinie. Hieraus folgt, dass eine Strecke für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte niemals gleiches Moment besitzen kann. — Da die Seitenlängen eines Paares entgegengesetzten Sinn haben, so liefern sie für jeden Punkt der Ebene Momente entgegengesetzten Zeichens und folgt leicht, dass die Summe dieser Momente oder das Moment des Paares gleich dem Momente des Paares im früheren Sinne, nämlich gleich dem Product aus der Seitenstrecke und dem Arme und also für alle Punkte der Ebene constant sei.

Man kann weiter behaupten:

Ist das Moment eines ebenen Streckensystems für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte Null, so ist das System aequivalent Null. Denn einer Einzelstrecke kann es nicht aequivalent sein, da diese für die drei Punkte nicht dasselbe Moment haben kann; einem Paare nicht, weil dessen Moment nicht Null sein kann. Es ist aber in §. 2 gezeigt worden, dass jedes ebene Streckensystem entweder einer Einzelstrecke oder einem Paare oder der Null aequivalent ist.

Ist das Moment des Systems für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nicht Null, aber von demselben Werthe, so ist das System einem Paare aequivalent. Denn einer Einzelstrecke kann es nicht aequivalent sein, weil diese für die drei Punkte nicht gleiches Moment besitzen kann, der Null kann es nicht aequivalent sein, weil in diesem Falle das Moment für alle Punkte der Ebene verschwinden müsste.

Ist das Moment des Systems für drei nicht in gerader Linie liegende Punkte weder Null noch sonst von demselben Werthe, so ist das System einer Einzelstrecke aequivalent. Beweis ähnlich, wie vorher.

§. 5. Wir wollen jetzt die analytischen Ausdrücke für die Reductionsresultante R und das Moment G des Reductionspaares bilden. Die Frage nach der ersten wurde bereits Cap. I, §. 9. erledigt. In Bezug auf irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem (Fig. 15) seien x, y die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes auf der Richtungslinie einer der Strecken P des Systems. An ihm als Anfangspunkt von P zerlegen wir diese Strecke in die Componenten X, Y parallel den Coordinatenaxen. Indem wir am Coordinatenursprung X und $-X$, Y und $-Y$ zufügen, erhalten wir auf der x- und y-Axe die Summen

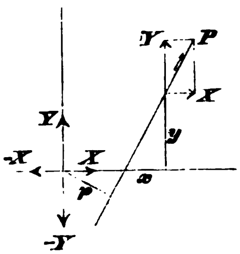

Fig. 15.

$$A = \Sigma X, \quad B = \Sigma Y,$$

aus welchen die Reductionsresultante R und ihre Neigung a gegen die x-Axe mit Hülfe der Gleichungen

$$R^2 = A^2 + B^2, \quad \operatorname{tg} a = \frac{B}{A}$$

hervorgeht.

Nach §. 4. ist das Moment Pp der Strecke P für den Coordinatenursprung gleich der Summe der Momente von X und Y. Diese sind nach Grösse und Zeichen xY und $-yX$, wie man sieht, wenn man bedenkt, dass jedes derselben den Sinn wechselt, sobald einer der Factoren, die Coordinate x, y oder die Componente Y, X das Zeichen wechselt, während es den Sinn behält, wenn beide Factoren das Zeichen wechseln. Man kann daher als Normalfall den Fall betrachten, bei welchem x, y, X, Y sämmtlich den Sinn der positiven Coordinatenaxen besitzen; die vom Zeichenwechsel dieser Elemente herrührenden Zeichenwechsel der Momente vollziehen sich dann von selbst. Man sieht, xY und yX sind die Momente der Paare $(X, -X)$, $(Y, -Y)$, welche durch die am Ursprung zugefügten Strecken $-X$, $-Y$ entstehen.

Wir erhalten also

$$Pp = xY - yX = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

und folglich wird das Moment des Systems für den Coordinatenursprung, welches wir mit N bezeichnen wollen:

$$N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = \Sigma (xY - yX).$$

Für einen anderen Punkt (x_1, y_1) als Ursprung sind in Bezug auf ein dem bisheriges parallelen Hilfscoordinatensystem die Coordinaten des Anfangspunktes der Strecke P, an welchem diese zerlegt wird,

$$\xi = x - x_1, \quad \eta = y - y_1$$

und daher wird für ihn das Moment G des Systems

$$G = \Sigma \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ X & Y \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ X & Y \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \Sigma X & \Sigma Y \end{vmatrix}$$

oder weil $\Sigma X = A$, $\Sigma Y = B$, $\Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = N$ gesetzt wurde,

$$G = N - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix} = N - Bx_1 + Ay_1 .$$

Dieser Ausdruck des Momentes G genügt, um alle Fragen über das System analytisch zu beantworten, nämlich:

1. Das System ist aequivalent Null, wenn G für alle Punkte der Ebene verschwindet. Das Moment muss daher unabhängig von den Coordinaten x_1, y_1 des gewählten Punktes verschwinden. Dies liefert die drei Bedingungen:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad N = 0$$

d. h.

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = 0 .$$

Es müssen also die Summen ΣX, ΣY der Projectionen aller Strecken auf die Richtungen der Axen und das Moment N für den Ursprung Null sein.

2. Das System ist einem Paare aequivalent, wenn das Moment für alle Punkte der Ebene constant, also unabhängig von x_1, y_1 ist. Dies gibt die beiden Bedingungen: $A = 0$, $B = 0$ und der constante Werth des Momentes ist $G = N$.

Es müssen also die Projectionssummen ΣX, ΣY der Strecken auf die Axen verschwinden.

3. Soll das System einer Einzelstrecke, der Resultanten R längs der Centralaxe, aequivalent sein, so muss es aequivalent Null werden, wenn man ihm die Strecke $-R$ längs der Centralaxe in irgend einem Punkte $(x_1\ y_1)$ derselben zufügt. Denkt man sich dies ausgeführt, so treten zu den Grössen A, B, N unter Nr. 1. noch die Componenten von $-R$ und das Moment von $-R$ hinzu. Sind nun X_1, Y_1 die Componenten der Einzelstrecke R, welche dem System aequivalent werden soll, so sind die von $-R$ gleich $-X_1$, $-Y_1$ und ist das Moment von $-R$ gleich $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -X_1, & -Y_1 \end{vmatrix}$.

Daher werden die Bedingungsgleichungen unseres Falles:

$$A - X_1 = 0, \quad B - Y_1 = 0 \quad N - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} = 0$$

worin x_1, y_1 Coordinaten eines beliebigen Punktes der Centralaxe sind. Es ist daher

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B \quad \text{und} \quad Bx_1 - Ay_1 = N.$$

Letztere Gleichung ist, da sie für alle Punkte der Centralaxe gilt, die Gleichung dieser Axe. Aus den beiden ersteren folgt noch für R, wenn wir dessen Grösse und die Richtung a der Centralaxe nicht schon wüssten

$$R^2 = X_1^2 + Y_1^2 = A^2 + B^2, \quad \operatorname{tg} a = \frac{B}{A}.$$

Der Abstand der Centralaxe vom Ursprung ist

$$\delta = \frac{N}{R}.$$

§. 6. Für ein System von Parallelstrecken P seien a, b die Cosinusse der Neigungswinkel der Strecken gegen die Axen der x, y, wobei der Sinn der Parallelstrecken durch das Vorzeichen $\pm$ der P ausgedrückt werden möge. Dann sind

$$X = aP, \; Y = bP, \; A = a\,\Sigma P, \; B = b\Sigma P, \; R = \Sigma P,$$

$$N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ aP, & bP \end{vmatrix} = \Sigma P \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = \Sigma P\,(bx - ay) = b\Sigma Px - a\Sigma Py.$$

Ist R nicht Null, so wird die Gleichung der Centralaxe

$$(bx_1 - ay_1)\,\Sigma P = b\Sigma Px - a\Sigma Py$$

oder in etwas anderer Form

$$(x_1\,\Sigma P - \Sigma Px)\,b - (y_1\,\Sigma P - \Sigma Py)\,a = 0.$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichung der Centralaxe unabhängig von der Richtung (a, b) der Parallelstrecken erfüllt wird durch die Coordinaten des Punktes

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \; y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}.$$

Ist daher ein Parallelstreckensystem einer Einzelstrecke R aequivalent und dreht man alle Parallelstrecken um denselben Winkel um ihre Anfangspunkte (x, y) um, so bleibt es einer Parallelstrecke derselben Grösse R aequivalent und geht ihre Richtungslinie immer durch ein und denselben Punkt der Ebene hindurch. Die Punkte (x, y) sind beliebig wählbar auf den Strecken, sie sind aber während der Drehung als feste Punkte anzusehen.

Ist $R = 0$, so ist das System dem Paare $N = b\Sigma Px - a\Sigma Py$ aequivalent.

Haben die Parallelstrecken alle denselben Sinn, so kann R nicht verschwinden und ist das System also stets einer Einzelstrecke aequivalent.

Wählt man der Einfachheit wegen die Richtung der Strecken zur y-Axe, positiv im positiven Sinn der Strecken, so wird

$$a = 0,\ b = 1,\ X = 0,\ Y = P,\ R = \Sigma P,\ N = \Sigma Px$$

und die Gleichung der Centralaxe $x_1 \Sigma P = \Sigma Px$, u. s. w.

§. 7. Die Anwendung schiefwinkliger Coordinaten an Stelle der rechtwinkligen erschwert die analytische Behandlung der Reduction des ebenen Streckensystems nicht wesentlich. Ist α der Coordinatenwinkel, so wird, wie man leicht sieht, das Axenmoment G für den Punkt (x, y):

$$G = (N - Bx_1 + Ay_1) \sin \alpha,$$

worin aber A und B oder ΣX, ΣY Summen schiefer Projectionen bedeuten. Die Grössen a, b bedeuten für die Parallelstralen nicht mehr Cosinusse, sondern allgemeine Proportionalitätsfactoren.

§. 8. Es ist von Wichtigkeit, rein geometrische Methoden für die Bildung des Momentes eines ebenen Streckensystems für einen Punkt seiner Ebene zu kennen, wie sie Möbius in seinem Lehrbuche der Statik, Th. I, S. 63 und flgde. gegeben hat.

Das Moment einer Strecke AB (Fig. 16) in Bezug auf einen Punkt M ist das Moment des Paares zu welchem man AB ergänzen kann, indem man durch M eine ihr entgegengesetzt gleiche Strecke zieht. Der Werth desselben ist der doppelte Inhalt des Dreiecks MAB, genommen mit dem Vorzeichen, welches der Sinn des Paares bestimmt. Man kann denselben prüfen, indem man einen Stral des Punktes M die Fläche des Dreiecks überstreichen lässt, so dass sein Schnittpunkt mit der Strecke AB im Sinne dieser sich bewegt. Indem man dem Dreiecke MAB auf diese Weise einen bestimmten durch die Folge der Ecken bezeichneten Sinn ertheilt, sieht man zugleich, dass ABM, BMA Momente aequivalenter Paare darstellen, und dass also das Moment von AB in Bezug auf M gleich ist dem Momente von BM in Bezug auf A und dem Momente von MA in Bezug auf B, während MBA, BAM, AMB Momente entgegengesetzt gleicher Paare bezeichnen.

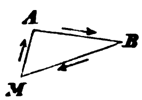

Fig. 16.

Mit Rücksicht auf den Sinn der Dreiecke besteht nun in der Ebene als Analogon zu der linearen Relation $AB + BC + CA = 0$ zwischen drei Punkten einer Geraden der Satz:

$$MAB + MBC + MCA = ABC,$$

d. h. **für irgend vier Punkte A, B, C, M einer Ebene ist die Summe der Dreiecke, welche einer dieser Punkte M mit den Verbindungslinien AB, BC, CA der drei übrigen bildet, constant,** wo auch immer M in der Ebene liegen mag und zwar gleich dem Inhalte des Dreiecks ABC. Dieser Satz leuchtet sofort ein, wenn M im Innenraume, in einer Ecke oder auf einer Seite des Dreiecks ABC liegt (Fig. 17). Liegt M in einem Scheitelraume, z. B. in dem des Winkels A, so ist $MBC = MBA + MAC + ABC$, folglich $MAB + MBC + MCA = ABC$. Für einen Punkt M in einem der drei stumpfen Räume, z. B. in dem an BC stossenden, ist

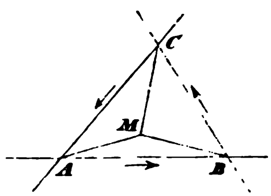

Fig 17.

$$ABC + MCB = MCA + MAB,$$

also auch hier

$$MAB + MBC + MCA = ABC.$$

Man dehnt den Satz leicht auf ein beliebiges geschlossenes Polygon $ABCD \dots STA$ (Fig. 18) aus, indem man von irgend einer Ecke desselben, z. B. von A aus die Diagonalen AC, $AD, \dots AS$ zieht, für den beliebigen Punkt M der Ebene in Bezug auf die Dreiecke ABC, ACD, $\dots AST$ die Dreiecksrelation aufstellt und sämmtliche so zu gewinnenden Gleichungen addirt. Jedes Dreieck, welches der Punkt M mit einer Diagonale bildet, kommt in dieser Summe doppelt und zwar mit entgegengesetztem Zeichen vor, z. B. MAC und MCA und fällt mithin weg. Es bleibt demnach

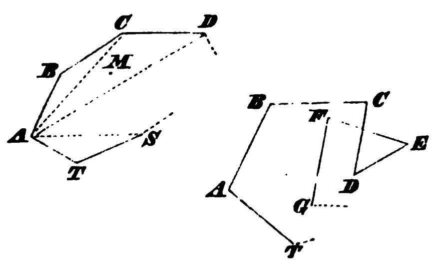

Fig. 18.

$$\begin{aligned} & MAB + MBC + MCD + \cdots + MST + MTA \\ & = ABC + ACD + ADE + \cdots + AST, \end{aligned}$$

d. h. für jedes ebene geschlossene Polygon $ABC \dots STA$, dessen Seiten im Sinne der Eckenfolge genommen sind, d. h. so wie ein beweglicher Punkt sie durchläuft, wenn er ohne umzukehren das Polygon beschreibt, ist die Summe der Dreiecke, welche ein Punkt M der Ebene mit den Seiten bildet, eine Constante für alle Lagen des Punktes in der Ebene.

Diese Constante wird z. B. durch die Summe der Dreiecke dargestellt, welche eine Ecke A mit Hülfe der von ihr aus gezogenen Diagonalen mit den Seiten BC, CD, $\dots$ TA bildet. Man pflegt diese Summe in allen Fällen, mag das Polygon $ABC \dots TA$ ein gewöhnliches oder ein überschlagenes sein, den Inhalt desselben zu nennen. Von der Bildung des Flächenraumes erhält man eine deutliche Vorstellung, wenn man einen Radiusvector von A oder auch von M ausgehend über die Ebene hingleiten lässt, so dass sein Endpunkt den Umfang des Polygons in demselben Sinne ohne umzukehren durchläuft. Alle Flächenbestandtheile, welche der Radiusvector dabei in demselben oder im entgegengesetzten Sinne beschreibt, haben für die Bildung des Inhaltes additive oder substractive Bedeutung.

§. 9. Es sei nun (Fig. 19) $A_1\,B_2$, $B_1\,C_2$, $C_1\,D_2$, ... $S_1\,T_2$ ein beliebiges ebenes Streckensystem und

$$\Sigma = MA_1B_2 + MB_1C_2 + MC_1D_2 + \cdots + MS_1T_2$$

das halbe Moment desselben in Bezug auf irgend einen Punkt M der Ebene oder also die Summe der Dreiecke, welche M mit den Strecken des Systems bildet. Von irgend einem Punkte A in der Ebene der Figur aus construiren wir das Polygon $ABCD \ldots ST$, dessen Seiten $AB, BC, \ldots ST$ den Strecken A_1B_2, B_1C_2, $C_1D_2, \ldots S_1T_2$ geometrisch gleich sind und dessen Schlusslinie AT die geometrische Summe aller Strecken des Systems darstellt. Die Strecken A_1B_2 und BA bilden ein Paar und $MA_1B_2 + MBA$ ist gleich dem halben Momente AA_1B_2 dieses Paares. Indem wir alle Paare dieser Art mit den Strecken des Systems und den im entgegengesetzten Sinne genommenen Seiten von $ABCD \,.\,.\, ST$ bilden, erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

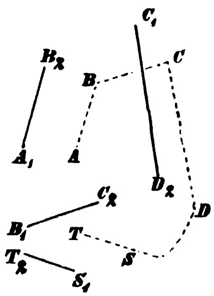

Fig. 19.

$$\begin{aligned}
MA_1B_2 + MBA &= AA_1B_2,\\
MB_1C_2 + MCB &= BB_1C_2,\\
MC_1D_2 + MDC &= CC_1D_2,\\
\cdot \qquad \cdot \quad &\qquad \cdot\\
\cdot \qquad \cdot \quad &\qquad \cdot\\
\cdot \qquad \cdot \quad &\qquad \cdot\\
MS_1T_2 + MTS &= SS_1T_2.
\end{aligned}$$

Addirt man dieselben, so gibt die erste Verticalreihe zur Linken das halbe Moment Σ, die zweite liefert

$$MBA + MCB + MDC + \cdots MTS =$$
$$-(MAB + MBC + MCD + \cdots + MST + MTA) + MTA,$$

wo das Dreieck MTA addirt und subtrahirt ist, welches der Punkt M mit der Linie TA bilden würde, die den Schluss des Polygons $ABC\ldots$ bildet. Setzen wir den Ausdruck in der Klammer, welcher den Inhalt des geschlossenen Polygons $ABC\ldots STA$ darstellt, gleich Π, so ist der Werth der zweiten Verticalreihe links $-\Pi + MTA$. Die Dreieckssumme, welche die Addition der Glieder zur Rechten liefert, wollen wir mit Δ bezeichnen. Mit Hülfe dieser beiden Bezeichnungen

$$MAB + MBC + MCD + \cdots + MST + MTA = \Pi,$$
$$AA_1B_2 + BB_1C_2 + CC_1D_2 + \cdots + SS_1T_2 = \varDelta$$

erhalten wir daher die Relation:

$$\Sigma = \Pi + \varDelta - MTA.$$

In Bezug auf dieselbe sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Das Polygon $ABC\ldots ST$ schliesst sich, d. h. die geometrische Summe der Strecken $A_1B_2, B_1C_2, \ldots S_1T_2$ ist Null. Da hier T mit A zusammenfällt, so ist $MTA = 0$, also

$$\Sigma = \Pi + \varDelta,$$

mithin constant für alle Lagen des Punktes M.

2. Das Polygon $ABC\ldots ST$ schliesst sich nicht; in diesem Falle füge man dem Streckensystem eine zu TA parallele Strecke T_1A_2 hinzu, deren Lage gegen TA wir noch näher bestimmen wollen. Wie sie auch liegen möge, es ist stets für sie

$$MT_1A_2 + MAT = TT_1A_2$$

und wenn man hieraus

$$MAT = -MTA = TT_1A_2 - MT_1A_2 = TT_1A_2 + MA_2T_1$$

entnimmt und in die Gleichung für Σ einsetzt, so wird

$$\Sigma = (\Pi + \varDelta + TT_1A_2) + MA_2T_1.$$

Nun wähle man T_1A_2 je nach dem Vorzeichen der Summe $\Pi + \varDelta$ diesseits oder jenseits von TA in einem solchen Abstande von dieser Strecke so, dass $\Pi + \varDelta + TT_1A_2 = 0$ wird, was immer möglich ist; man erhält dann

$$\Sigma = MA_2T_1.$$

In diesem Falle gibt es also eine Strecke A_2T_1, deren Moment in Bezug auf M dem Momente des Streckensystems in Bezug auf denselben Punkt gleich wird. Das Moment des Streckensystems ist in diesem Falle mit der Lage des Punktes M in der Ebene veränderlich; es verschwindet, wenn M in die Strecke A_2T_1 eintritt und wechselt den Sinn beim Durchgange von M durch dieselbe.

Aus diesen Betrachtungen folgt also:

Das Moment 2Σ eines ebenen Streckensystems

$$A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2, \ldots S_1T_2$$

für einen Punkt M seiner Ebene ist entweder constant für alle Lagen dieses Punktes oder mit dessen Lage veränderlich. Im ersten Falle ist die geometrische Summe aller Strecken des Systems Null und also das Polygon $ABC\ldots ST$, welches man von irgend einem Punkte A ausgehend mit Strecken, welche den einzelnen Strecken des Systems geometrisch gleich sind, bei beliebiger Anordnung derselben, construirt, geschlossen. Das Moment 2Σ ist in diesem Falle gleich der Summe aus dem doppelten Inhalte 2Π dieses Polygons und der doppelten Summe 2Δ aller Dreiecke, welche die Ecken $A, B, C \ldots S, T$ des Polygons mit den Strecken $A_1 B_2, B_1 C_2, \ldots S_1 T_2$ bilden. Das Streckensystem ist einem Paare vom Momente $2(\Pi + \Delta)$ aequivalent. Im zweiten Falle ist die geometrische Summe der Strecken nicht Null und das Polygon $ABC \ldots ST$ also offen. In diesem Falle kann eine Strecke $A_2 T_1$ geometrisch gleich der geometrischen Summe AT der Strecken (der Schlusslinie von $ABC \ldots ST$) gefunden werden, deren Moment in Bezug auf jeden Punkt M gleich dem Momente 2Σ des Systems ist. Sie hat von AT diesseits oder jenseits derselben einen solchen Abstand, dass $\angle TA_2 T_1 = \Pi + \Delta$ wird, ist für sich allein dem Streckensystem aequivalent und fällt mithin in die Centralaxe desselben. Für alle Lagen von M auf ihr ist das Moment des Systems Null und wechselt dasselbe das Zeichen beim Durchgang durch sie.

Als Corollarien fügen wir hinzu:

Bilden die Strecken des Systems die Seiten eines geschlossenen Polygons, so dass ein beweglicher Punkt den Umfang desselben ohne umzukehren durchlaufen kann, indem er dabei dem Sinne jeder Strecke folgt, so ist das System einem Paare aequivalent und sein constantes Moment der doppelte Inhalt des Polygons.

Das Streckensystem ist aequivalent Null, wenn das Polygon $ABC \ldots ST$ sich schliesst und die Summe $\Pi + \Delta$ gleich Null ist.

§. 10. Wir wollen schliesslich noch die Lage der Centralaxe und die dem System aequivalente Einzelstrecke $A_2 T_1$ längs derselben bestimmen, wenn das Moment des Systems für irgend drei nicht in gerader Linie liegende Punkte bekannt ist. Es seien A, B, C diese Punkte und Σ_A, Σ_B, Σ_C die halben Momente für sie. Da diese Grössen den Momenten von $A_2 T_1$ in Bezug auf dieselben Punkte aequivalent sein müssen, so sind sie proportional den Abständen der Punkte von der Centralaxe und da sie auch dem Zeichen nach mit diesen Momenten übereinstimmen müssen, so folgt, dass wenn zwei der Grössen Σ_A, Σ_B, Σ_C gleiches Zeichen haben, die beiden Punkte, denen sie entsprechen, auf denselben, und wenn sie verschiedene Zeichen haben, dieselben auf entgegengesetzten Seiten der Centralaxe liegen müssen. Im ersten Falle trifft die Centralaxe mithin den verlängerten Abstand der Punkte, im zweiten Fall schneidet sie den Abstand derselben selbst.

Sind also d_A, d_B, d_C die Abstände der Punkte A, B, C von der Centralaxe, so besteht die Proportion

$$\frac{d_A}{\Sigma_A} = \frac{d_B}{\Sigma_B} = \frac{d_C}{\Sigma_C}\,,$$

und ist dieselbe auch in Bezug auf die Zeichen exact. Beschreibt man daher um A, B, C mit Radien, welche Σ_A, Σ_B, Σ_C proportional sind, Kreise, so muss die Centralaxe eine der vier Geraden sein, welche je drei Aehnlichkeitspunkte dieser Kreise enthalten. Sie geht durch den inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise, wenn die Momente für ihre Mittelpunkte entgegengesetztes Zeichen, durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt derselben, wenn sie gleiches Zeichen haben. Sind alle drei Momente z. B. positiv, so geht die Centralaxe durch die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte. Denkt man sich um alle Punkte der Ebene Kreise beschreiben mit Radien, proportional den Momenten des Systems in Bezug auf die Punkte, so haben alle Tripel solcher Kreise sämmtlich einen Aehnlichkeitsstral gemein, nämlich die Centralaxe des Systems.

Die Grösse von A_2T_1 folgt unmittelbar aus einer der Gleichungen

$$A_2T_1 \cdot d_A = 2\Sigma_A, \quad A_2T_1 \cdot d_B = \Sigma_B, \quad A_2T_1 = d_C \cdot 2\Sigma_C.$$

Auch das Moment $2\Sigma_M$ des Systems für einen beliebigen Punkt M der Ebene kann durch die Momente $2\Sigma_A$, $2\Sigma_B$, $2\Sigma_C$ dargestellt werden. Hiezu dient der folgende Satz von Möbius über die Momente in Bezug auf irgend vier Punkte A, B, C, M (Fig. 20) der Ebene:

$$MBC \cdot \Sigma_A + MCA \cdot \Sigma_B + MAB \cdot \Sigma_C = ABC \cdot \Sigma_M.$$

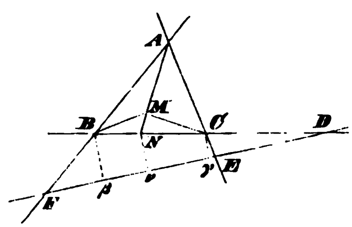

Fig. 20.

Schneidet nämlich die Linie MA die Gegenseite BC von A in N und sind $B\beta$, $C\gamma$, $N\nu$ die Abstände der Punkte B, C, N von der Centralaxe EF, so ist nach Grösse und Sinn:

$$\frac{CN}{N\nu - C\gamma} = \frac{NB}{B\beta - N\nu} = \frac{BC}{C\gamma - B\beta}\,.$$

und folglich, wenn λ einen Proportionalitätsfactor bedeutet

$$CN = \lambda(N\nu - C\gamma), \quad NB = \lambda(B\beta - N\nu), \quad BC = \lambda(C\gamma - B\beta).$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $B\beta$, $C\gamma$, $N\nu$ und addirt sie, so ergibt sich

$$CN \cdot B\beta + NB \cdot C\gamma + BC \cdot N\nu$$
$$= \lambda[(N\nu - C\gamma) \cdot B\beta - (B\beta - N\nu) \cdot C\gamma + (C\gamma - B\beta) \cdot N\nu] = 0.$$

Es verhält sich aber

$$\frac{B\beta}{\Sigma_B} = \frac{C\gamma}{\Sigma_C} = \frac{N\nu}{\Sigma_N},$$

wenn Σ_N das halbe Moment für den Punkt N bezeichnet. Daher besteht zwischen den Abständen dreier beliebiger in gerader Linie liegender Punkte B, C, N von der Centralaxe und ihren Momenten $2\Sigma_B$, $2\Sigma_C$, $2\Sigma_N$ die Relation

$$CN\,.\,\Sigma_B + NB\,.\,\Sigma_C + BC\,.\,\Sigma_N = 0\,.$$

Wir wollen dieselbe so umschreiben, dass an die Stelle der Abstände CN, NB, BC Flächenräume treten. Hiezu hat man

$$CN : NB = MNC : MBN = NCA : NAB = MCA : MAB$$

und folglich

$$CN : NB : BC = MCA : MAB : -(MCA + MAB)\,.$$

Hiermit nimmt die genannte Relation die Form an

$$MCA\,.\,\Sigma_B + MAB\,.\,\Sigma_C = (MCA + MAB)\,.\,\Sigma_N$$

und wenn man dieselbe auch für die drei in gerader Linie liegenden Punkte A, M, N aufstellt:

$$MBC\,.\,\Sigma_A + ACB\,.\,\Sigma_M = (MBC + ACB)\,.\,\Sigma_N,$$

so geben beide Gleichungen, da

$$MAB + MBC + MCA = ABC = -\,ACB$$

ist,

$$MBC\,.\,\Sigma_A + MCA\,.\,\Sigma_B + MAB\,.\,\Sigma_C = ABC\,.\,\Sigma_M\,.$$

w. z. b. w.

IV. Capitel.

Aequivalenz räumlicher Streckensysteme.

§. 1. Mit sämmtlichen Strecken P eines räumlichen Streckensystems Σ ziehen wir durch einen beliebigen Punkt O des Raumes Parallellinien und tragen auf ihnen die entgegengesetzt gleichen Strecken P, $-P$ auf. Hiedurch erhalten wir ein dem Systeme Σ aequivalentes System, welches aus zwei Theilen besteht: einem Aggregate von Strecken P, deren Richtungen sich im Punkte O schneiden und einem Aggregate von Paaren $(P, -P)$, deren Ebenen durch O hindurchgehen und deren Arme p die Abstände der Strecken P von diesem Punkte sind. Das erste Aggregat ist aequivalent seiner Resultanten R, der geometrischen Summe der Strecken P, das letztere ist aequivalent einem Paare, dessen Axenmoment G aus dem Polygone der Axenmomente Pp, die wir in O auf den Ebenen der Paare $(P, -P)$ senkrecht errichtet denken, als deren geometrische Summe hervorgeht. Die Auffindung der dem

Systeme Σ aequivalenten geometrischen Grössen R und G nennen wir die Reduction (R, G) des Streckensystems für den Punkt O, R und G die Reductionselemente, nämlich R die Reductionsresultante und G das Reductionsmoment.

Die Reduction des Systems Σ ist für alle Punkte O des Raumes ausführbar. Für alle Reductionen ist die Resultante geometrisch gleich, da sie aus geometrisch gleichen Polygonen hervorgeht; die Richtungslinien der Resultanten bilden daher ein Parallelbündel (μ). Das Axenmoment G erleidet im Allgemeinen eine geometrische Aenderung, wenn an die Stelle des Punktes O ein anderer Punkt O' tritt, indem dadurch die Ebenen der Paare und deren Arme und in Folge dessen das Polygon der Axenmomente sich ändern. Da jedoch die Resultante längs des durch den Punkt O gehenden Strales verschoben und das Axenmoment G überhaupt parallel mit sich im Raume beliebig verlegt werden darf, so folgt, dass für alle Punkte O eines und desselben Strales μ des Parallelbündels (μ) die Reduction (R, G) dieselbe ist. Dieselbe erleidet daher nur beim Uebergange von einem Strale μ zu einem andern μ' des Parallelbündels eine, übrigens leicht angebbare Aenderung. Um diese Aenderung deutlich zu übersehen und also die für den Stral μ gefundene Reduction (R, G) auf den Parallelstral μ' im Abstande r von μ zu übertragen, genügt es, auf μ' die Resultante R in doppeltem Sinne aufzutragen und mit den Reductionselementen R, G des Strales μ zu verbinden. Wir erhalten dadurch, indem wir das Axenmoment Rr des Paares $(R, -R)$ dessen Seitenstrecken R und $-R$ auf μ und μ' liegen, mit dem Axenmomente G zum neuen Axenmomente $[G'] = [G] + [Rr]$ verbinden (Fig. 21), für den Stral μ' die gesuchte Reduction (R, G').

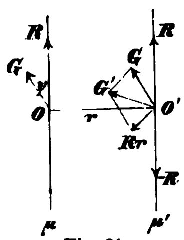

Fig. 21.

§. 2. Der Winkel ψ, den die Richtung des Axenmomentes G mit der Richtung der Resultanten R bildet, wechselt im Allgemeinen mit der Lage des Strales μ. Es gibt jedoch einen ausgezeichneten Stral μ_0, dessen Axenmoment G_0 die Richtung von R hat, so dass das Reductionspaar für diesen Stral senkrecht zur Reductionsresultanten ist. Dieser Strahl μ_0 heisst die **Centralaxe** des Systems Σ (**Poinsot**). Um ihre Lage zu finden, gehen wir von der Reduction (R, G) irgend eines Strales μ (Fig. 22) aus und zerlegen G in ein Axenmoment $G_0 = G \cos\psi$ parallel μ und ein anderes $G_1 = G \sin\psi$ senkrecht zu μ. Durch μ legen wir eine Ebene senkrecht zur Ebene des Winkels ψ, die also auch senkrecht zu G_1 ist. Der Stral μ zerlegt sie in zwei Felder. Ziehen wir in einem derselben einen Stral μ' im Abstande r parallel zu μ und tragen auf ihm R und $-R$ auf, so wird

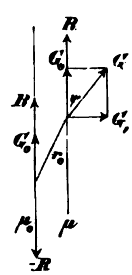

Fig. 22.

das Paar $(R, -R)$, gebildet aus der Resultanten R des Strales μ und dem $-R$ des Strales μ', ein Axenmoment Rr besitzen, gleichen oder entgegengesetzten Sinnes mit G_1, je nachdem μ' in das eine oder das andere Feld hineinfällt. Für einen von der Pfeilspitze von G_1 im Sinne von R sehenden Punkt liegt das Feld der Axenmomente Rr gleichen Sinnes mit G_1 zur Rechten, das entgegengesetzten Sinnes zur Linken. In dem letzteren Felde können wir daher in einem gewissen Abstande r_0 von μ einen Stral μ_0 so finden, dass das Axenmoment Rr jenes Paares das Axenmoment G_1 tilgt. Hiefür muss $Rr_0 = G_1$ und also $r_0 = \frac{G_1}{R}$ werden. Für die Reduction des Strales μ_0 ergibt sich demnach (R, G_0) wo $G_0 = G \cos\psi$ und parallel zu μ ist.

Es gibt nur eine Centralaxe $\mu_0(R, G_0)$. Denn gäbe es noch eine zweite $\mu'_0(R, G'_0)$ so müssten die Reductionen beider aequivalent sein. Da nun nur eine Strecke einer Strecke und ein Paar einem Paare aequivalent sein kann, so müsste R längs μ_0 aequivalent R längs μ'_0 und G_0 aequivalent G'_0 sein. Hieraus folgt, dass $G_0 = G'_0$ sein und μ_0 mit μ'_0 zusammenfallen muss.

Wir erhalten daher die Sätze:

Die Ebenen, welche durch die Stralen μ des Parallelbündels (μ) senkrecht zu den Ebenen der Winkel ψ gelegt werden können, welche die den Stralen μ entsprechenden Axenmomente G mit diesen Stralen bilden, gehen durch die Centralaxe des Systems.

Die Projectionen der Axenmomente G der Reductionen, welche den verschiedenen Stralen μ entsprechen, auf die gemeinsame Richtung derselben sind einander gleich, nämlich gleich dem Axenmomente G_0 der Centralaxe. Es ist demnach $G_0 = G \cos\psi$, wenn G und ψ irgend einer Reduction angehören.

§. 3. Gehen wir von der Reduction (R, G_0) des Systems Σ für die Centralaxe μ_0 aus (Fig. 23) und suchen wir die Reduction (R, G) für irgend einen Stral μ des Parallelbüschels (μ) im Abstande r von μ_0. Es ergibt sich G als die Diagonale eines rechtwinkligen Parallelogramms, dessen eine Seite G_0, dessen andere Seite das zur Ebene $(\mu\mu_0)$ senkrechte Axenmoment Rr des Paares $(R, -R)$ ist, welches beim Uebergang von dem Strale μ_0 zum Strale μ zu G_0 hinzutritt. Demnach ergibt sich G und der Winkel ψ, welchen G mit μ bildet, durch die Formeln

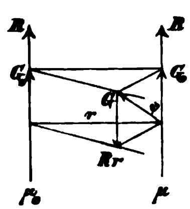

Fig. 23.

$$G^2 = G_0^2 + R^2 r^2, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{R}{G_0} r.$$

Hieraus ziehen wir folgende Sätze:

Für alle Stralen μ des Parallelstralenbüschels (μ) ist die Reductionsresultante R gleich gross und von demselben Sinne.

Für alle Stralen μ desselben Abstandes r von der Centralaxe μ_0, welche also auf einem um diese Axe mit dem Radius r des Querschnitts beschriebenen Cylinder liegen, ist das Axenmoment G des Reductionspaares von derselben Grösse und derselben Neigung ψ gegen den Stral μ. Alle diese Axenmomente G berühren den Cylinder und bilden, wenn man sie in den Punkten eines Kreisschnitts des Cylinders construirt, ihre Richtungen ein einfaches Rotationshyperboloid um die Centralaxe als Rotationsaxe.

Je weiter der Stral μ von der Centralaxe μ_0 absteht, um so mehr wächst der Neigungswinkel ψ der Richtung des Axenmomentes G gegen μ und um so mehr nähert sich dieser Winkel bei wachsendem Abstande r der Grösse $\frac{1}{2}\pi$ als Grenze.

Die Richtungen der Axenmomente, welche den Stralen μ einer durch die Centralaxe μ_0 gehenden Ebene entsprechen, bilden, wenn sie in den Punkten einer zu μ_0 senkrechten Geraden dieser Ebene construirt werden, ein hyperbolisches Paraboloid. Denn die Endpunkte der Axenmomente Rr, welche in den verschiedenen Abständen r zu G_0 hinzutreten, um die G zu bilden, liegen, da die Rr mit r proportional wachsen, in einer Geraden und folglich die Endpunkte der Axenmomente G gleichfalls in einer mit dieser parallelen Geraden. Die Richtungen der Axenmomente schneiden mithin zwei sich kreuzende Geraden und sind einer Ebene, nämlich der zu der Ebene der Stralen μ senkrechten Ebene, parallel.

Das Axenmoment G_0 der Centralaxe ist der kleinste Werth, den das Axenmoment G annehmen kann. Das Axenmoment G wächst mit der Entfernung r des Strales μ von der Centralaxe.

§. 4. Bildet man in drei Punkten O, O', O'' das Axenmoment G, G', G'' der Stralen μ, μ', μ'', welche durch sie hindurchgehen mit Hülfe der Polygone der Axenmomente Pp (§. 1), so kann man, ohne die Reductionsresultante R zu kennen, die Richtung und Lage der Centralaxe μ_0 bestimmen. Denn nach §. 2 sind die Projectionen von G, G', G'' auf die gemeinsame Richtung der Stralen μ_0, μ, μ', μ'' gleich. Zieht man daher von irgend einem Punkte A des Raumes aus drei Strecken, geometrisch gleich G, G', G'' und legt durch ihre Endpunkte eine Ebene, so ist die Normale dieser Ebene die Richtung von μ_0, weil G, G', G'' für sie gleiche Projectionen haben, nämlich gleich dem Perpendikel, welches man von A auf jene Ebene fällen kann. Zieht man nun durch irgend zwei beliebige der drei Punkte O, O', O'', z. B. durch O und O', Stralen μ, μ' parallel zu der gefundenen Richtung, so liefern die beiden Ebenen, welche durch μ, μ' senkrecht zu den Ebenen (μ, G), (μ', G') gelegt werden können, durch ihre Schnittlinie die Centralaxe μ_0 ihrer Lage nach. Zugleich liefert jenes von A aus gefällte Perpendikel durch seine Länge das Axenmoment G_0 der Centralaxe. (Chasles.)

§. 5. In Bezug auf das Verschwinden der Elemente R, G einer Reduction des Systems Σ für irgend einen Stral μ sind folgende vier Fälle möglich: 1. es verschwindet R allein, 2. es verschwindet G allein, 3. es verschwindet sowol R, als auch G und 4. es verschwindet weder R noch G. Im ersten Falle ist das System einem Paare aequivalent und kann also durch ein Axenmoment G von bestimmter Grösse, Richtung und bestimmtem Sinn in jeder Lage im Raume repräsentirt werden. Das Polygon der Strecken schliesst sich für alle Reductionen und die Lage der Centralaxe wird unbestimmt; jede Linie von der Richtung von G kann als dieselbe angesehen werden. Im zweiten Falle schliesst sich das Polygon der Axenmomente für den Strahl μ, für alle übrigen aber nicht; μ ist die Centralaxe; das System ist aequivalent der Einzelstrecke R längs dieser. Im dritten Falle ist das System aequivalent Null; die beiden Polygone, das der Strecken und das der Axenmomente schliessen sich für alle Reductionen. Im vierten Falle, welcher der allgemeinste ist, kann das System einer Einzelstrecke R aequivalent sein. Um den Stral μ' zu finden, für welchen dies möglich ist, bedenken wir, dass für das ihm entsprechende Axenmoment G' die Bedingung $G'^2 = G_0^2 + R^2r^2 = 0$ erfüllt sein muss. Dieselbe zerfällt in die beiden Bedingungen $r = 0$, $G_0 = 0$. Es muss daher μ' mit der Centralaxe zusammen fallen und da $G_0 = G \cos \psi$ ist, so muss für die gegebene Reduction (R, G) des Strales μ der Winkel $\psi = \frac{1}{2}\pi$ sein. Dasselbe findet für alle Reductionen statt. Es kann sich daher das System nur dann auf eine Einzelstrecke R reduciren, wenn für jede beliebige Reduction die Resultante und das Axenmoment zu einander rechtwinklig sind. Die dem System aequivalente Einzelstrecke fällt in die Centralaxe. In diesem Falle sind die Axenmomente G proportional dem Abstande r ihrer Stralen μ von der Centralaxe. Denn da $G_0 = 0$ ist, so wird $G = Rr$.

Aus diesen Erörterungen ergibt sich, dass ein Streckensystem entweder aequivalent Null oder einer Einzelstrecke, oder einem Paare, oder einer Einzelstrecke in Verbindung mit einem Paare aequivalent ist und da keine weiteren Fälle möglich sind, so folgen als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass 1. das System Σ aequivalent Null sei, dass bei jeder beliebigen Reduction $R = 0$ uud $G = 0$ gefunden werde, 2. dass Σ einem Paare aequivalent sei, dass R verschwinde, 3. dass Σ einer Einzelkraft aequivalent werde, dass R und G rechtwinklig zu einander seien und 4. wenn keiner dieser drei Fälle eintreten soll, R und G weder beide verschwinden noch zu einander rechtwinklig sein dürfen.

§. 6. Die Bedingung der Rechtwinkligkeit von R und G zu einander ist für das ebene Streckensystem erfüllt und daher ist ein solches System wenn nicht R verschwindet, stets einer Einzelstrecke aequivalent. Die Resultante R geht nämlich aus einem in die Ebene fallenden Streckenpolygon hervor und liegt mithin selbst in der Ebene; das Axenmoment G aber bildet sich als die Summe der Axenmomente von Paaren dieser Ebene, welche also sämmtlich zu ihr senkrecht sind und ist mithin gleichfalls senkrecht zu ihr und also auch zu R. Ein von der Pfeilspitze an G nach der Pfeilspitze von R auf die Ebene herabsehender Punkt findet die Centralaxe zur Linken von R in der Ebene im Abstande $r = \frac{G}{R}$.

Für ein System von Parallelstrecken ist diese Bedingung gleichfalls erfüllt und wenn R nicht verschwindet, ist auch ein solches System aequivalent einer Einzelstrecke. Denn für irgend eine Reduction ergibt sich R als die algebraische Summe aller Strecken und G als die Schlusslinie eines ebenen Polygons, dessen Ebene senkrecht zur Richtung der Parallelstrecken ist. Die Centralaxe ergibt sich, indem man durch das R irgend einer Reduction eine Ebene senkrecht zum zugehörigen G legt und in dem Felde derselben, welches von der Pfeilspitze des G von einem nach der Pfeilspitze von R hinsehenden Punkte zur Linken von R erblickt wird, im Abstande $r = \frac{G}{R}$ einen Stral parallel zu R zieht.

Das System im Stralenbündel, dessen Streckenrichtungen durch denselben Punkt gehen, ist aequivalent einer Einzelresultante, und aequivalent Null mit deren Verschwinden.

§. 7. Wir gehen jetzt zur analytischen Darstellung der Reduction eines Streckensystems Σ über. Im Ursprunge O eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z bilden wir die Reductionsresultante R mit Hülfe des Streckenpolygons, dessen Schlusslinie sie als die geometrische Summe aller Strecken gibt. Sind daher X, Y, Z die Projectionen einer der Strecken P auf die Coordinatenaxen, A, B, C die Projectionen von R und a, b, c die Richtungscosinusse von R gegen die Axen, so folgt aus den Projectionen des Polygons auf die Axen:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma X, \\ B &= \Sigma Y, \\ C &= \Sigma Z, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R^2 &= A^2 + B^2 + C^2, \\ \frac{a}{A} &= \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{1}{R}, \end{aligned}$$

wodurch die allen Reductionen gemeinsame Resultante R und mit ihr die Richtung der Stralen μ des Parallelbüschels (μ) bestimmt ist. R ist in diesen Ausdrücken absolut gedacht, so dass das Vorzeichen der Cosinusse a, b, c von dem Vorzeichen von A, B, C allein abhängt.

Um das dem Strale μ des Coordinatenursprungs zugehörige Axenmoment G zu finden, zerlegen wir jede Strecke P in irgend einem Punkte x, y, z ihrer Richtung parallel den Coordinatenaxen in ihre Componenten X, Y, Z und tragen jede von ihnen geometrisch gleich und entgegengesetzt auf der ihr parallelen Axe Ox, Oy, Oz auf. Indem wir diess für alle Strecken P des

Systems ausführen, erhalten wir neben den drei Aggregaten ΣX, ΣY, ΣZ auf den drei Axen, welche uns soeben die Resultante R lieferten, noch drei Aggregate von Paaren, nämlich das Aggregat aller Paare wie $(X, -X)$, das aller Paare $(Y, -Y)$ und das der Paare $(Z, -Z)$, deren Axenmomente parallel den Ebenen der yz, zx und xy laufen. Jedes solches Paar, wie z. B. das Paar $(X, -X)$ zerlegen wir in zwei andere, deren Axen parallel den Axen der y und z sind. Hiezu genügt es, durch die Projection des Punktes (xyz) auf die xy- oder auf die zx-Ebene eine Gerade parallel zur x-Axe zu ziehen und auf ihr nochmals X und $-X$ aufzutragen. Die Strecken X und $-X$, deren Richtungslinien durch den Punkt (xyz) und seine Projection auf die xy-Ebene laufen, bilden ein Paar, dessen Axenmoment zX parallel der y-Axe; die beiden übrigen Strecken X und $-X$, deren Richtungen durch den ebengenannten Fusspunkt und den Coordinatenursprung gehen, bilden ein anderes Paar, dessen Axenmoment $-yX$ parallel zur z-Axe läuft. Hiebei wird ein Axenmoment als positiv oder negativ angesehen, je nachdem sein Sinn mit dem positiven oder negativen Sinne der Coordinatenaxe übereinstimmt, zu welcher dasselbe parallel ist. Auch sieht man leicht, dass ein solches Axenmoment, wie z. B. zX, das Zeichen wechselt, sowol wenn die Coordinate z, als auch wenn die Strecke X den Sinn ändert und das Zeichen behält, wenn beides zugleich eintritt. Für die Aufstellung der Reductionsgleichungen genügt es daher, den Fall, dass sowol alle drei Coordinaten x, y, z, als auch alle drei Componenten X, Y, Z positiven Sinn haben, als Normalfall festzuhalten. Das Paar $(Y, -Y)$ zerfällt in gleicher Weise in zwei Paare, deren Axenmomente xY, $-zY$, den Axen des z und des x parallel sind; ebenso das Paar $(Z, -Z)$ in zwei Paare mit den Axenmomenten yZ, $-xZ$ parallel den Axen der x und y. Das Bildungsgesetz dieser Paare ist leicht zu übersehen. Man denke sich die Coordinatenaxen immer in der Ordnung x, y, z auf einander folgend, sodass, wenn man die x-Axe als die erste Axe ansieht, die y-Axe die zweite und die z-Axe die dritte Axe ist, wenn die y-Axe die erste, alsdann die z- und x-Axe die zweite und dritte und wenn die z-Axe die erste, die x- und y-Axe die zweite und dritte Axe ist. Jede Compenante, parallel einer ersten Axe, liefert alsdann zwei Axenmomente, parallel der zweiten, resp. dritten Axe, welche die Produkte sind aus dieser Componente und der dritten, resp. zweiten Coordinate des Punktes (xyz) und von denen das der zweiten Axe parallele das Zeichen $(+)$, das andere das Zeichen $(-)$ hat. Sammelt man die den Axen der x, y, z parallelen Axenmomente, so erhält man

$$yZ - zY, \quad zX - xZ, \quad xY - yX,$$

welche Ausdrücke die drei Determinanten sind, welche sich aus den Coordinaten x, y, z und den Componenten X, Y, Z cyclisch bilden lassen. Indem man diese Operation für alle Strecken des Systems ausführt und alle Axenmomente vereinigt, welche parallel derselben Axe sind, erhält man drei Summen L, M, N solcher Grössen, aus denen mit Hülfe des Parallelepipeds das Axenmoment G entspringt, dessen Projectionen auf die Coordinatenaxen mithin L, M, N sind. Man erhält daher für diese Grössen und die Richtungscosinusse λ, μ, ν des Axenmomentes G gegen die Coordinaten das Formelsystem:

$$L = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

$$M = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad \frac{\lambda}{L} = \frac{\mu}{M} = \frac{\nu}{N} = \frac{1}{G},$$

$$N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

wozu man noch für die Neigung ψ von G gegen R hinzufügen kann:

$$RG \cos \psi = AL + BM + CN,$$

$$(RG \sin \psi)^2 = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ N & L \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ L & M \end{vmatrix}^2,$$

von welchen Gleichungen die erste aus der Formel

$$\cos \psi = a\lambda + b\mu + c\nu$$

hervorgeht.

§. 8. Auch kann man auf folgendem Wege zu den analytischen Ausdrücken für das Axenmoment G und seine Componenten L, M, N gelangen. Es sei p das vom Ursprunge O auf die Richtung der Strecke P, deren Anfangspunkt (xyz) ist, gefällte Loth und also Pp das Axenmoment des Paares $(P, -P)$, welches bei der Reduction für O in G eintritt. Tragen wir dasselbe in O senkrecht zur Ebene des Paares dessen Sinn entsprechend auf und seien α, β, γ seine Richtungscosinusse. Da dasselbe auf der Richtung von P, deren Richtungscosinusse $X:P$, $Y:P$, $Z:P$ und auf dem Radiusvector r, vom Ursprung nach dem Punkte (xyz) gezogen, dessen Richtungscosinusse $x:r$, $y:r$, $z:r$ sind, zugleich senkrecht ist, so bestehen die Gleichungen:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0,$$
$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0,$$

woraus

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}} = \frac{\gamma}{\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}} = \frac{1}{h},$$

$$h^2 = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}^2$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2$$

folgt. Hierin ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2$ und stellt $(xX + yY + zZ) : rP$ den Cosinus der Neigung von r gegen P dar. Bezeichnen wir dieselbe mit σ, so wird $h^2 = r^2 P^2 (1 - \cos^2 \sigma)$, also $h = rP \sin \sigma$. Es ist aber $r \sin \sigma = p$ und folglich $h = Pp$. Hiemit erhalten wir die Componenten $Pp\alpha$, $Pp\beta$, $Pp\gamma$ des Axenmomentes Pp parallel den Coordinatenaxen, nämlich

$$Pp\alpha = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad Pp\beta = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad Pp\gamma = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

und mithin durch Summation durch das ganze System hindurch die Componenten L, M, N des Axenmomentes G der Reduction, nämlich:

$$L = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad M = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix},$$

wie oben.

§. 9. Um die Reduction des Systems vom Coordinatenursprung O auf einen anderen Reductionspunkt $O_1(x_1 y_1 z_1)$ oder vielmehr von dem Strale μ des Punktes O auf den Strahl μ_1 des Punktes O_1 zu übertragen, haben wir dem System längs μ_1 die beiden entgegengesetzten Strecken R, $-R$ zuzufügen. Die Strecke R bildet die Reductionsresultante dortselbst und gelten hiefür unmittelbar die Formeln, wie zu Anfang des §. 7. Die Strecke $-R$ aber bildet mit dem R des Punktes O ein Paar, welches mit dem Reductionspaare G dortselbst zu dem Reductionspaare G' für den Punkt O_1 sich verbindet. Um die Componenten L', M', N' des Axenmomentes dieses Paares zu bilden, haben wir aus den Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Anfangspunktes von $-R$ und seinen Componenten $-A$, $-B$, $-C$ die Determinanten

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ -B, & -C \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ -C, & -A \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ -A, & -B \end{vmatrix}$$

zu bilden und zu den Grössen L, M, N der Reduction des Punktes O hinzuzufügen. Dies liefert L', M', N', G' und dessen Richtungscosinusse λ', μ', ν' durch die Formeln

$$L' = L - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ B & C \end{vmatrix}, \quad G'^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2,$$

$$M' = M - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ C & A \end{vmatrix}, \quad \frac{\lambda'}{L'} = \frac{\mu'}{M'} = \frac{\nu'}{N'} = \frac{1}{G'},$$

$$N' = N - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix},$$

so wie für die Neigung ψ' von G' gegen R:

$$RG' \cos \psi' = AL' + BM' + CN' = AL + BM + CN = RG \cos \psi,$$

da

$$A \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ B & C \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ C & A \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

ist. Dies Resultat sagt nichts weiter aus, als dass die Projection des Axenmomentes aller Reductionen auf die Richtung der Parallelstralen μ der Resultante dieselbe ist. Weiter unten werden wir dasselbe noch anders formuliren.

Zu denselben Resultaten können wir auch durch eine Verschiebung des Coordinatenursprungs in den Punkt O_1 gelangen. Hiefür sind x, y, z durch $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ zu ersetzen. Auf die Bildung der Resultanten R hat dies keinen Einfluss, die Grössen L, M, N des §. 7 gehen dadurch in L', M', N' über. So wird z. B. aus L:

$$\Sigma \begin{vmatrix} y - y_1 & z - z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} - \Sigma \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix} = L - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \Sigma Y & \Sigma Z \end{vmatrix} = L - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ B & C \end{vmatrix}.$$

§. 10. Es seien $L_0, M_0, N_0, \lambda_0, \mu_0, \nu_0$ die der Centralaxe μ_0 entsprechenden Elemente und $O_1(x_1 y_1 z_1)$ ein Punkt derselben. Dann hat man:

$$L_0 = L - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ B & C \end{vmatrix}, \quad G_0^2 = L_0^2 + M_0^2 + N_0^2,$$

$$M_0 = M - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ C & A \end{vmatrix}, \quad \frac{\lambda_0}{L_0} = \frac{\mu_0}{M_0} = \frac{\nu_0}{N_0} = \frac{1}{G_0}$$

$$N_0 = N - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix},$$

nebst den Bedingungen

$$\lambda_0 = \alpha, \quad \mu_0 = \beta, \quad \nu_0 = \gamma,$$

welche nur zwei unabhängige Gleichungen liefern und aussprechen, dass die Richtung von G_0 zu der Richtung von R parallel sein müsse.

Sie geben, da $\alpha = A : R$, $\beta = B : R$, $\gamma = C : R$ ist

$$\frac{L_0}{A} = \frac{M_0}{B} = \frac{N_0}{C} = \frac{G_0}{R},$$

wobei $G_0 = R$ zur äussersten Rechten als selbstverständlich wegbleiben kann. Diese Doppelproportion ist daher gleichbedeutend mit zweien der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} M_0 & N_0 \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} N_0 & L_0 \\ C & A \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} L_0 & M_0 \\ A & B \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste derselben geht nach Einführung der obigen Ausdrücke für M_0, N_0, B, C über in:

$$B\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix} - C\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ C & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix},$$

oder

$$(B^2 + C^2)x_1 - A(By_1 + Cz_1) = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix},$$

oder indem man $A^2 x_1$ addirt und subtrahirt und bemerkt, dass

$$A^2 + B^2 + C^2 = R^2$$

und die analogen Transformationen mit den beiden andern Gleichungen ausführt:

$$R^2 x_1 - A(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix},$$

$$R^2 y_1 - B(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = \begin{vmatrix} C & A \\ N & L \end{vmatrix},$$

$$R^2 z_1 - C(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = \begin{vmatrix} A & B \\ L & M \end{vmatrix}.$$

Irgend zwei dieser Gleichungen stellen in x_1, y_1, z_1 als laufenden Coordinaten die Gleichungen der Centralaxe dar. Um sie auf die übliche Form zu bringen und die Bedeutung der rechten Seiten, sowie der symmetrischen Function $Ax_1 + By_1 + Cz_1$ zu ermitteln, legen wir durch den Coordinatenursprung O eine Ebene senkrecht zu den Stralen μ. Ihre Gleichung ist:

$$Ax + By + Cz = 0$$

und wenn ξ, η, ζ die Coordinaten ihres Schnittpunktes mit der Centralaxe μ_0 sind, so hat man

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0,$$

$$R^2\xi - A(A\xi + B\eta + C\zeta) = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix},$$

$$R^2\eta - B(A\xi + B\eta + C\zeta) = \begin{vmatrix} C & A \\ N & L \end{vmatrix},$$

$$R^2\zeta - C(A\xi + B\eta + C\zeta) = \begin{vmatrix} A & B \\ L & M \end{vmatrix},$$

woraus man für die Coordinaten ξ, η, ζ des Schnittpunktes erhält:

$$R^2\xi = \begin{vmatrix} B & C \\ M & N \end{vmatrix}, \quad R^2\eta = \begin{vmatrix} C & A \\ N & L \end{vmatrix}, \quad R^2\zeta = \begin{vmatrix} A & B \\ L & M \end{vmatrix}.$$

Substituirt man hieraus die Werthe der drei Determinanten zur Rechten in die vorstehenden Gleichungen der Centralaxe, so erhält man diese in der Form:

$$\frac{x_1 - \xi}{A} = \frac{y_1 - \eta}{B} = \frac{z_1 - \zeta}{C} = \frac{s}{R},$$

wenn s die Strecke der Centralaxe vom Schnittpunkte $(\xi\eta\zeta)$ bis zum Punkte (x, y, z), nämlich $s = (Ax_1 + By_1 + Cz_1) : R$ bedeutet. Da die Neigung ψ_0 von G_0 gegen R Null ist, so hat man endlich

$$G_0 R = AL_0 + BM_0 + CN_0 = AL + BM + CN.$$

§. 11. Die Bedingung, dass das System sich auf eine Einzelstrecke R ohne Axenmoment längs der Centralaxe reducire, ist $G_0 = 0$ oder also $AL + BM + CN = 0$; sie drückt aus, dass für jede Reduction das Axenmoment G senkrecht zu R sein muss. Im Falle, dass diese Bedingung erfüllt ist, ist wegen $G_0^2 = L_0^2 + M_0^2 + N_0^2$ auch $L_0 = 0$, $M_0 = 0$, $N_0 = 0$, und werden daher die Gleichungen der Centralaxe

$$L - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \quad M - \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ C & A \end{vmatrix} = 0, \quad N - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix} = 0.$$

Für ein System von Parallelstrecken P, welche zum Theil entgegengesetzten Sinn und entgegengesetztes Zeichen haben können, seien α, β, γ die Richtungscosinusse ihrer gemeinsamen Richtung gegen die Coordinatenaxen. Man hat dann

$$X = P\alpha, \; Y = P\beta, \; Z = P\gamma; \; A = \alpha\Sigma P, \; B = \beta\Sigma P, \; C = \gamma\Sigma P;$$
$$R = \Sigma P, \; a = \alpha, \; b = \beta, \; c = \gamma;$$

$$L = \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ P\beta & P\gamma \end{vmatrix} = \gamma\Sigma Py - \beta\Sigma Pz, \quad L_0 = M_0 = N_0 = G_0 = 0,$$

$$M = \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ P\gamma & P\alpha \end{vmatrix} = \alpha\Sigma Pz - \gamma\Sigma Px, \quad AL + BM + CN = 0.$$

$$N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ P\alpha & P\beta \end{vmatrix} = \beta\Sigma Px - \alpha\Sigma Py,$$

Ist also $R = \Sigma P$ nicht Null (was z. B. immer der Fall ist, wenn die Parallelstrecken P alle gleichen Sinn besitzen), so reducirt sich das System auf eine Einzelstrecke R längs der Centralaxe μ_0. Die Gleichungen der letzteren lassen sich in der Form darstellen:

$$(y_1\Sigma P - \Sigma Py)\gamma - (z_1\Sigma P - \Sigma Pz)\beta = 0,$$
$$(z_1\Sigma P - \Sigma Pz)\alpha - (x_1\Sigma P - \Sigma Px)\gamma = 0,$$
$$(x_1\Sigma P - \Sigma Px)\beta - (y_1\Sigma P - \Sigma Py)\alpha = 0.$$

Auf der Centralaxe liegt, wie man aus diesen Gleichungen sieht, ein gewisser Punkt, dessen Coordinaten

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$$

ihre Gleichungen unabhängig von der Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ der Strecken erfüllen. Dieser Punkt, welcher in vielen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt, heisst der **Mittelpunkt** des Parallelstreckensystems. Sind insbesondere die

Strecken P einer und derselben Strecke g proportional, so dass man $P = mg$, setzen kann, so werden diese Coordinaten auch von g unabhängig und

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M},$$

wo $\Sigma m = M$ gesetzt ist. — Für $R = 0$ reducirt sich das System auf ein Paar.

Für das ebene System, für welches die Bedingung $AL + BM + CN = 0$ gleichfalls erfüllt ist, führt unsere Betrachtung, indem man alle z-Coordinaten und alle Z-Componenten der Null gleichsetzt, auf den Inhalt der §§. 5. 6. in Cap. III zurück.

§. 12. Das System wird aequivalent Null, wenn sowol R als G verschwinden. Da R^2 und G^2 die Quadratsummen von A, B, C, resp. L, M, N sind, so zerfallen diese beiden Bedingungen in die sechs folgenden:

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad L = 0, \\ B &= 0, \quad M = 0, \\ C &= 0, \quad N = 0. \end{aligned}$$

Sie drücken aus, dass das Polygon der Strecken und das der Axenmomente für jede Reduction sich schliessen und in Folge dessen ihre Projectionen auf drei geometrisch von einander verschiedene Axen verschwinden müssen. Die Wahl rechtwinkliger Axen ist hiebei ohne Bedeutung, da aus dem Verschwinden der Projectionen für sie das Verschwinden derselben für alle Axen des Raumes folgt.

Damit also ein Streckensystem aequivalent Null sei, ist erforderlich und hinreichend, dass die Projectionen der beiden Polygone jeder beliebigen Reduction, das der Strecken, wie das der Axenmomente auf irgend drei geometrisch verschiedene Axen verschwinden.

Projiciren wir das Streckensystem auf irgend eine Ebene, z. B. auf die Ebene der xy, so sind die Bedingungen dafür, dass die Projection des Systems aequivalent Null sei $A = 0$, $B = 0$, $N = 0$ (s. Cap. III §. 5). Man kann daher auch sagen:

Ein Streckensystem ist aequivalent Null, wenn seine Projectionen auf irgend drei geometrisch verschiedene Ebenen aequivalent Null sind und umgekehrt.

Projicirt man das System auf eine Axe, z. B. auf die x-Axe, so ist die Bedingung dafür, dass die Projection aequivalent Null sei, $A = 0$. Man kann daher behaupten:

Zum Verschwinden des Systems ist erforderlich (aber nicht hinreichend), dass seine Projectionen auf irgend drei geometrisch verschiedene Axen Null seien.

Unter dem Momente einer Strecke in Bezug auf eine Axe versteht man das Product aus der Projection der Strecke auf eine zur Axe senkrechte Ebene in ihrem kürzesten Abstand von der Axe. Während wir bisher jede Strecke P in ihre drei Componenten X, Y, Z parallel zu den Coordinatenaxen zerlegten, wollen wir sie jetzt parallel der z-Axe und senkrecht zu dieser in die Componenten Z und Q spalten (Fig. 24); Q stellt dann die Projection von P auf die xy-Ebene dar und ist die Resultante von X, Y. Die Zerlegung von P erfolgt in einer zur z-Axe parallelen Ebene, deren Abstand q von dieser Axe den kürzesten Abstand von P und zugleich den von Q von derselben darstellt. Demnach ist Qq das Moment der Strecke P bezüglich der z-Axe. In der Projection auf die xy-Ebene stellt Qq das Moment von Q in Bezug auf den Coordinatenursprung dar und ist gleich $\begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$, wenn die Coordinaten des Punktes, von welchem P zerlegt wurde, x, y, z sind. Daher ist das Axenmoment $N = \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = \nu G$ nichts anderes, als die Summe der Momente aller Strecken P in Bezug auf die z-Axe oder, wie man kürzer sagt, das Moment des Systems für die z-Axe. Ebenso stellen L, M die Momente des Systems für die beiden andern Coordinatenaxen dar.

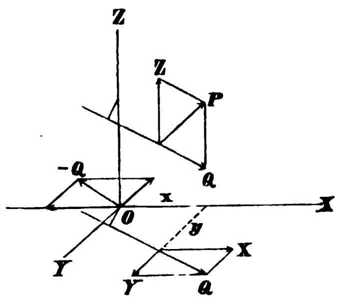

Fig. 24.

Man kann daher auch sagen:

Zum Verschwinden eines Streckensystems ist erforderlich und hinreichend, dass die Projectionen und Momente desselben für drei geometrisch verschiedene Axen verschwinden. Diese Grössen verschwinden alsdann auch für jede andere Axe des Raumes.

§. 13. Den bisherigen Untersuchungen über den geometrischen Werth eines Streckensystems liegt die Reduction (R, G) desselben auf Resultante und Axenmoment für irgend einen Punkt O oder vielmehr einen Stral μ zu Grunde. Ohne die Resultante R zu benutzen, kann man mit Hülfe des Axenmomentes G allein ausreichen, wenn man dasselbe für verschiedene Reductionen zugleich kennt. So fanden wir bereits Cap. III, §. 10, dass es möglich sei, die Richtung und Lage der Centralaxe zu bestimmen, sobald man das Axenmoment für drei Reductionen kennt. Die Betrachtungen, welche wir über diesen Gegenstand durchführen wollen, liefern das Analogon zu Cap. III, §§. 9. 10. für das räumliche System.

Bei der Reduction des Systems für den Punkt O lieferte jede Strecke $AB = P$ ein Paar $(P, -P)$, dessen Ebene durch O und P geht, und dessen Arm das Perpendikel p ist, welches von O auf die Strecke P gefällt werden kann. Wir trugen das Axenmoment Pp dieses Paares in O senkrecht zu seiner Ebene seinem Sinne entsprechend auf. Sämmtliche Axenmomente Pp lieferten mit Hülfe eines Polygons das Axenmoment G der Reduction für den Punkt O, welches seinerseits einem Paare entspricht, dessen Ebene senkrecht zu G durch den Punkt O gelegt werden kann. Im Falle das System aequivalent Null ist, ist das Polygon der Axenmomente geschlossen und verschwindet seine Projection auf jede beliebige Axe des Raumes; im Falle das System einem andern Systeme aequivalent ist, sind die Axenmomente beider und deren Projectionen auf jede beliebige Axe des Raumes geometrisch gleich. Ziehen wir durch O irgend eine Axe, mit welcher die Axenmomente Pp die Winkel λ bilden, so ist also $\Sigma Pp \cos \lambda$ die Grösse, welche im ersten Falle verschwinden, im zweiten Falle einer für denselben Punkt O und dieselbe Axe analog gebildeten Grösse gleich sein muss, welche von einem zweiten System herrührt, welches dem gegebenen aequivalent ist.

Nehmen wir nun auf jener Axe die Strecke MO nach Grösse und Sinn beliebig an, so ist auch $\Sigma MO \,.\, Pp \cos \lambda$ im ersten Falle Null, im zweiten gleich der analog gebildeten Grösse des zweiten Systems.

Das Axenmoment Pp ist nun gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks OAB und da es senkrecht zur Ebene OAB, so stellt $MO \,.\cos \lambda$ das Perpendikel dar, welches vom Anfangspunkte M der Strecke MO auf die Ebene des Dreiecks gefällt werden kann. Demnach ist $MO \,.\, Pp \cos \lambda$ das sechsfache Volumen der Pyramide oder das Volumen des Parallelepipeds, welches MO und $AB = P$ zu Gegenkanten hat. Da die Axenmomente Pp einen bestimmten Sinn haben, so sind auch die Pyramiden in bestimmtem, dem Sinne dieser entsprechenden Sinne zu nehmen und in Folge dessen mit bestimmtem Vorzeichen versehen mit einander zu verbinden. In der Pyramide $MOAB$, worin AB eine Strecke des zu reducirenden Systems, MO aber eine ganz willkürliche Strecke des Raumes bezeichnet, denken wir M als einen sehenden Punkt, welcher auf die Ebene des Dreiecks OAB hinblickt. Ein von O ausgehender Stral überfahre das Dreieck OAB, so dass sein Schnittpunkt mit AB die Strecke AB in dem ihr zukommenden Sinne beschreibt, oder eine durch MO gehende Ebene drehe sich um OM, so dass ihr Schnittpunkt mit AB dem Sinne dieser Strecke folgt. Die Pyramide ist alsdann von positivem oder negativem Sinne und Zeichen, je nachdem für den auf die Basis OAB hinsehenden Punkt M die Bewegung dem Sinne nach mit der Uhrzeigerbewegung harmonirt oder nicht harmonirt. Mit Rücksicht auf diese Definition können wir die Sätze aussprechen:

Wenn ein Streckensystem aequivalent Null ist, so verschwindet die Summe der Pyramiden, welche eine beliebige

Strecke des Raumes zur gemeinschaftlichen Kante und die Strecken des Systems zu deren Gegenkanten haben.

Zwei aequivalente Systeme haben in Bezug auf jede beliebige Strecke des Raumes gleiche Pyramidensummen, gebildet aus dieser Strecke als gemeinschaftlicher Kante und den Strecken des einen, wie des andern Systems als Gegenkanten.

Ist das System nicht aequivalent Null, so ist es entweder aequivalent einer einzelnen Strecke, oder einem Paare, oder einer Strecke in Verbindung mit einem Paare. Da für diese Gebilde die Pyramidensumme nicht für alle Axen verschwindet, so ist ihr Verschwinden für die Aequivalenz des Systems mit Null charakteristisch und kann man die vorstehenden Sätze umkehren, nämlich:

Ist die Pyramidensumme, welche eine beliebige Strecke des Raumes mit den Strecken eines Systems als Gegenkanten bildet, für jede Wahl dieser Strecke gleich Null, so ist das System aequivalent Null.

Haben zwei Systeme für jede beliebige Strecke des Raumes gleiche Pyramidensummen, so sind sie einander aequivalent.

Den sechsfachen Inhalt der Pyramide $MOAB$ mit Rücksicht auf den Sinn derselben oder was dasselbe ist, das Volumen des Parallelepipedums, welches MO und AB zu Gegenkanten hat, nennt man nach Möbius das Moment der Strecke AB in Bezug auf die Axe MO und die Summe der Momente aller Strecken des Systems das Moment des Systems in Bezug auf die Axe MO. Diese Definition stimmt überein mit der §. 12 gegebenen. Denn legt man durch MO und AB die Ebenen der Parallelschicht, welche durch die Richtungen derselben bestimmt wird, so fallen zwei gegenüberstehende Seitenflächen des Parallelepipeds in sie hinein, deren Flächenraum $MO \,.\, AB \sin\gamma$ ist, wenn γ den Neigungswinkel von MO und AB bedeutet. Sieht man eine von ihnen als Grundfläche des Parallelepipeds an, so ist der kürzeste Abstand d von MO und AB oder die Dicke der Schicht die Höhe und somit $MO \,.\, AB \,.\, d \sin\gamma$ das Volumen desselben oder das Moment von AB in Bezug auf MO, $AB \sin\gamma$ stellt aber die Projection der Strecke AB auf eine zur Axe MO senkrechte Ebene dar.

§. 14. Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist das 6fache Volumen einer Pyramide $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$, deren Ecken die Coordinaten x_1, y_1, z_1,; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 haben, die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

daher ist das Moment $\Sigma MOAB$ unseres Systems, wenn die Coordinaten des Punktes O sind: x_1, y_1, z_1, die des Punktes M: $x_1 + \alpha$, $y_1 + \beta$, $z_1 + \gamma$, so dass also α, β, γ die Projectionen der Strecke OM auf die Coordinatenaxen darstellen und die von A gleich x, y, z und $x + X, y + Y, z + Z$ die von B sind, indem X, Y, Z wie oben die Projectionen von $P = AB$ darstellen, gleich:

$$\Sigma \begin{vmatrix} x_1 + \alpha, & y_1 + \beta, & z_1 + \gamma, & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x + X & y + Y & z + Z & 1 \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}.$$

Indem man nach α, β, γ ordnet und die frühere Bezeichnung

$$\begin{array}{l} \Sigma X = A, \\ \Sigma Y = B, \\ \Sigma Z = C, \end{array} \quad \Sigma \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = L, \quad \Sigma \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = M, \quad \Sigma \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = N$$

beibehält, kann man das Moment unter der Form:

$$\left\{ L - \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ B & C \end{vmatrix} \right\} \alpha + \left\{ M - \begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ C & A \end{vmatrix} \right\} \beta + \left\{ N - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ A & B \end{vmatrix} \right\} \gamma$$

darstellen. Ebenso leicht gibt man ihm die Form:

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + A \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Aus jeder dieser Formen kann man wiederum die früheren Bedingungen für das Verschwinden des Systems, für dessen Reduction auf eine Einzelstrecke etc. ziehen. Soll z. B. das System verschwinden, so muss das Moment für alle Axen des Raumes, mithin für alle beliebigen Werthe der Grössen $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$ sich auf Null reduciren; daher müssen die Coefficienten dieser Grössen und ihrer Verbindungen Null, d. h.

$$A = 0, \; B = 0, \; C = 0, \; L = 0, \; M = 0, \; N = 0$$

sein, wie oben §. 11.

V. Capitel.

Aequivalenz des räumlichen Systems mit zwei sich kreuzenden Strecken.

§. 1. Reducirt man das System für irgend einen Punkt O auf Resultante R und Axenmoment G und construirt in einer durch O senkrecht zu G gelegten Ebene das Paar $(F, -F)$, dessen Axenmoment G ist, so

kann man dies Paar in seiner Ebene so drehen und verschieben, dass der Anfangspunkt einer der Seitenstrecken F mit O zusammenfällt. Die beiden in O beginnenden Strecken R, F sind aequivalent einer Strecke S, welche mit Hülfe des Parallelogramms über R und F als Seiten gefunden werden kann. Diese Strecke S und die noch übrige Seitenstrecke des Paares sind zusammen dem System aequivalent und kreuzen sich im Raume. Da diese Operation für jede Reduction (R, G) ausgeführt werden kann und dabei auch die Lage des Paares $(F, -F)$ in seiner Ebene, sein Arm und seine Seitenstrecken ohne Aenderung seines Werthes variiren können, so sieht man dass ein Streckensystem, dessen Resultante nicht verschwindet, auf unendlich viele Arten zweien sich kreuzenden Strecken aequivalent ist. Man erkennt leicht, dass für alle Paare von sich kreuzenden Strecken, welche dem Systeme aequivalent sind, das Volumen der Pyramide, deren Gegenkanten diese Strecken sind, von gleicher Grösse ist (Chasles).

Denn stellt $(OF, O'F')$ (Fig. 25) das vorhin erwähnte Paar $(F, -F)$ dar, dessen Moment G das Doppelte des Dreiecks $OO'F'$ ist, und bildet die Resultante $R = OR$ mit dem Axenmomente G den Winkel ψ, so ist $R \cos\psi$ das Perpendikel, welches vom Endpunkte von R oder vom Endpunkte von S auf die Ebene des Dreiecks gefällt werden kann. Demnach würde $GR \cos\psi$ das 6 fache Volumen der Pyramide darstellen, deren Gegenkanten OS und $O'F'$ sind. Nun ist aber $G \cos\psi$, d. h. die Projection des Axenmomentes G auf die Richtung von R (des Strales μ) gleich dem Axenmomente G_0 der Centralaxe. Daher wird $GR \cos\psi = G_0 R$, also constant.

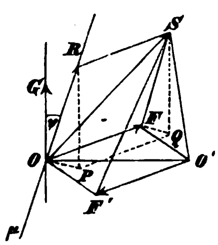

Fig. 25.

Wir fanden oben Cap. IV. §. 7. dass $GR \cos\psi = AL + BM + CN$ sei. Daher gibt dieser Ausdruck das 6 fache Volumen unserer Pyramide.

§. 2. Wir wollen jetzt verschiedene Arten, ein Streckensystem auf zwei sich kreuzende Strecken zu reduciren, kennen lernen, indem wir die letzteren noch einer weiteren Bedingung unterwerfen. Zunächst suchen wir zwei dem gegebenen System aequivalente Strecken, von denen die eine zu einer gegebenen Ebene π senkrecht ist, während die andere in diese Ebene hineinfällt.

Die Ebene π schneide die Centralaxe μ_0 des Systems im Punkte O (Fig. 26) und sei gegen sie unter dem Winkel α geneigt. Die Reductionselemente R, G_0 der Centralaxe zerlegen wir beide in zwei zu einander rechtwinklige Componenten, die Resultante R in r und ϱ, das Axenmoment G_0 in g_0 und γ_0 und seien r, g_0 zur Ebene π rechtwinklige, ϱ, γ_0 in π hineinfallende Componenten. Zur Ebene des Winkels α, in welcher diese

Zerlegung erfolgt, ziehen wir durch O deren Normale OP. Die beiden zu einander rechtwinkligen Elemente r, γ_0 sind nach Cap. II, §. 3 aequivalent der Strecke r allein im Abstande CP von der Centralaxe zur Linken eines im Endpunkt von γ_0 befindlichen, nach dem Endpunkte von r hinblickenden Punktes, wenn $r \,.\, OP = \gamma_0$; die beiden anderen, gleichfalls zu einander rechtwinkligen Elemente ϱ, g_0 sind ebenso aequivalent einer Strecke ϱ allein im Abstande OQ von der Centralaxe zur Linken vom Endpunkte von g_0 aus betrachtet, wenn OQ so gewählt wird, dass $\varrho \,.\, OQ = g_0$ wird. Die so gewonnenen Strecken r in P senkrecht zur Ebene π und r in der Ebene π senkrecht zu PQ sind zusammen aequivalent (R, G_0), mithin aequivalent dem System. Die Punkte P, Q fallen, da sie zur Linken der in den Enden von γ_0 und g_0 befindlichen nach den Enden von r und ϱ hinsehenden Punkte liegen müssen, auf entgegengesetzte Seiten des Punktes O und PQ ist der kürzeste Abstand beider Strecken.

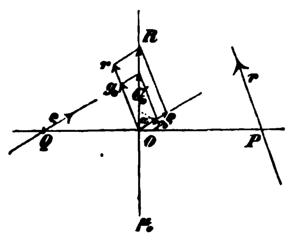

Fig. 26.

Da $r = R \sin \alpha$, $\varrho = R \cos \alpha$, $g_0 = G_0 \sin \alpha$, $\gamma_0 = G_0 \cos \alpha$, so folgt aus den Gleichungen $r \,.\, OP = \gamma_0$, $\varrho \,.\, OQ = g_0$

$$OP = \frac{\gamma_0}{r} = \frac{G_0}{R} \operatorname{cotg} \alpha, \quad OQ = \frac{g_0}{\varrho} = \frac{G_0}{R} \operatorname{tg} \alpha.$$

Hieraus ergibt sich weiter, dass das Produkt der Abstände OP, OQ der beiden Strecken r, ϱ eine Constante ist, nämlich

$$OP \,.\, OQ = \left(\frac{G_0}{R}\right)^2.$$

Es bilden mithin die Punkte P, Q, deren Lage vom Winkel α abhängt, zwei Punktreihen in Involution gleicher Lage auf der Normalen des Winkels α. Denkt man sich um die Gerade PQ als Axe die Ebene π sich drehend, so beschreiben P, Q diese Punktreihen.

Es ist ferner

$$OP + OQ = \frac{\gamma_0}{r} + \frac{g_0}{\varrho},$$

also

$$r\varrho \,.\, PQ = \varrho\gamma_0 + r g_0 = R G_0 \cos^2 \alpha + R G_0 \sin^2 \alpha = R G_0,$$

d. h. die Pyramide über r, ϱ als Gegenkanten ist unabhängig von α; wie schon aus §. 1. folgt.

Man hat daher für den Abstand der Strecken r, ϱ:

$$PQ = \frac{R G_0}{r\varrho} = 2 \frac{G_0}{R} \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

Daher ist der kleinste Abstand, welchen dieselben erreichen können, $2\frac{G_0}{R}$, wie dies auch aus der Theorie der involutorischen Reihen sich ergibt.

Das Verhältniss der Abstände ist

$$\frac{OP}{OQ} = \operatorname{cotg}^2 \alpha .$$

Die Punkte P, Q sind reciprok; die Grössen r, ϱ ebenfalls. Sie sind durch die Gleichung $r\varrho = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\alpha$ mit einander verbnnden.

Die Untersuchung ist von den beiden Constanten $\frac{G_0}{R}$ und α abhängig, von denen die erste das Streckensystem, die zweite die Lage der Ebene π gegen dessen Centralaxe charakterisirt. Es bleibt rings um die Centralaxe alles dasselbe, wenn π bei demselben Winkel sich um sie dreht oder auch längs ihr verschiebt.

Reducirt man das Streckensystem für irgend einen Punkt M (Fig. 27) der Ebene π als Reductionspunkt, indem man die Strecken r, ϱ von P und Q parallel mit sich nach M überträgt, woselbst sie zur Reductionsresultanten R des durch M gehenden Strales μ zusammentreten und fügt die beiden Paare zu, deren Axenmomente $r \,.\, MP$ und $\varrho \,.\, NQ$ sind, wenn N die Projection von M auf PQ bedeutet, so bilden die letzteren das Axenmoment G der Reduction für den Punkt M. Da r zur Ebene π senkrecht ist, so fällt das Axenmoment $r \,.\, MP$ in die Ebene π hinein und da ϱ in diese Ebene fällt, so ist das Axenmoment $\varrho \,.\, NQ$ zu ihr senkrecht. Da beide Axenmomente senkrecht zur Geraden MP sind, so wird auch das aus ihnen entspringende G senkrecht zu MP, ist aber im Uebrigen im Allgemeinen schief geneigt gegen die Ebene π. Blos für den Punkt P, für welchen es sich auf $\varrho \,.\, PQ$ reducirt, steht es senkrecht auf π und blos für die Punkte M von ϱ fällt es in die Ebene π hinein. In einem allgemeinen Punkte M ist die Tangente der Neigung von G gegen die Ebene π

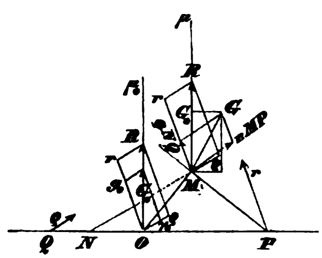

Fig. 27.

$$\frac{\varrho \,.\, NQ}{r \,.\, MP} = \frac{NQ}{MP} \cdot \operatorname{cotg} \alpha .$$

Es gibt also in der Ebene π nur einen Punkt P, in welchem das Axenmoment G der Reduction senkrecht zur Ebene ist. **Man nennt ihn den Pol oder Brennpunkt (Focus) der Ebene. Ebenso gibt es in der Ebene eine Gerade, für deren Punkte das Axenmoment der Reduction in die Ebene hinein fällt. Sie heisst die Charakteristik der**

Ebene. Die Normale der Ebene π im Pol und die Charakteristik derselben sind die Richtungen eines rechtwinkligen Paares von Strecken r, ϱ, welches dem Systeme aequivalent ist.

Um Pol und Charakteristik einer Ebene π zu finden, ist es nicht nöthig, von der Reduction (R, G_0) für die Centralaxe μ_0 des Systems auszugehen, wie wir eben gethan haben; man kann sich fast mit derselben Leichtigkeit der Reduction (R, G) (Fig. 28) für irgend einen beliebigen Stral μ bedienen, um zu demselben Ziele zu gelangen. In dem Schnittpunkte M des Strales μ mit der Ebene π spalten wir wieder die Resultante R in die Componenten r und ϱ senkrecht und parallel zu π. Ebenso zerlegen wir G in die Componenten g, γ, gleichfalls senkrecht und parallel zu π. Die Strecken r und g fallen in der Normalen der Ebene π zusammen, die Strecken ϱ, γ treten in π im Allgemeinen nach verschiedenen Richtungen auseinander. Zwei Ebenen, welche wir durch die Normale von π senkrecht zu γ und zu ϱ legen, schneiden π in zwei Geraden a und b. In a finden wir leicht zur Linken des nach r blickenden Endpunktes von γ einen Punkt P, für welchen $r \,.\, MP = \gamma$ wird, so dass r, nach diesem Punkte übertragen, aequivalent (r, γ) wird. Ebenso finden wir links in Bezug auf den nach ϱ hinsehenden Endpunkt von g auf der Geraden b den Punkt Q', für welchen $\varrho \,.\, MQ' = g$ und damit ϱ, durch ihn hindurchgelegt, aequivalent (ϱ, g) wird. Die beiden Strecken, r in P senkrecht zur Ebene π, ϱ durch Q' gehend in der Ebene π, sind zusammen aequivalent (R, G) und P ist der Pol, die Richtung von ϱ die Charakteristik der Ebene π.

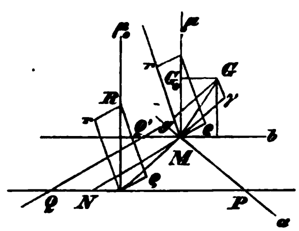

Fig. 28.

Die Ebene, in welcher die Zerlegung von G in g und γ erfolgt, ist die Ebene des Neigungswinkels des Axenmomentes G gegen die Ebene π; senkrecht zu ihr ist die Gerade a, welche den Pol enthält. Hieraus folgt: Alle Geraden, welche in einer Ebene π durch die verschiedenen Punkte M derselben senkrecht zu den Ebenen der Neigungswinkel der den Punkten entsprechenden Axenmomente G gegen die Ebene π gezogen werden können, schneiden sich in ein und demselben Punkte der Ebene π, nämlich dem Pole derselben.

Ebenso ist die Gerade b zur Ebene des Neigungswinkels der Resultanten R gegen π senkrecht.

§. 3. Jede Ebene hat einen Pol und eine Charakteristik. Umgekehrt kann jeder Punkt des Raumes als Pol einer durch ihn hindurchgehenden Ebene angesehen werden, nämlich von derjenigen Ebene, welche auf der Richtung des Axenmomentes G der Reduction dieses Punktes senkrecht steht. Nicht so kann jede Gerade Charakteristik einer durch sie gehend

Ebene sein. Da die Ebene der Reductionselemente R, G eines Punktes P einen um die Centralaxe μ_0 beschriebenen Cylinder berührt, so ist sie senkrecht zu dem Perpendikel, welches von P auf μ_0 gefällt werden kann oder zum kürzesten Abstande von G und μ_0. Daher geht die Ebene π, deren Pol P ist durch den kürzesten Abstand von G und μ_0 hindurch. Die Ebene π, deren Pol P ist, heisst die Polarebene von P. Es entspricht hienach jedem Punkte des Raumes als Pol eine bestimmte durch ihn hindurchgehende Ebene als Polarebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt als Pol. Durch ein Streckensystem sind also zwei reciproke räumliche Systeme bestimmt von der besondern Art, dass die einander zugeordneten Elemente, Punkt und Ebene, dieser in jener liegt und jene durch ihn hindurchgeht. Den Inbegriff beider Systeme in der eben bezeichneten gegenseitigen Lage als ein System (Polarsystem) betrachtet, hat Möbius ein Nullsystem genannt. Nach Cap. IV, §. 12 ist das Moment des Streckensystems für eine durch den Punkt P gehende Axe die Projection des Axenmomentes G auf diese Axe. Da G senkrecht zur Polarebene π von P ist, so ist mithin das Moment für alle Axen in der Ebene π, welche durch den Pol P gehen, Null. Jede Ebene des Nullsystems enthält also einen Stralenbüschel von Axen, deren Momente in Bezug auf das Streckensystem Null sind und der Pol ist der Mittelpunkt dieses Büschels; durch jeden Punkt des Nullsystems gehen unzählige Stralen derselben Eigenschaft, welche alle in die Polarebene des Punktes fallen und in ihr ebenso einen Stralenbüschel bilden.

Statt „Pol" und „Polarebene" unseres Systems sagt Möbius „Nullpunkt" und „Nullebene". Die Beziehungen zwischen den Polen und Polarebenen des Nullsystems können in folgende Sätze zusammengefasst werden:

1. Die Polarebenen α, β, γ ... der Punkte A, B, C, ... einer Ebene π gehen durch den Pol P dieser Ebene. Denn das Axenmoment G in A ist senkrecht zu α und nach §. 2. zugleich senkrecht zur Verbindungslinie AP des Punktes A mit dem Pole P der Ebene π. Daher fällt AP in α und geht mithin α durch P.

2. Die Pole A, B, C ... aller Ebenen α, β, γ ..., welche durch ein und denselben Punkt P gehen, liegen in der Polarebene π des Punktes P. Denn da P in α liegt, so muss die Polarebene π von P durch den Pol A von α gehen. Ebenso für β und B, γ und C, ... Es geht also π durch sämmtliche Pole A, B, C ...

3. Die Pole P, Q ... aller Ebenen π, $\varkappa$, ..., welche durch dieselbe Gerade g hindurchgehen, liegen in einer Geraden g'. Denn man nehme einen Punkt A auf g und bestimme seine Polarebene α, welche durch ihn hindurchgeht. Da die Ebenen π, $\varkappa$ ... alle durch A gehen, so liegen ihre

Pole $P, Q \dots$ sämmtlich auf α; man nehme einen zweiten Punkt B auf g an und sei β seine Polarebene, so liegen die Pole aller Ebenen $\pi, \varkappa \dots$ aus demselben Grunde auch auf β. Daher ist die Schnittlinie g' der Ebenen α, β der Ort aller Pole $P, Q \dots$

4. Die Polarebenen $\pi, \varkappa \dots$ aller Punkte $P, Q \dots$ einer Geraden g laufen alle durch eine Gerade g' hindurch. Denn man lege durch g eine Ebene α und bestimme ihren Pol A, der in α liegt. Da die Punkte $P, Q, \dots$ alle in α liegen, so gehen ihre Polarebenen durch A; man lege eine zweite Ebene β durch g und sei B ihr Pol, so gehen aus gleichem Grunde die Polarebenen von $P, Q \dots$ alle durch B. Daher ist die Verbindungslinie g' der Punkte A und B die gemeinsame Schnittlinie aller Polarebenen $\pi, \varkappa \dots$

5. Die Punktreihe $P, Q \dots$ der Ebenen $\pi, \varkappa \dots$ eines Ebenenbüschels ist projectivisch mit dem Ebenenbüschel. Denn sie liegt perspectivisch zu ihm.

6. Der Ebenenbüschel der Polarebenen $\pi, \varkappa \dots$ der Punkte einer Geraden ist projectivisch mit der Geraden.

7. Wenn g' der Ort der Pole aller Ebenen ist, welche durch die Gerade g gehen, so ist auch g der Ort der Pole aller Ebenen von g' und wenn g die Schnittlinie der Polarebenen aller Punkte ist, die auf der Geraden g' liegen, so ist g' auch die Schnittlinie der Polarebene aller Punkte von g.

Zwei Gerade g, g', von denen jede der Ort der Pole aller Polarebenen der Punkte der andern oder, was dasselbe sagt, jede die Schnittlinie der Polarebenen aller Punkte der andern ist, heissen conjugirte Geraden oder auch conjugirte Polaren.

8. Liegt eine Gerade g in einer Ebene π, so geht die ihr conjugirte Gerade g' durch den Pol P dieser Ebene.

9. Geht die Gerade g durch einen Punkt P, so fällt die ihr conjugirte Gerade g' in die Polarebene π des Punktes.

Als specielle Fälle führen wir folgende auf:

1. Die Pole eines Systems von Parallelebenen liegen in einer zur Centralaxe parallelen Geraden und ihre Charakteristiken erfüllen eine zu ihr parallele Ebene. Es folgt dies unmittelbar aus der obigen Bestimmungsweise von Pol und Charakteristik. Die Axenmomente in den Punkten der Geraden, welche der Ort der Pole ist, sind parallel und gleich.

2. Ist das System von Parallelebenen senkrecht zur Centralaxe, so ist der Ort der Pole die Centralaxe selbst und der Ort der Charakteristiken die unendlich ferne Ebene. Denn in den Schnittpunkten der Ebenen mit der Centralaxe ist das Axenmoment G_0 der Centralaxe parallel; die Abstände der Charakteristik und des Poles von der Centralaxe geben ein

constantes Product, daher ist ersterer unendlich gross, wenn letzterer Null ist.

3. Für ein System von Ebenen parallel der Centralaxe liegen die Pole im Unendlichen und sind die Charakteristiken die Projectionen der Centralaxe auf die Ebenen.

Die Richtungslinien der zu einander rechtwinkligen Strecken r, ϱ, welche zusammen dem gegebenen Streckensystem aequivalent sind, sind conjugirte (nämlich zu einander rechtwinklig conjugirte) Geraden. Die eine Ebene durch r schneidet die Charakteristik ϱ in einem Punkte, für welchen das Axenmoment in die Ebene fällt, welche die Charakteristik mit dem Pole verbindet. Daher ist das Axenmoment senkrecht zu der durch r gelegten Ebene und jener Schnittpunkt ihr Pol. Es ist mithin die Charakteristik der Ort der Pole aller Ebenen, welche durch r gehen.

Der Ort der Pole eines Systems von Parallelebenen ist eine Gerade g (parallel der Centralaxe), deren conjugirte (in welcher sich die Parallelebenen schneiden müssen) unendlich fern ist. Sie heisst ein Durchmesser des Nullsystems, conjugirt zum System der Parallelebenen. Im Allgemeinen stehen die Durchmesser schief auf den ihnen zugeordneten Ebenen; die Centralaxe ist derjenige Durchmesser, welcher senkrecht zu der ihm conjugirten Ebene ist. Das Parallelstralenbündel μ der Reduction der Strecken, welches die Reductionsresultanten enthält, ist das System der Durchmesser des durch das Streckensystem erzeugten Nullsystems.

§. 4. Während wir im vorigen §. einen speciellen Fall conjugirter Geraden im Zusammenhang mit der Streckenreduction betrachtet haben, nämlich den Fall der rechtwinklig conjugirten Geraden, wollen wir jetzt den Zusammenhang conjugirter Geraden überhaupt mit dieser Reduction entwickeln. Zu dem Ende stellen wir uns die Aufgabe, das gegebene Streckensystem auf zwei ihm aequivalente Strecken r, ϱ zu reduciren, von denen die eine, r, der Richtung und Lage nach gegeben ist.

Es sei das Streckensystem durch die Reduction (R, G_0) (Fig. 29) für seine Centralaxe repräsentirt und die Lage von r durch ihren kürzesten Abstand OP von der Centralaxe und seine Neigung gegen dieselbe gegeben. Man reducire das System für P auf (R, G), wo das Axenmoment G aus dem Axenmomente G_0 und dem Axenmomente $R \,.\, OP$ durch rechtwinklige Zusammensetzung sich bildet. Es ist G, sowie R und r senkrecht zu OP in P.

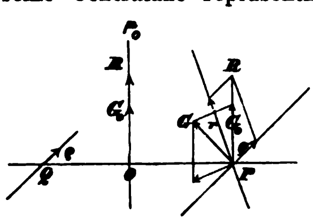

Fig. 29.

Der Punkt P ist der Pol der Ebene, welche man durch OP senkrecht zu G legen kann. Diese Ebene wird von der Ebene der drei Geraden G, R, r

in einer Geraden ϱ geschnitten, welche gleichfalls senkrecht zu OP und G ist. Man kann daher R nach den Richtungen von r und ϱ in die Strecken r, ϱ zerlegen. Nun ist aber die Combination (ϱ, G) wegen der Rechtwinkligkeit von ϱ und G aequivalent einer parallelen Strecke ϱ allein, welche OP in einem Punkte Q schneidet, welcher zur Linken des Endpunktes von G, wenn er nach der Pfeilspitze von ϱ sieht, gelegen ist. Daher sind die beiden Strecken r, ϱ welche durch P und Q gehen und von denen erstere durch den Pol P geht, letztere in dessen Polarebene liegt, dem System der Strecken aequivalent.

Die Richtungslinien dieser Strecken r, ϱ sind conjugirte Gerade. Denn man lege irgend eine Ebene durch r; sie schneide ϱ in einem Punkte M. Reduciren wir das Streckensystem für diesen Punkt, so bildet sich die Resultante R aus der nach M verlegten Strecke r und ϱ; das Axenmoment G aber ist das des Paares $(r, -r)$, welches aus dieser Verlegung entspringt. Dasselbe ist zu der durch r gelegten Ebene senkrecht. Mithin ist M der Pol dieser Ebene und also die Richtungslinie von ϱ der Ort der Pole aller Ebenen, welche durch r gehen, mithin der Richtungslinie von r conjugirt.

Die Richtungslinien zweier einem Streckensystem aequivalenter Strecken müssen conjugirte Gerade sein; doch kann dieser Satz nicht unmittelbar umgekehrt werden. Im Allgemeinen sind auch zwei conjugirte Gerade Richtungslinien für zwei dem System aequivalente Strecken, indessen gibt es einen Ausnahmefall, nämlich, wenn die beiden conjugirten Geraden zusammenfallen. Davon wollen wir nachher besonders reden.

§. 5. Es ist nicht durchaus nothwendig, den Fusspunkt P des kürzesten Abstands der Strecke r von der Centralaxe als Reductionspunkt zu benutzen; man kann dazu jeden andern Punkt auf der Richtungslinie von r ebenso gut wählen. Man wird für ihn die Reduction (R, G) bilden; hierauf durch den gewählten Punkt eine Ebene senkrecht zu G legen, welche die Ebene (Rr) in einer Geraden ϱ schneiden wird. Nun spalte man R in zwei Componenten, r und ϱ längs der gegebenen und der eben gefundenen Richtung und verlege ϱ mit Hülfe des zu ihm senkrechten Axenmomentes G. Man sieht hieraus deutlich, dass wenn r durch den Pol einer Ebene geht, ϱ in die Polarebene fallen muss und dass die Polarebenen aller Punkte von r durch die zu r conjugirte Gerade gehen müssen. Ebenso umgekehrt, dass wenn eine Ebene durch ϱ geht, r durch den Pol derselben gehen muss. Denn indem man die Reduction der Strecken für den Schnittpunkt einer solchen Ebene mit r bildet, findet man, dass das Axenmoment dortselbst senkrecht zur Ebene ist.

§. 6. Sind r, ϱ zwei dem Streckensystem aequivalente Strecken und ist PQ ihr kürzester Abstand, so folgt aus der bekannten Gleichung $G_0 = G \cos (GR)$

da G auf ϱ senkrecht steht, $G_0 = G \sin(R\varrho)$ und also $G_0 R = GR \sin(R\varrho)$. Es ist aber $R \sin(R\varrho)$ die Höhe des Parallelogramms, welches zur Zerlegung von R in r, ϱ gedient hat und daher auch gleich $r \sin(r\varrho)$. Hiemit wird also $G_0 R = Gr \sin(r\varrho)$. Nun ist aber $PQ \,.\, \varrho = G$, folglich $G_0 R = r\varrho \,.\, PQ \sin(r\varrho)$. Es ist aber dieser Ausdruck der 6 fache Inhalt einer Pyramide, welche r, ϱ zu Gegenkanten hat und wobei PQ der kürzeste Abstand dieser Gegenkanten und $(r\varrho)$ der von ihnen gebildete Winkel ist. Wie man also auch immer ein Streckensystem in zwei ihm aequivalente Strecken transformiren mag, stets ist die Pyramide, gebildet aus diesen Strecken als Gegenkanten, von demselben Volumen.

Aus der oben gegebenen Construction conjugirter Geraden folgt, dass der kürzeste Abstand aller Paare conjugirter Geraden die Centralaxe rechtwinklig schneidet. Ebenso folgt, dass P und Q die Pole der Ebenen sind, welche durch ϱ, resp. r und den kürzesten Abstand hindurchgehen.

§. 7. Es kann der Fall eintreten, dass zwei conjugirte Gerade g, g' in eine Gerade l zusammenfallen. Wir nennen eine solche Gerade eine Doppellinie oder eine sich selbst conjugirte Gerade. Für solche Doppellinien gelten folgende Sätze:

1. Damit eine Gerade l eine Doppellinie (gg') sei, genügt es, dass der Pol einer einzigen durch sie hindurchgehenden Ebene auf ihr liege, oder dass die Polarebene eines einzigen ihrer Punkte durch sie hindurchgehe.

Denn es sei α eine Ebene von l und liege ihr Pol A auf l und sei ebenso β irgend eine andere Ebene von l. Da β durch den Pol A geht, so liegt ihr Pol B auf α und da B auch auf β liegen muss, so liegt B in der Schnittlinie von α und β d. h. auf l. Es liegen also die Pole aller Ebenen von l auf l, d. h. es fallen in l zwei conjugirte Gerade g, g' zusammen.

Andererseits sei A ein Punkt von l und gehe seine Polarebene α durch l hindurch. Es sei B ein beliebiger anderer Punkt von l. Da B auf α liegt, so geht β durch den Pol A und da β durch B geht, so geht β also durch AB oder l. Es geht mithin die Polarebene jedes Pnnktes von l durch l hindurch, d. h. es fallen in l zwei conjugirte Gerade g, g' zusammen.

2. Durch jeden Punkt P des Raumes gehen unendlich viele Doppellinien; sie liegen alle in der Polarebene π des Punktes P und bilden also in ihr einen Stralenbüschel (eine Kegelfläche 1. Grades). Denn die Conjugirte g' einer Geraden g, welche durch P geht, fällt in π. Eine Gerade g, welche durch P geht, kann daher nur dann

Doppellinie sein, wenn sie in π fällt. Ist dies der Fall, so enthält sie den Pol P einer Ebene π, welche durch sie hindurchgeht, mithin enthält sie nach 1. die Pole aller Ebenen, welche durch sie hindurchgehen, fällt also mit ihrer Conjugirten g' zusammen. Jede Gerade l von P in π ist daher eine Doppellinie.

In jeder Ebene π des Raumes liegen unendlich viele Doppellinien; sie gehen alle durch den Pol P von π und bilden also einen Stralenbüschel 1. Grades. Denn die Conjugirte g' einer Geraden g, welche in π liegt, geht durch den Pol P. Es kann daher g nur dann Doppellinie sein, wenn sie durch P geht. Ist dies aber der Fall, so geht die Polarebene π eines ihrer Punkte P durch sie hindurch und fällt sie also dann mit ihrer Conjugirten g' zusammen. Jede Gerade l von π, welche durch P geht, ist daher eine Doppellinie.

3. Eine Gerade, welche auf dem Axenmomente eines ihrer Punkte senkrecht steht, ist eine Doppellinie und steht senkrecht auf den Axenmomenten aller ihrer Punkte. Denn eine Gerade, welche auf dem Axenmomente eines ihrer Punkte senkrecht steht, fällt in die Polarebene dieses Punktes und da sie durch den Pol dieser Ebene geht, so ist sie nach 1. eine Doppellinie. Als Doppellinie liegt sie aber in den Polarebenen aller ihrer Punkte und da diese auf den Axenmomenten der Pole senkrecht stehen, so steht sie gleichfalls auf diesen senkrecht.

§. 8. Eine dreifache Mannigfaltigkeit von Geraden, welche den Raum continuirlich erfüllen, nennt man einen Complex von Geraden. Jeder Punkt des Raumes ist Schnittpunkt einer Schaar von Complexstralen, welche eine gewisse Kegelfläche bilden. Jede Ebene des Raumes enthält eine Schaar Stralen, welche eine gewisse Curve berühren. Man kann zeigen, dass die Ordnung der Kegelfläche und die Classe der ebenen Curve durch dieselbe Zahl angegeben wird. Ist n diese Zahl, so heisst der Complex ein Complex $n$ter Ordnung. Die Doppellinien des Nullsystems bilden einen Complex 1. Ordnung, denn alle Linien, welche durch einen Punkt gehen, erfüllen eine Kegelfläche 1. Ordnung, nämlich eine Ebene und alle, welche in eine Ebene fallen, umhüllen eine Linie erster Classe, nämlich einen Punkt. Wir fügen über den Complex unserer Doppellinien noch folgende Sätze hinzu:

1. Eine Gerade l, welche zwei conjugirte Gerade g, g' des Nullsystems schneidet, ist ein Stral des Complexes. Denn der Pol der Ebene (lg) liegt auf g'; er ist nämlich ihr Schnittpunkt mit g'. Dieser Punkt ist aber zugleich der Schnittpunkt von l und g'. Es ist mithin l eine Gerade, welche den Pol einer ihrer Ebenen enthält; sie ist mithin eine Doppellinie oder ein Stral des Complexes.

2. Schneidet ein Complexstral l die eine, g, von zwei conjugirten Geraden g, g' des Nullsystems, so schneidet er auch

die andere. Denn der Pol der Ebene (lg) liegt auf g'. Da aber l eine Doppellinie ist, so liegt der Pol auch auf ihr, mithin muss er auf g und l' liegen d. h. g' und l müssen sich schneiden.

3. Alle Stralen, welche die Centralaxe rechtwinklig schneiden, sind Stralen des Complexes. Denn sie sind senkrecht zu dem Axenmomente G_0 des Schnittpunktes und deshalb Doppellinien.

4. Zwei Paar conjugirte Geraden g, g'; h, h' liegen stets auf einem einfachen Hyperboloïd und sind Erzeugungslinien derselben Art. Denn alle Geraden l, welche drei von ihnen, z. B. g, g'; h schneiden, sind Complexstralen, weil sie g, g' schneiden und müssen, weil sie h schneiden als solche auch h' treffen. Daher gehört h' dem Hyperboloid an, welches durch g, g', h erzeugt wird etc.

Aus den Untersuchungen des §. 3. über die conjugirten Geraden des Nullsystems erhellt, dass diese und mithin auch der Complex der Doppellinien vollkommen bestimmt ist, sobald die Centralaxe und die Grösse $\frac{G_0}{R}$ gegeben sind. Jedes Streckensystem bestimmt also einen Complex ersten Grades. Die Grösse $\frac{R_0}{G}$ heisst der Parameter des Complexes. Die Parallelen zur Centralaxe, die Stralen μ von der Richtung aller Reductionsresultanten, heissen Durchmesser des Complexes und die Centralaxe die Hauptlinie desselben. Zu einer leichten Uebersicht über die Ordnung der Stralen des Complexes führt der folgende Satz:

5. Das Produkt aus dem Abstande r eines Complexstrales l von der Hauptlinie oder Centralaxe und der Tangente seiner Neigung α gegen die Hauptlinie ist constant für alle Stralen, nämlich es ist $r \operatorname{tg} \alpha$ gleich dem Parameter $\frac{G_0}{R}$ des Complexes.

Denn es sei P (Fig. 30) der Fusspunkt des kürzesten Abstands r des Strales l von der Centralaxe μ_0, so ist P der Pol der Ebene (r, l), da auch r ein Complexstral ist, weil er die Centralaxe rechtwinklig schneidet und alle Complexstralen einer Ebene durch deren Pol gehen. Reducirt man also das Streckensystem für den Punkt P indem man die Reduction (R, G_0) der Centralaxe dorthin überträgt, so muss das Axenmoment G für den Punkt P senkrecht zur Ebene (r, l), also

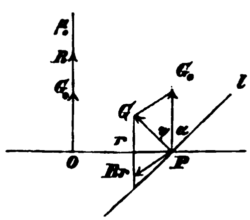

Fig. 30.

auch senkrecht zu l sein. Da das Axenmoment Rr, welches aus dieser Uebertragung entspringt, senkrecht zu G_0 und r ist, so fällt es in die Ebene (lG_0G). Der Winkel α, unter welchem der Stral l gegen die Richtung der

Centralaxe geneigt ist, ergänzt daher den Winkel ψ, welchen G mit dieser Richtung bildet zu $\frac{1}{2}\pi$. Daher ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \psi = \frac{G_0}{R r}$$

woraus folgt:

$$r \operatorname{tg} \alpha = \frac{G_0}{R}.$$

Aus den früheren Betrachtungen über conjugirte Gerade erhellt, dass wenn ein Paar conjugirte Geraden zusammen parallel der Centralaxe verschoben oder um die Centralaxe umgedreht wird, sie auch in der neuen Lage ein Paar conjugirter Geraden darstellen. Da nun jeder sie schneidende Stral ein Complexstral ist und sich zu jedem solchen Strale auch stets conjugirte Geraden finden lassen, die ihn schneiden, so folgt:

6. Der Complex bleibt mit sich selbst in Coincidenz, d. h. jeder Complexstral bleibt Complexstral, wenn der Complex parallel zur Centralaxe verschoben oder um die Centralaxe umgedreht wird oder wenn beides zugleich geschieht.

Aus dem Satze 5. folgt, dass alle Complexstralen, welche gleichen Abstand von der Centralaxe haben, gleich geneigt sind gegen dieselbe. Beschreibt man daher im Abstande r um die Centralaxe einen Cylinder und construirt auf diesem eine Schraubenlinie, welche unter dem Winkel α, welcher mit r zusammen der Relation unter 5. genügt, gegen dessen Erzeugungslinien geneigt ist, so sind die Tangenten dieser Schraubenlinien Complexstralen. Es gibt unendlich viele solcher Schraubenlinien. Da ferner zwei Complexstralen sich im Pole der Ebene schneiden müssen, welche sie bestimmen, so ist jeder Punkt einer solchen Schraubenlinie der Pol seiner Schmiegungsebene (der Ebene zweier unendlich naher Tangenten). Wächst r, so nimmt α ab; die Complexstralen im Unendlichen sind also der Centralaxe parallel. Nimmt r ab, so wächst α und nähert sich π, wenn r Null wird. Man erhält dann alle Complexstralen, welche die Centralaxe rechtwinklig schneiden. Man kann daher sagen:

Die sämmtlichen Stralen des Complexes sind im Raum so geordnet, dass alle Stralen, welche denselben Abstand von der Centralaxe haben (also einen Cylinder berühren, der um sie mit dem gemeinsamen Abstande der Stralen beschrieben werden kann) und welche gegen die Centralaxe eine Neigung haben, deren Tangente das Verhältniss des Parameters zu dem genannten Abstand ist, dem Complexe angehören. Sie sind die Tangenten eines Systems congruenter und paralleler Schraubenlinien des Cylinders von derselben Neigung gegen die Erzeugenden des Cylinders. Mit wachsendem Abstande von der Centralaxe nimmt die Neigung der Stralen gegen diese Axe ab, so dass die Stralen der unendlichfernen Ebene der Centralaxe parallel werden, während die Stralen für verschwindenden Abstand das System aller Geraden bilden, welche die Centralaxe rechtwinklig schneiden.

Weitere Entwickelungen über die Combination zweier Complexe, über die Bedeutung der Congruenzen für Streckensysteme etc. werden bei den einzelnen Lehren der Mechanik, für welche sie von Wichtigkeit sind, gegeben werden.

Einige Literatur über Streckensysteme.

Der Begriff der geometrischen Summe und Differenz wurde in aller Schärfe von Möbius dargestellt in seinen „Elementen der Mechanik des Himmels". Leipzig 1843. Der grösste Theil seiner Abhandlungen über die verschiedensten Fragen der Geometrie behandelt die geometrischen Grössen gleichzeitig nach Werth und Richtung.

Systematische Entwickelung der Streckentheorie enthalten:

Grassmann, H., Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1843 und 1862.

Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853, und Elements of Quaternions, Dublin 1866.

Tait, An elementary treatise on Quaternions. 2d. edit. London 1874.

Kelland and Tait, Introduction to Quaternions. London 1873.

Unverzagt, Theorie der geometrischen und longimetrischen Quaternionen. Wiesbaden 1876.

Auf Strecken und Punktsysteme mit besonderer Rücksicht auf ihre Verwendung in der Mechanik beziehen sich die Schriften:

Chelini, Sulla composizione geometrica de sistemi di rette, di aree e di punti. Memorie dell'Accademia delle Scienze del Istituto di Bologna. Serie 2da, T. X, p. 343. (1870).

Chelini, Nuova geometria de' complessi. Mem. dell'Accademia di Bologna. Ser. 3za, T. I, p. 125. (1871).

Sturm, R., Sulle forze in equilibrio. Annali di matematica diretti da Brioschi e Cremona. Ser. 2da, T. VII, p. 217 (1875—76).

Die specielleren Schriften werden wir an den Stellen des Buches, für die sie von Bedeutung sind, erwähnen.

VI. Capitel.

Geometrie der Massen. Massenmittelpunkt und Momente ersten Grades.

§. 1. Die Mechanik hat das Bedürfniss, Punkten, welche zu einem System zusammentreten, verschiedenen Werth beizulegen. Sie ertheilt ihnen zu diesem Zwecke Coefficienten, welche im Allgemeinen aller möglichen Zahlwerthe fähig sein können. Wir nennen einen solchen, einem Punkte M beigelegten Coefficienten m die Masse des Punktes. Dabei nehmen wir dies Wort in einem allgemeineren Sinne, als gewöhnlich geschieht. In den Anwendungen hat dieser Coefficient mannigfache Bedeutung; er kann ein Quantum Materie bedeuten, oder ein Quantum elektrischen Agens oder Magnetismus u. s. w.; er kann positiv oder negativ sein und der Werth Null ist für ihn nicht ausgeschlossen. Diese Coefficienten dienen u. a. auch dazu, ein System seinem räumlichen Umfange nach zu begrenzen und zu beschränken. Ein Punkt, dessen Coefficient Null ist, fällt aus dem System heraus; man kann diese Coefficienten in gewissem Sinne mit dem Discontinuitätsfactor bestimmter Integrale vergleichen, der auch dazu dient, mit Hülfe seines Nullwerthes die Elemente eines über den unendlichen Raum ausgedehnten Integrals auszuscheiden, welche ausserhalb eines gegebenen Bereiches liegen. Unter der Masse eines Punktsystems M, M_1, M_2, $\dots M_i$, $\dots$, dessen Punkte die Massen $m, m_1, m_2, \dots m_i, \dots$ besitzen, verstehen wir die Summe

$$m + m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots = \Sigma m_i$$

der Massen aller seiner Punkte.

§. 2. Es sei gegeben ein System von Punkten M_i mit den Massen m_i. Von einem beliebigen Punkte O aus ziehen wir Stralen OM_i durch die Punkte und nehmen auf ihnen Strecken $m_i \,.\, OM_i$ oder $m_i \,.\, M_i O$ an je nach dem Vorzeichen der Massen, wobei die Stellung der Buchstaben den Sinn der Strecken bezeichnen soll. Wir bilden von O aus die geometrische Summe $[OR]$ dieser Strecken und nehmen auf ihr den Punkt S so an, dass $\Sigma m_i \,.\, [OS] = [OR]$ wird. Die Lage des Punktes S ist alsdann unabhängig von der Wahl des Punktes O und hängt blos von der Lage der Punkte M_i gegen einander und von ihren Coefficienten m_i ab. Den Punkt S nennen wir den Massenmittelpunkt des Systems. Für den Fall, dass die Massen aller Punkte gleiches Zeichen haben, nennt man ihn auch den Schwerpunkt des Systems.

Wir wollen diese Behauptung auf zwei Arten beweisen. Wir projiciren das Polygon, dessen Schlusslinie $[OR]$ ist, auf eine beliebige Axe, die wir als Axe der x bezeichnen wollen. Von irgend einem Anfangspunkt gerechnet seien x_i die Abscissen der Punkte M_i, x_0 und x_1 die der Punkte O und S; dann sind $m_i(x_i - x_0)$ die Projectionen der Strecken $[m_i \,.\, OM_i]$, während wegen $[OR] = \Sigma m_i \,.\, [OS]$ die Projection von $[OR]$ gleich $\Sigma m_i \,.\, (x_1 - x_0)$ ist. Man hat daher, weil die Projection der Resultanten $[OR]$ gleich der Summe der Projectionen der Componenten $m_i[OM_i]$ sein muss:

$$\Sigma m_i \,.\, (x_1 - x_0) = \Sigma m_i (x_i - x_0)$$

oder

$$\Sigma m_i \,.\, x_1 = \Sigma m_i x_i ,$$

welche Gleichung für jede Axe gilt und unabhängig von der Abscisse x_0 des Punktes O ist. Ziehen wir durch den Anfangspunkt der x noch zwei andere unter sich und zu der Axe der x rechtwinklige Axen der y und z, so ist ebenso

$$\Sigma m_i \cdot y_1 = \Sigma m_i y_i ,$$
$$\Sigma m_i \,.\, z_1 = \Sigma m_i z_i .$$

Diese drei Gleichungen bestimmen durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 die Lage des Punktes S. Da sie die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes O nicht enthalten, so ist S ein fester Punkt, welche Lage O auch immer annehmen möge.

Ohne sich der Projectionen zu bedienen, kann man den Satz mit Hülfe der geometrischen Summen erweisen. Es ist, wenn Σ die geometrische Summation bedeutet, nach Grösse, Richtung und Sinn für den Radiusvector $[OS]$, welcher auf der Resultanten $[OR]$ der Strecken liegt, welche sich in O schneiden,

$$\Sigma m_i \,.\, [OS] = \Sigma[m_i \,.\, OM_i] .$$

Ebenso hat man für einen zweiten Punkt O', durch welchen man Stralen nach den Punkten M_i zieht und auf ihnen die Strecken $m_i[O'M_i]$ aufträgt, deren Resultante $[OR']$ und auf ihr den Punkt S' so bestimmt, dass $\Sigma m_i \,.\, [O'S'] = [O'R']$ wird:

$$\Sigma m_i \,.\, [O'S'] = \Sigma[m_i \,.\, O'M_i] .$$

Nun ist

$$[O'M_i] = [O'O] + [OM_i]$$

und hiemit wird die vorhergehende Gleichung

$$\Sigma m_i \,.\, [O'S'] = \Sigma m_i([O'O] + [OM_i]) = \Sigma m_i [O'O] + \Sigma[m_i \,.\, OM_i]$$
$$= [O'O]\Sigma m_i + \Sigma[m_i \,.\, OM_i] .$$

Durch Subtraction der Gleichung $\Sigma m_i \,.\, [OS] = \Sigma[m_i \,.\, OM_i]$ erhält man, wenn man den gemeinschaftlichen Factor Σm_i tilgt

$$[O'S'] - [OS] = [O'O] \quad \text{oder} \quad [O'S'] = [O'O] + [OS]$$

d. h. $[O'S']$ ist die geometrische Summe von $O'O$ und OS oder der Endpunkt S' von $[O'S']$ fällt mit S zusammen. Demnach ist S von der Lage des Punktes O unabhängig.

§. 3. Die Strecke $[m_i \,.\, OM_i]$ nennt man das polare Moment 1. Grades der Masse m_i in Bezug auf den Punkt O und $\Sigma[m_i \,.\, OM_i]$ das polare Moment 1. Grades des Punktsystems (M_i) in Bezug auf denselben Punkt. Legt man dem Massenmittelpunkte S den Coefficienten Σm_i bei, so können wir die vorstehenden Entwickelungen in dem Satze aussprechen:

In jedem Systeme von Massenpunkten gibt es einen bestimmten nur von der gegenseitigen Lage dieser Punkte und ihren Massen seiner Lage nach abhängigen Punkt S, den Massenmittelpunkt des Systems, so dass das polare Moment ersten Grades des Systems in Bezug auf jeden Punkt O des Raumes gleich ist dem polaren Momente des Punktes S in Bezug auf denselben Punkt O, wenn dem Punkte S die Masse des Systems als Coefficient zuertheilt wird.

Die Grösse $m_i x_i$, nämlich das Product der Masse eines Punktes und seines Abstandes von einer Ebene (der yz-Ebene) heisst des Moment 1. Grades der Masse m_i in Bezug auf diese Ebene, $\Sigma m_i x_i$ nennen wir das Moment 1. Grades des Systems (M_i) in Bezug auf dieselbe Ebene. Hiemit können wir den folgenden Satz hinzufügen, da die Axe der x eine ganz beliebige war:

Das Moment ersten Grades eines Systems von Massenpunkten in Bezug auf eine beliebige Ebene des Raumes ist gleich dem Momente ersten Grades des Massenmittelpunktes in Bezug auf dieselbe Ebene, wenn diesem Punkt die Masse des Systems als Coefficient zuertheilt wird.

Als Corollarien fügen wir hinzu:

1. Das polare Moment 1. Grades ist für alle Punkte O einer um den Massenmittelpunkt S beschriebenen Kugelfläche constant und verschwindet nur dann, wenn O mit S zusammenfällt. Das Moment 1. Grades bezüglich einer Ebene ist für die Berührungsebenen einer um S beschriebenen Kugelfläche constant und verschwindet blos für die Ebenen des Punktes S. — Für ebene Systeme tritt an die Stelle der Kugel ein Kreis und an die Stelle der Ebene eine Gerade.

2. Der Massenmittelpunkt eines ebenen Punktsystems fällt in die Ebene desselben, der eines geradlinigen in die Gerade.

3. Haben die Massenpunkte paarweise gleiche Massen und liegen je zwei solche Punkte gleicher Masse symmetrisch gegen eine Ebene, so enthält diese Symmetrieebene den Massenmittelpunkt; gibt es zwei solche Symmetrieebenen, so liegt er in der Schnittlinie derselben; sind drei solche vorhanden, so ist er ihr gemeinsamer Punkt.

4. Gleiches gilt von Diametralebenen, d. h. von Ebenen, welche ein System von Parallelstrecken halbiren, welche die Punkte gleicher Masse paarweise verbinden.

5. Hat das System eine Symmetrieaxe d. h. eine Gerade, welche die Verbindungslinien paarweise gleicher Massen halbirt, so liegt der Massenmittelpunkt in ihr.

6. Hat das System einen Mittelpunkt, d. h. sind die Massen paarweise

gleich und schneiden sich die Verbindungslinien aller solcher Paare gleicher Massen in einem Punkte, so ist er der Massenmittelpunkt.

7. Projicirt man ein System von Massenpunkten auf eine Gerade oder eine Ebene (rechtwinklig oder schief) und ertheilt man der Projection jedes Punktes die Masse des Hauptpunktes, so ist die Projection des Massenmittelpunktes der Massenmittelpunkt des Projectionssystems.

§. 4. Der Massenmittelpunkt S von Massen gleichen Zeichens ist ein Punkt mittleren Abstandes in Bezug auf jede Ebene. Denn setzt man in dem Momente $\Sigma m_i x_i$ des Systems in Bezug auf eine beliebige Ebene an die Stelle der Abstände x_i der einzelnen Punkte des Systems das Maximum β und das Minimum α dieser Abstände, so wird

$$\alpha \Sigma m_i < \Sigma m_i x_i < \beta \Sigma m_i,$$

daher wird die Grösse ξ, wenn sie continuirlich von α bis β geht, einen mittleren Werth x_1 erreichen, für welchen $x_1 \Sigma m_i = \Sigma m_i x_i$ wird. Für den Fall, dass die Massen m_i alle einander gleich sind, wird, wenn n ihre Anzahl, $x_1 = \frac{1}{n} \Sigma x_i$, also x_1 das arithmetische Mittel aller Abstände. Ebenso kann man S als einen Punkt mittleren Abstandes und mittlerer Abstandsrichtung in Bezug auf jeden Punkt O des Raumes ansehen.

§. 5. Zerlegt man das System der Massenpunkte in mehrere Partialsysteme, für welche in Bezug auf die Coordinatenebenen

$$\Sigma_1 mx,\ \Sigma_2 mx,\ \Sigma_3 mx, \ldots;\ \Sigma_1 my,\ \Sigma_2 my,\ \Sigma_3 my, \ldots;\ \Sigma_1 mz,\ \Sigma_2 mz,\ \Sigma_3 mz, \ldots$$

die Momente sind, während Σmx, Σmy, Σmz die Momente des Gesammtsystems bedeuten sollen, so hat man

$$\begin{aligned}
\Sigma mx &= \Sigma_1 mx + \Sigma_2 mx + \Sigma_3 mx + \cdots = \xi_1 \Sigma_1 m + \xi_2 \Sigma_2 m + \xi_3 \Sigma_3 m + \cdots \\
\Sigma my &= \Sigma_1 my + \Sigma_2 my + \Sigma_3 my + \cdots = \eta_1 \Sigma_1 m + \eta_2 \Sigma_2 m + \eta_3 \Sigma_3 m + \cdots \\
\Sigma mz &= \Sigma_1 mz + \Sigma_2 mz + \Sigma_3 mz + \cdots = \zeta_1 \Sigma_1 m + \zeta_2 \Sigma_2 m + \zeta_3 \Sigma_3 m + \cdots
\end{aligned}$$

wenn $\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2;\ \xi_3, \eta_3, \zeta_3; \ldots$ die Coordinaten der Massenmittelpunkte der Partialsysteme sind. Damit werden aber die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Gesammtmassenmittelpunktes aus den Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned}
x_1 \Sigma m &= \xi_1 \Sigma_1 m + \xi_2 \Sigma_2 m + \xi_3 \Sigma_3 m + \cdots \\
y_1 \Sigma m &= \eta_1 \Sigma_1 m + \eta_2 \Sigma_2 m + \eta_3 \Sigma_3 m + \cdots \\
z_1 \Sigma m &= \zeta_1 \Sigma_1 m + \zeta_2 \Sigma_2 m + \zeta_3 \Sigma_3 m + \cdots
\end{aligned}$$

d. h. der Massenmittelpunkt des Gesammtsystems ist der Mittelpunkt der Massen der Partialsysteme, wenn diese Massen den Partialmassenmittelpunkten als Coefficienten zuertheilt werden. Man sieht sofort, dass auch das polare Moment des Gesammtsystems für jeden Punkt gleich der geometrischen Summe der polaren Momente der Partialmassenmittelpunkte ist, wenn diesen die Massen der Partialsysteme zugetheilt werden.

Es ist gleichgültig, auf welche Weise man das Gesammtsystem in Partialsysteme zerlegt. Zerlegen wir dasselbe z. B. in zwei Partialsysteme mit den Massenmittelpunkten S_1 und S_2 und den Massen μ_1, μ_2, so muss die Gerade S_1S_2 für alle solche Zerlegungen durch den Massenmittelpunkt S des Gesammtsystems hindurchgehen. Indem man die polaren Momente für S_1, S_2 nimmt und sie jedesmal dem polaren Momente des Gesammtsystems gleichsetzt, erhält man $\Sigma m \,.\, S_1 S = \mu_2 \,.\, S_1 S_2$, $\Sigma m \,.\, SS_2 = \mu_1 \,.\, S_1 S_2$, mithin

$$\frac{S_1 S}{\mu_2} = \frac{S S_2}{\mu_1} = \frac{S_1 S_2}{\Sigma m}.$$

Beschreibt der Massenmittelpunkt S_1 des einen Partialsystems eine Curve während S_2 fest bleibt, so beschreibt der Massenmittelpunkt des Gesammtsystems eine dieser ähnliche Curve.

§. 6. Es seien S der Massenmittelpunkt der Punkte $M_1, M_2, \ldots M_i, \ldots$ mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_i, \ldots$ und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_i, \ldots$ die Entfernungen $SM_1, SM_2, \ldots SM_i, \ldots$ desselben von den Systempunkten. Es seien ferner O ein beliebiger Punkt des Raumes im Abstande $SO = R$ von S und $r_1, r_2, \ldots r_i, \ldots$ seine Abstände $OM_1, OM_2, \ldots OM_i, \ldots$ von denselben Punkten. Die Dreiecke wie SOM_i geben

$$r_i^2 = R^2 + \varrho_i^2 - 2 R \varrho_i \cos(\varrho_i R),$$

und wenn man diese Gleichung mit m_i multiplicirt und nach dem Index i durch das ganze System summirt, so erhält man

$$\Sigma m_i r_i^2 = \Sigma m_i \,.\, R^2 + \Sigma m_i \varrho_i^2 - 2 R \Sigma m_i \varrho_i \cos(\varrho_i R),$$

welche Gleichung sich aber auf

$$\Sigma m_i r_i^2 = \Sigma m_i \,.\, R^2 + \Sigma m_i \varrho_i^2$$

reducirt, da $\varrho_i \cos(\varrho_i R)$ die Projection von SM_i auf SO d. h. den Abstand der Masse m_i von der zu SO senkrechten Ebene des Massenmittelpunktes bedeutet und also $\Sigma m_i \varrho_i \cos(\varrho_i R)$ als Moment des Systems in Bezug auf diese Ebene verschwindet. Das Product $m_i r_i^2$ aus der Masse eines Punktes und dem Quadrate seines Abstandes von einem Pole O nennt man das polare quadratische Moment der Masse m_i in Bezug auf den Pol O und die Summe $\Sigma m_i r_i^2$ der quadratischen Momente aller Massen des Systems das polare quadratische Moment des Systems in Bezug auf denselben Pol.

Demnach kann man den Inhalt der vorstehenden Gleichung so aussprechen:

Das polare quadratische Moment eines Massenpunktsystems in Bezug auf irgend einen Punkt O des Raumes als Pol ist die Summe aus dem polaren quadratischen Momente desselben in Bezug auf den Mittelpunkt S und dem polaren quadratischen Mo-

mente des Massenmittelpunktes S in Bezug auf O, wenn dem Punkte S die Masse des Systems beigelegt wird.

Da $\Sigma m_i \varrho_i^2$ unabhängig von der Lage des Punktes O ist, so variirt $\Sigma m_i r_i^2$ blos mit R; daher ist das polare quadratische Moment eines Systems für alle Pole einer um den Massenmittelpunkt S des Systems als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche von demselben Werthe; es wird ein Minimum für den Massenmittelpunkt selbst als Pol und wächst mit der Entfernung des Poles von S.

Man kann einen Mittelwerth k der Grössen r_i so bestimmen, dass $\Sigma m_i \,.\, k^2 = \Sigma m_i r_i^2$ wird. Wir nennen k den Radius des polaren quadratischen Momentes bezüglich des Punktes O. Ebenso ist dann k_0 der Radius des polaren quadratischen Momentes für den Massenmittelpunkt S, wenn $\Sigma m_i \,.\, k_0^2 = \Sigma m_i \varrho_i^2$. Indem man diese Grössen in die zuletzt entwickelte Gleichung einführt, nimmt sie die Form an

$$k^2 = R^2 + k_0^2.$$

Der Radius k des polaren quadratischen Momentes eines Punktsystems für irgend einen Punkt O ist daher die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten der Radius k_0 des polaren quadratischen Momentes für den Massenmittelpunkt S und der Abstand R des Punktes O von S sind. k_0 ist der Minimalwerth von k.

Sind k', R' die einem zweiten Puukte O' entsprechenden Grössen, so erhält man ebenso $k'^2 = R'^2 + k_0^2$, also

$$k^2 - k'^2 = R^2 - R'^2.$$

Hieraus folgt leicht, dass der Massenmittelpunkt in der Ebene des Kreises liegt, in welchem sich zwei um O, O' mit k, k' als Radien beschriebene Kugeln schneiden, d. h. er liegt in der Potenzebene der beiden Kugeln.

Dies führt zu dem Satze:

Beschreibt man um vier Punkte O, O', O'', O''' mit den Radien k, k', k'', k''' der polaren quadratischen Momente eines Massenpunktsystems in Bezug auf diese Punkte vier Kugelflächen, so ist der Massenmittelpunkt des Systems der Punkt gleicher Potenzen in Bezug auf dieselben. Denkt man sich um alle Punkte des Raumes solche Kugeln beschrieben, jede mit dem, dem Punkte entsprechenden Radius k, so haben je vier solcher Kugeln dasselbe Potenzcentrum.

Man kann das polare quadratische Moment für den Massenmittelpunkt S so darstellen, dass in dem Ausdrucke desselben die Quadrate der Abstände der Systempunkte von einander statt der Abstände der Systempunkte von S vorkommen. Aus dem Dreiecke SM_iM_k, welches S mit irgend zwei Systempunkten M_i, M_k bildet, folgt nämlich

$$\varrho_i^2 + \varrho_k^2 - 2\varrho_i\varrho_k \cos(\varrho_i\varrho_k) = c_{ik}^2,$$

wenn $c_{ik} = M_i M_k$ ist. Multipliciren wir diese Gleichung mit dem Producte $m_i m_k$ der Massen der Punkte M_i, M_k und summiren sie zunächst nach i durch das System, so ergibt sich

$$m_k \Sigma m_i \varrho_i^2 + m_k \varrho_k^2 \Sigma m_i - 2 m_k \varrho_k \Sigma m_i \varrho_i \cos(\varrho_i\varrho_k) = m_k \Sigma m_i c_{ik}^2.$$

Hierin ist $\Sigma m_i \varrho_i \cos(\varrho_i\varrho_k) = 0$, weil diese Grösse das Moment 1. Grades des Systems in Bezug auf die zu ϱ_k senkrechte Ebene des Punktes S bedeutet. Es bleibt also die Gleichung

$$m_k \Sigma m_i \varrho_i^2 + m_k \varrho_k^2 \Sigma m_i = m_k \Sigma m_i c_{ik}^2,$$

welche wir nach k durch das System hindurch summiren wollen. Dies liefert links

$$\Sigma m_i \Sigma m_i \varrho_i^2 + \Sigma m_i \Sigma m_k \varrho_k^2 \quad \text{oder} \quad 2\Sigma m_i \Sigma m_i \varrho_i^2$$

und rechts

$$\Sigma\Sigma m_i m_k c_{ik}^2,$$

in welcher Doppelsumme jedes Glied $m_i m_k c_{ik}^2$ doppelt vorkommt. Dividiren wir also beide Seiten der Gleichung mit 2 und schreiben für die Summe rechts $\Sigma m_i m_k c_{ik}^2$, welche Summe so zu verstehen ist, dass nur je zwei verschiedene m_i und m_k mit c_{ik}^2 zusammentreten und jede solche Verbindung nur einmal zu nehmen ist, so bleibt

$$\Sigma m_i \,.\, \Sigma m_i \varrho_i^2 = \Sigma m_i m_k c_{ik}^2,$$

durch welche Formel das polare quadratische Moment $\Sigma m_i \varrho_i^2$ in der gewünschten Weise dargestellt werden kann.

Man erhält hieraus

$$\frac{\Sigma m_i \varrho_i^2}{\Sigma m_i} = k_0^2 = \frac{\Sigma m_i m_k c_{ik}^2}{(\Sigma m_i)^2}.$$

Die Radien k der vorstehenden Betrachtung können reell oder imaginär sein, je nachdem $\Sigma m_i \varrho_i^2$ und Σm_i gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

§. 7. Die Systeme bestehen aus getrennten Massenpunkten oder ihre Punkte bilden ein Contiuum. Ein continuirliches System heisst **homogen**, wenn alle seine Punkte gleiche Masse besitzen, **heterogen** im anderen Falle. Je nachdem das System eine, zwei oder drei Dimensionen besitzt, ist jeder Massenpunkt als ein mit Masse behaftetes Linien-, Flächen- oder Volumenelement aufzufassen. Bei homogenen continuirlichen Systemen versteht man unter **specifischer Masse** die Summe aller Massen der Raumeinheit (Linien-, Flächen- oder Volumeneinheit). Das Wort „specifisch" braucht man dabei in dem Sinne, dass es das bezeichnet, was der Raumeinheit je nach der Species des Systems zukommt. Ist daher M die Masse des Raumes V vom System, so ist die specifische Masse des Systems

$$\varrho = \frac{M}{V}$$

und also auch $M = \varrho V$ und $V = \frac{M}{\varrho}$.

Besteht das System aus einem Aggregate homogener Massen $M', M'', M''', \ldots$ welche die Räume $V', V'', V''', \ldots$ einnehmen und die specifischen Massen $\varrho', \varrho'', \varrho''' \ldots$ besitzen, so versteht man unter der mittleren specifischen Masse des Systems die specifische Masse, welche die Gesammtmasse nach Ausgleichung der Massenvertheilung erhält, ohne dass eine Aenderung des Gesammtvolumens eintritt. Ist ϱ die mittlere specifische Masse, so muss demzufolge

$$\varrho(V' + V'' + V''' \cdots) = M' + M'' + M''' + \cdots = \varrho' V' + \varrho'' V'' + \varrho''' V''' \cdots$$

sein, woraus ϱ folgt.

Bei einem hetrogenen continuirlichen System kann von specifischer Masse ϱ nicht im Allgemeinen, sondern nur von specifischer Masse in jedem einzelnen Punkte M die Rede sein. Man versteht darunter die Masse, welche der Raumeinheit zukommen würde, wenn alle ihre Punkte Masse von der Beschaffenheit der Masse des fraglichen Punktes hätten. Um dieselbe zu bestimmen, sei Δv ein Raumelement des Systems, welches jenen Punkt M enthält und Δm die Summe aller Massen desselben; nach Ausgleichung dieser Massen würde $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ die mittlere specifische Masse sein, d. h. die Masse, welche die Raumeinheit besitzen würde, wenn sie Masse von der ausgeglichenen Beschaffenheit enthielte. Lässt man nun Δv ohne Ende abnehmen, wodurch Δm sich mehr und mehr der Masse des Punktes M nähert, so nähert sich der Quotient beider der Masse der Raumeinheit von der Beschaffenheit der Masse dieses Punktes oder der specifischen Masse ϱ in diesem Punkte. Nach Vollendung des Grenzenüberganges erhält man also für die specifische Masse in M die Formel $\varrho = \frac{dm}{dv}$. Sie wird also durch den Quotienten des Massenelementes durch das Raumelement dargestellt. Dem Obigen ähnlich hat man $dm = \varrho dv$, $dv = dm : \varrho$. Diese erweiterte Definition der specifischen Masse des heterogenen Systems enthält die für das homogene System gegebene in sich; die Vergleichung der Formeln für beide zeigt, dass man berechtigt ist, jedes hetrogene System in seinen Elementen als homogen anzusehen.

Die specifische Masse $\varrho = \frac{dm}{dv}$ wird von den namhaftesten Schriftstellern die **Dichtigkeit** genannt, z. B. von Gauss. In technischen Schriften ist die Bezeichnungsweise „specifische Masse" üblich geworden und braucht man den Ausdruck „Dichtigkeit δ" für das Verhältniss der specifischen Masse ϱ zur specifischen Masse ϱ_0 irgend eines, übrigens beliebig wählbaren homogenen Systems, so dass $\delta = \varrho : \varrho_0$ und $\varrho = \delta\,\varrho_0$ wird. In den Anwendungen betrachtet man Wasser als ein homogenes continuirliches System und nimmt für ϱ_0 die specifische Masse des Wassers.

§. 5. Für homogene Systeme erlangt der Mittelpunkt der Massen eine rein geometrische Bedeutung; in diesem Falle wird die Masse dem Rauminhalte proportional und verschwindet als solche aus der Untersuchung.

Archimedes hat bereits Massenmittelpunkte homogener Systeme bestimmt (Archimedes de aequiponderantibus). Er gründete seine Untersuchungen auf den Satz: Aehnliche homogene Systeme haben ähnlich liegende Massenmittelpunkte. Wird nämlich für irgend eine homogene Figur der Mittelpunkt der Masse durch eine Linienconstruction gefunden, so erfordert die Auffindung desselben für eine ähnliche Figur blos eine Vergrösserung oder Verkleinerung nach dem Aehnlichkeitsverhältnisse beider und führt damit zu desselben relativen Lage jenes Punktes in der zweiten Figur, wie in der ersten. Liegen beide ähnliche Figuren parallel und sind AB, $A'B'$ zwei homologe Strecken derselben, sowie a, b; a', b' die Abstände ihrer Endpunkte von irgend einer beliebigen Ebene (oder auch für ebene in derselben Ebene liegende Figuren ihre Abstände von einer Geraden dieser Ebene), so liefert die Aehnlichkeit der Figuren $(a - b) : (a' - b') = AB : A'B'$.

Im folgenden Capitel geben wir Methoden zur Bestimmung der Masse und des Massenmittelpunktes verschiedener Systeme, nämlich 1. von Systemen discreter Massenpunkte, 2. von Linien und Verbindungen von Linien, 3. von Flächen und 4. von körperlichen Gebilden.

VII. Capitel.

Methoden und Beispiele zur Bestimmung von Massen und Massenmittelpunkten.

§. 1. Massenmittelpunkt von Systemen discreter Punkte.

1. Der Mittelpunkt S zweier Massen m, m', welche den Punkten M, M' angehören, liegt in der Verbindungslinie MM' der beiden Punkte und theilt den Abstand MM' im umgekehrten Verhältniss der Massen. Sind die Massen von gleichem Zeichen, so liegt S zwischen M, M', sind sie von verschiedenem Zeichen, so liegt er ausserhalb MM' auf der Seite der grösseren Masse. Nach Cap. VI, §. 5 ist:

$$(m + m')\,MS = m' \,.\, MM'\,, \quad (m + m')\,.\,M'S = m \,.\, M'M\,,$$

also

$$\frac{MS}{m'} = \frac{SM'}{m}\,.$$

Sind m, m' gleich und gleichen Zeichens, so liegt S in der Mitte von MM'; sind sie entgegengesetzt gleich, so wird $MS = \infty$. Ueberhaupt ist $MS = \infty$ in allen Fällen, in welchen $m + m' = 0$ wird.

2. Massenmittelpunkt S dreier Massen a, b, c, welche den Ecken A, B, C eines Dreiecks angehören (Fig. 31). Der Massenmittelpunkt A' von b, c liegt auf BC, der B' von c, a auf CA, der C' von a, b auf AB, so dass

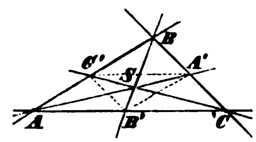

Fig. 31.

$$BA' : A'C = c : b, \quad CB' : B'A = a : c,$$
$$AC' : C'B = b : a.$$

Die Geraden AA', BB', CC' enthalten jede den Punkt S. Es ist $BA' \,.\, CB' \,.\, AC' = B'A \,.\, C'B \,.\, A'C$.

Sind a, b, c von gleichem Zeichen und alle einander gleich, so sind A', B', C' die Seitenmitten des Dreiecks. S ist der Schnittpunkt der Medianen AA', BB', CC'. Sind a, b, c den Seiten BC, CA, AB proportional, d. h. ist

$$a : b : c = BC : CA : AB,$$

so ist $BA' : A'C = AB : AC$, mithin halbirt AA' den Winkel A, etc. Der Massenmittelpunkt S ist dann der Mittelpunkt des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises. Die Bedeutung der drei andern Berührungskreise des Dreiecks ergibt sich hienach leicht.

3. Massenmittelpunkt S von vier Massen a, b, c, d gleichen Zeichens, welche in den Ecken eines Tetraeders $ABCD$ enthalten sind (Fig. 32). Sind E, F, G, H, J, K die Mittelpunkte der Massen a, b; a, c; a, d; b, c; b, d; c, d, so schneiden sich die Verbindungslinien EK, FJ, GH in S. Für gleiche Massen sind diese drei Geraden die Verbindungslinien der Mitten der drei Paar Gegenseiten.

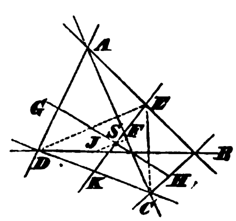

Fig. 32.

Sind die Massen den gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders proportional, d. h. ist

$$a : BCD = b : CDA = c : DAB = d : ABC$$

so ist der Massenmittelpunkt der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel. Denn der Punkt E der Kante AB ist Massenmittelpunkt von a und b und daher ist $AE : EB = CDA : BCD$. Die Ebene CDE, welche E mit der Gegenkante CD verbindet, habe von A und B die Abstände α, β und die Kante CD von denselben Punkten die Abstände α', β'. Dann ist

$$\alpha : \beta : AE : EB \quad \text{und} \quad \alpha' : \beta' = CDA : BCD;$$

daher

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta' \quad \text{oder} \quad \alpha : \alpha' = \beta : \beta'.$$

Es sind aber $\alpha : \alpha'$ und $\beta : \beta'$ die Sinusse der Flächenwinkel, welche die Ebene CDE mit den durch die Kante CD gehenden Seitenflächen CDA und BCD bildet; daher sind diese Winkel gleich oder es halbirt CDE den Winkel der durch CD gehenden Seitenflächen. Diese Ebene enthält aber die Punkte E, K, also auch den Mittelpunkt aller vier Massen etc. Bedeutung der vier übrigen Berührungskugeln.

§. 2. Massenmittelpunkt von Linien.

1. Für die homogene Strecke AB (Fig. 33) ist ihr Mittelpunkt der Massenmittelpunkt. Verlängert man nämlich AB um $BC = AB$ und sind P, Q, R die Massenmittelpunkte von AB, BC, AC, sowie p, q, r deren Abstände

von einer beliebigen Ebene und a, b die der Endpunkte A, B von derselben Ebene, so ist wegen der Aehnlichkeit der drei Strecken $p - a = q - b = \frac{1}{2}(r - a)$. Da aber das Moment von AC gleich der Summe der Momente von AB und BC sein muss, so folgt $2r = p + q$. Eliminirt man q, r, so wird $p = \frac{1}{2}(a + b)$, w. z. b. w.

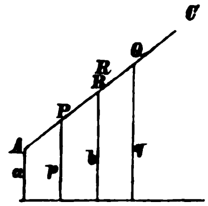

Fig. 33.

2. Der Massenmittelpunkt des homogenen Dreiecksumfanges ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem Dreieck der drei Seitenmitten eingeschrieben werden kann. Denn die Massenmittelpunkte der Seiten AB, BC, CA (Fig. 31) sind deren Mitten C', A', B' und der gesuchte Massenmittelpunkt ist der Massenmittelpunkt von C', A', B', wenn diesen Punkten die Massen der Seiten AB, BC, CA zuertheilt werden. Nun ist

$$AB = 2 \,.\, A'B', \quad BC = 2 \,.\, B'C', \quad CA = 2 \,.\, C'A'.$$

Daher ist der Massenmittelpunkt von ABC der Massenmittelpunkt der drei Ecken des Dreiecks $A'B'C'$, deren Massen den ihnen gegenüberliegenden Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ proportional sind. Nach §. 1, Nr. 2 ist er der Mittelpunkt des dem Dreiecke $A'B'C'$ eingeschriebenen Kreises.

3. Der homogene Kreisbogen (Fig. 34). In Bezug auf den Radius, welcher nach der Mitte des Bogens geht, ist die Momentensumme aller Massenelemente Null, daher liegt der Massenmittelpunkt auf ihm; es genügt also, die Momentensumme in Bezug auf die der Sehne des Bogens parallele, zur Ebene der Figur senkrechte Ebene zu finden. Hiezu suchen wir die Momentensumme eines dem Bogen eingeschriebenen Polygons gleicher Seiten. Wird die Masse einer Seite MM' in deren Mitte μ vereinigt und ist q der Abstand dieser Mitte von jener Ebene, so ist $\Sigma(MM' \,.\, \mu q)$ die Momentensumme der Seiten. Um das Product $MM' \,.\, \mu q$ in ein solches zu verwandeln, welches statt des veränderlichen Factors μq einen constanten Factor hat, gibt die Aehnlichkeit der Dreiecke $MM'N$ und μCq die Proportion $MM' : MN = C\mu : \mu q$ und hiemit

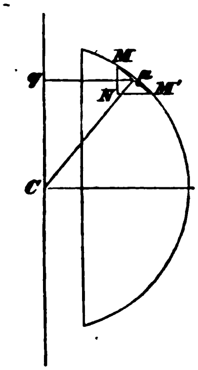

Fig. 34.

$$\Sigma(MM' \,.\, \mu q) = \Sigma(MN \,.\, C\mu) = C\mu \,.\, \Sigma(MN)$$

d. h. gleich $C\mu$, multiplicirt mit der Sehne des Bogens. Lässt man das Polygon in den Kreisbogen übergehen, so wird $C\mu$ zum Radius und wenn x_1 den Abstand des Massenmittelpunktes S des Bogens, s die Bogenlänge, c die Sehne und r den Radius bezeichnen: $s \,.\, x_1 = c \,.\, r$ d. h. das Moment $s \,.\, x_1$ des Bogens ist gleich dem Rechtecke $c \,.\, r$ aus der Sehne und dem Radius. Für den Halbkreis ist $c = 2r$, $s = \pi r$, also $x_1 = \frac{2}{\pi} r$, nahezu $\frac{7}{11} r$.

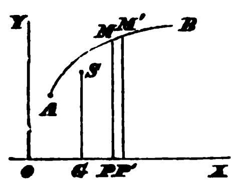

Fig. 35.

4. Massenmittelpunkt ebener Curven (Fig. 35). Ist ϱ die specifische Masse im Punkte M, so ist

$$\varrho \,.\, MM' = \varrho ds$$

die Masse des Bogenelementes und sind $\varrho x ds$, $\varrho y ds$ die Momente der Masse desselben in Bezug auf die Coordinatenaxen der y, x. Diese drei Grössen sind daher die Aenderungen der Masse und der Momente des Bogens AM, wenn derselbe um $MM' = ds$ zunimmt. Die Summen aller dieser Aenderungen oder die Integrale derselben, ausgedehnt über den ganzen Bogen AB sind daher dessen Masse und Momente in Bezug auf die Coordinatenaxen. Daher hat man wenn m, x_1, y_1 die Masse und die Coordinaten des Massenmittelpunktes des ganzen Bogens AB sind:

$$m = \int \varrho ds, \quad mx_1 = \int \varrho x ds, \quad my_1 = \int \varrho y ds$$

ausgedehnt über diesen ganzen Bogens. Ist ϱ constant, so wird

$$m = \varrho s, \quad sx_1 = \int x ds, \quad sy_1 = \int y ds.$$

Als Grundvariabele, durch welche alle hier vorkommenden Grössen auszudrücken sind, kann man den Bogen $AM = s$ oder eine der Coordinaten x, y seines Endpunktes M oder irgend eine andere Variabele t wählen. Im letzten Falle sind $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ die Gleichungen der Curve und ist $ds = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dt$, wenn $x' = \varphi'(t)$, $y' = \psi'(t)$.

5. Massenmittelpunkt des homogenen elliptischen Bogens BM (Fig. 36). Beschreiben wir um die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

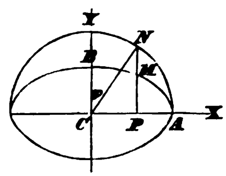

Fig. 36.

vom Mittelpunkt C aus mit der grossen Halbaxe a einen Kreis und ziehen nach dem Schnittpunkte N der Ordinate PM eines Punktes M nach diesem den Radius CN, so wird der Winkel NCA, den er mit der grossen Axe bildet, die excentrische Anomalie des Punktes M genannt (der Ausdruck rührt aus der Astronomie her, wo der Brennpunkt der elliptischen Planetenbahnen das Centrum der Anziehungen ist und deshalb ein Winkel, dessen Scheitel nicht in diesem Punkte liegt, ein excentrischer Winkel oder eine excentrische Anomalie heisst). Das Complement $BCN = \varphi$ wählen wir als Grundvariabeln. Dann werden die Coordinaten von M sein: $x = a \sin\varphi$, $y = b \cos\varphi$ und erhält man für die Länge s und die Massenmittelpunktscoordinaten des Bogens BM, welcher im Scheitel B der kleinen Axe beginnt, leicht die Formeln

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi,$$

$$sx_1 = a^2 \int_0^\varphi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi, \quad sy_1 = a^2 \int_0^\varphi \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \,.\, d\varphi,$$

wo $k = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ die numerische Excentricität bedeutet. Nach Legendre wird das vorstehende Integral, welches mit a multiplicirt s liefert, elliptisches Integral zweiter Gattung genannt und mit $E(\varphi, k)$ bezeichnet; k heisst der Modulus desselben und ist kleiner als 1; die obere Grenze φ des Integrals ist die Amplitude desselben.

Die Anwendung der partiellen Integration gibt einerseits

$$J = \int_0^\varphi \sin\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = 1 - \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} - k^2 \int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

und indem man in J unter dem Integralzeichen mit der Wurzelgrösse multiplicirt und dividirt erhält man andererseits

$$J = \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - k^2 \int_0^\varphi \frac{\sin^3\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \cdot$$

Daher wird

$$2J = 1 - \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + (1 - k^2) \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \cdot$$

Weiter hat man

$$\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{1 - k^2} \cos^2\varphi}}$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^\varphi \frac{d \cdot \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \cos\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \cos\varphi\right)^2}} = \frac{1}{k}\, l\, \frac{1 + k}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + k \cos\varphi}$$

und damit

$$2J = 1 - \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + \frac{1 - k^2}{k}\, l\, \frac{1 + k}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + k \cos\varphi}$$

oder endlich:

$$s x_1 = \tfrac{1}{2} a^2 \left[1 - \cos\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + \frac{1 - k^2}{k}\, l\, \frac{1 + k}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + k \cos\varphi}\right] \cdot$$

In ähnlicher Weise findet man:

$$s y_1 = \tfrac{1}{2} ab \left[\sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + \frac{1}{k} \operatorname{Arc\,sin} (k \sin\varphi)\right] \cdot$$

Für den elliptischen Quadranten ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, mithin

$$s = aE(\tfrac{1}{2}\pi, k), \quad s x_1 = \tfrac{1}{2} a^2 \left[1 + \frac{1 - k^2}{k}\, l \sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}}\right],$$

$$s y_1 = \tfrac{1}{2} ab \left[\sqrt{1 - k^2} + \frac{1}{k} \operatorname{Arc\,sin} k\right];$$

für die halbe Ellipse, deren Sehne die grosse Axe ist, wird

$$s = 2aE(\tfrac{1}{2}\pi, k), \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{b}{2E(\frac{1}{2}\pi, k)} \left[\sqrt{1 - k^2} + \frac{1}{k} \operatorname{Arc\,sin} k\right] \cdot$$

Für die halbe Ellipse, deren Sehne die kleine Axe ist, wird

$$s = 2aE(\tfrac{1}{2}\pi, k), \quad x_1 = \frac{a}{2E(\frac{1}{2}\pi, k)} \left[1 + \frac{1 - k^2}{k}\, l \sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}}\right], \quad y_1 = 0.$$

6. Für die Cycloide, deren Gleichungen für eine Spitze als Ursprung und die Basis als x-Axe $x = a(\omega - \sin\omega)$, $y = a(1 - \cos\omega)$ sind, hat man, wenn der Wälzungswinkel ω als Grundvariabele angenommen wird:

$$s = 2a \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{1}{2}\omega d\omega = 8a, \quad x_1 = \pi a, \quad s y_1 = 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega d\omega = \tfrac{32}{3} a^2,$$

also $y_1 = \frac{4}{3} a$.

7. **Massenmittelpunkt von Curven doppelter Krümmung.** Nach denselben Schlüssen wie in 4. hat man für das Massenelement und die Differentialien der Momente des Bogens in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen der x, y, z:

$$dm = \varrho ds, \quad x dm = \varrho x ds, \quad y dm = \varrho y ds, \quad z dm = \varrho z ds$$

und mithin für die Masse und die Momente eines Bogens selbst, wenn x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Massenmittelpunktes bedeuten:

$$m = \int \varrho ds, \quad m x_1 = \int \varrho x ds, \quad m y_1 = \int \varrho y ds, \quad m z_1 = \int \varrho z ds.$$

Ist die Curve homogen, also ϱ constant, so wird

$$m = \varrho \,.\, s, \quad s x_1 = \int x ds, \quad s y_1 = \int y ds, \quad s z_1 = \int z ds.$$

Die Integrale sind über den ganzen Bogen zu erstrecken, dessen Masse und Massenmittelpunkt gesucht wird.

8. Der Bogen einer ebenen Curve erzeugt durch Rotation um eine Axe seiner Ebene eine Rotationsfläche $\Omega = 2\pi \int y ds$, wenn y die Ordinate der Curve für die Rotationsaxe als Abscissenaxe und ds das Bogenelement ist, das Integral aber über die ganze Bogenlänge erstreckt wird. Nun ist für die Ordinate y_1 des Massenmittelpunktes $s \,.\, y_1 = \int y ds$ und folglich, wenn man aus beiden Gleichungen das Integral eliminirt: $\Omega = 2\pi y_1 s$ d. h., da $2\pi y_1$ der Umfang des Kreises ist, den der Massenmittelpunkt des Curvenbogens bei der Erzeugung der Fläche beschreibt:

Die Oberfläche eines Rotationskörpers wird erhalten, wenn man die Länge des Meridianbogens mit der Länge des Weges multiplicirt, welchen der Massenmittelpunkt desseben bei der Erzeugung des Rotationskörpers beschreibt.

Man kann den Satz zunächst auch für ein rotirendes Polygon erweisen und dann das Polygon in die Curve übergehen lassen. Denn ist MM' eine Seite, μ ihre Mitte und μp deren Abstand von der Axe, y_1 der Abstand des Massenmittelpunktes des Umfangs von ihr, so ist

$$y_1 \Sigma(MM') = \Sigma(MM') \,.\, \mu p.$$

Jede Seite MM' erzeugt aber die Oberfläche $2\pi \,.\, MM' \,.\, \mu p$ eines abgestumpften Kegels, das Polygon selbst also die Oberfläche

$$\Omega = 2\pi \Sigma(MM') \,.\, \mu p = 2\pi y_1 \,.\, \Sigma(MM'),$$

welcher Ausdruck in der Grenze den obigen Satz liefert.

Für einen Ausschnitt Ω' der Fläche Ω, entsprechend dem von den beiden Grenzmeridianebenen gebildeten Winkel ϑ, besteht die Proportion $\Omega' : \vartheta = \Omega : 2\pi$ und ergibt, da $\Omega = 2\pi y_1 s$ ist: $\Omega' = \vartheta y_1 \,.\, s$. Es ist aber auch hier ϑy_1 der Weg des Massenmittelpunktes des erzeugenden Bogens und besteht also der vorstehende Satz auch in der allgemeineren Fassung fort.

Dieser Satz, sowie ein ihm analoger, den wir bei der Bestimmung des Massenmittelpunktes ebener Flächenräume anführen werden, rührt von Pappus her

(Collectiones mathematicae, lib. VII.), wird aber gewöhnlich Guldin (geb. 1577, † 1663) zugeschrieben, welcher ihn in seinen Werken „De centro gravitatis" 1635 und „Centrobaryca" 1643 reproducirte.

Der Satz ist einer Erweiterung fähig. Wenn nämlich die Ebene der rotirenden Curve nicht fortwährend um dieselbe Axe, sondern um eine Folge verschiedener Axen ihrer Ebene rotirt, welche continuirlich auf einander folgen oder endliche Winkel mit einander bilden, so besteht der Satz fort. Bei continuirlicher Axenfolge umhüllt die Ebene eine abwickelbare Fläche, die sie während der Bewegung berührt. Die Curve erzeugt eine Canalfläche. Es ist jedoch im Falle, dass die Curve die Axen schneidet, einige Vorsicht bei der Bestimmung des erzeugten Flächeninhaltes nöthig. — Welche Lage man dem rotirenden Bogen auch geben mag, bei unverändertem Abstand seines Massenmittelpunktes von der Axe bleibt der erzeugte Flächenraum von derselben Grösse.

9. Einige Aufgaben über die Bestimmung des Massenmittelpunktes homogener Curven:

a) Bogen der Sinusoïde $y = a \sin \frac{x}{a}$ von $x = 0$ bis $x = \pi a$; b) Viertelumfang der Lemniscate $r^2 = 2a \cos 2\vartheta$, vom Doppelpunkt bis zum Scheitel; c) Hälfte des Umfanges des Ovals $r = 2a \cos^2 \vartheta$; d) Schnittlinie des Elipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ mit der concentrischen Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; e) Krümmungslinien des Ellipsoids.

§. 3. Massenmittelpunkt von Flächenräumen.

1. Das homogene Parallelogramm. (Fig. 37). Man ergänze das Parallelogramm $ABCD$ durch Verlängerung der Seiten zu dem Parallelogramm AG vom vierfachen Inhalt, bestehend aus vier gleichen Parallelogrammen. Sind P, Q, R, S, T die Massenmittelpunkte der Parallelogramme AC, BF, CG, DH und AG und p, q, r, s, t ihre Abstände von irgend einer Ebene oder auch einer Axe in der Ebene der Figur, so hat man, da die Summe der Momente der vier ersten gleich dem Momente des letzten ist, $p + q + r + s = 4t$ und vermöge der Aehnlichkeit aller fünf Figuren, wenn a, b, c, d die Abstände der Ecken A, B, C, D von jener Ebene sind: $p - a = q - b = r - c = s - d = \frac{1}{2}(t - a)$. Eliminirt man hiermit aus der Gleichung der Momente q, r, s, t, so bleibt

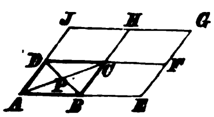

Fig. 37.

$$p = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$$

d. h. der Abstand des Massenmittelpunktes der Fläche eines homogenen Parallelogramms von irgend einer Ebene oder einer Geraden seiner Ebene ist das arithmetische Mittel aus den vier Abständen seiner Ecken von jener Ebene oder Geraden. Lässt man die Gerade mit der Diagonalen AC zusammenfallen, so wird $a = c = 0$, $b = -d$, also $p = 0$; dasselbe findet statt, wenn sie mit der andern Diagonale zusammenfällt. Der Massenmittelpunkt ist daher der Durchschnitt der Diagonalen. Es ist derselbe, wie für vier gleiche Massen, in den Ecken befindlich.

2. Die homogene Dreiecksfläche. (Fig. 38). Zwei Verbindungslinien DE, EF der drei Seitenmitten zerlegen das Dreieck ABC in zwei ihm ähnliche und in ein Parallelogramm vom doppelten Inhalte eines dieser beiden. Sind daher Q, R, S, P die Massenmittelpunkte der beiden Theildreiecke, des Haupt-

dreiecks und des Parallelogramms und q, r, s, p ihre Abstände von irgend einer Geraden in der Ebene der Figur, so hat man die Gleichung der Momente:

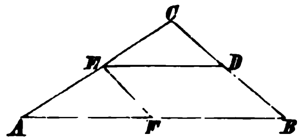

Fig. 38.

$$2p + q + r = 4s.$$

Die Aehnlichkeit des Theildreiecks mit dem Ganzen gibt

$$q - a = r - e = \tfrac{1}{2}(s - a)$$

und für das Parallelogramm ist $p = \frac{1}{2}(b + e)$. Eliminirt man mit Hülfe dieser Relationen aus der Gleichung der Momente p, q, r und bedenkt, dass $2e = a + c$ ist, so folgt

$$s = \tfrac{1}{3}(a + b + c)$$

d. h. der Abstand des Massenmittelpunktes der homogenen Dreiecksfläche von einer beliebigen Geraden ihrer Ebene ist das arithmetische Mittel aus den Abständen der drei Ecken von dieser Geraden. Indem man die Gerade mit ausgezeichneten Linien der Figur zusammenfallen lässt, erhält man Specialsätze über die Lage des Massenmittelpunktes. Fällt sie mit einer Seite AB zusammen, so wird $a = b = 0$ und $s = \frac{1}{3}c$ welches zeigt, dass der Massenmittelpunkt um den dritten Theil der Höhe von einer Seite absteht. Fällt sie mit der Mediane CF zusammen, so wird $b = -a$, $c = 0$ und $s = 0$, der Massenmittelpunkt ist daher der Schnittpunkt der drei Medianen und theilt dem eben ausgesprochenen Satze zufolge jede derselben im Verhältniss $1:2$. Er ist zugleich der Punkt, von welchem aus das Dreieck durch Linien, welche nach den Ecken hinlaufen, in drei flächengleiche Dreiecke zerfällt werden kann. Er ist identisch mit dem Mittelpunkte dreier gleicher, in den Ecken befindlicher Massen.

3. Das homogene Trapez. (Fig. 39.) Zerlegt man dasselbe durch eine Diagonale AD in zwei Dreiecke, so liegt der Massenmittelpunkt in der Verbindungslinie der Massenmittelpunkte S_1, S_2 dieser Dreiecke. Führt man dasselbe durch die andere Diagonale aus, so liegt er ebenso in der Verbindungslinie der Massenmittelpunkte der durch sie gebildeten Dreiecke. Beide Verbindungslinien schneiden sich daher im Massenmittelpunkte des Trapezes. Auch geht die Verbindungslinie EF der Mitten der beiden parallelen Seiten der Figur durch diesen Punkt, weil in Bezug auf sie die Summe der Momente aller Flächenelemente Null ist. Um das Verhältniss der Abstände x, x' des Massenmittelpunktes S des Trapezes von den beiden parallelen Seiten AB, CD zu finden, bilden wir die Gleichungen der Momente des Ganzen und der beiden Dreiecke ABD und ACD in Bezug auf diese Seiten.

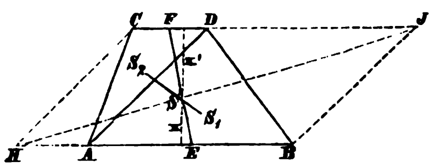

Fig. 39.

Sie sind

$$\tfrac{1}{2}(AB + CD)\,h\,.\,x = \tfrac{1}{2}AB\,.\,h\,.\,\tfrac{1}{3}h + \tfrac{1}{2}CD\,.\,h\,.\,\tfrac{2}{3}h$$
$$\tfrac{1}{2}(AB + CD)\,h\,.\,x' = \tfrac{1}{2}AB\,.\,h\,.\,\tfrac{2}{3}h + \tfrac{1}{2}CD\,.\,h\,.\,\tfrac{1}{3}h$$

worin h den Abstand der parallelen Seiten bedeutet. Sie geben das gesuchte Verhältniss

$$\frac{x}{x'} = \frac{\frac{1}{2}AB + CD}{AB + \frac{1}{2}CD} = \frac{HE}{FJ},$$

welche Gleichung leicht construirbar ist.

4. **Der homogene Kreissector und das homogene Kreissegment.** Zerlegt man den Sector durch unendlich nahe Radien in Elementarsectoren und wendet auf sie den Satz über den Massenmittelpunkt der Dreiecksfläche an, so ergibt sich, dass die Massenmittelpunkte aller dieser Elementarsectoren einen Kreisbogen vom Radius $\frac{2}{3}r$, der Sehne $\frac{2}{3}c$ und der Länge $\frac{2}{3}s$ bilden, wenn r, c, s Radius, Sehne und Bogenlänge des Sectors sind. Denkt man sich in den Punkten dieses Kreisbogens die Masse der Elementarsectoren vereinigt, und sucht den Massenmittelpunkt desselben, so ist dieser zugleich der Massenmittelpunkt des Kreissectors. Sein Abstand x_1 vom Mittelpunkte ist daher nach §. 2, Nr. 3. $x_1 = \frac{2}{3}\,\frac{cr}{s}$. Für den Halbkreis ist $x_1 = \frac{4}{3}\,\frac{r}{\pi}$, approximativ gleich $\frac{14}{33}\,r$.

Für das Kreissegment setze man die Summen seines Momentes und des Momentes des Dreiecks, welches das Segment zum Sector ergänzt, gleich dem Momente des Sectors, die Momente genommen auf den zur Mittellinie der Figur senkrechten Durchmesser des Kreises. Ist a die Höhe des Dreiecks, so sind die Flächen der drei Figuren $\frac{1}{2}\,rs$, $\frac{1}{2}\,ac$, $\frac{1}{2}\,(rs - ac)$ und die Abstände ihrer Massenmittelpunkte vom Mittelpunkte des Kreises $\frac{2}{3}\,\frac{cr}{s}$, $\frac{2}{3}\,a$, x_1 und folglich ist die Gleichung der Momente

$$\tfrac{1}{3}\,r^2c - \tfrac{1}{3}\,a^2c = \tfrac{1}{2}\,(rs - ac)\,x_1 \text{ woraus } x_1 = \tfrac{2}{3}\,c\,\frac{r^2 - a^2}{rs - ac} = \tfrac{1}{6}\,\frac{c^3}{rs - ac}.$$

5. **Massenmittelpunkt eines beliebig begrenzten krummen oder ebenen Flächenraumes.** Ist $d\omega$ ein Flächenelement, welches den Punkt (x, y, z) enthält, so ist unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten und der specifischen Masse ϱ als gegebener Function zweier derselben, das Massenelement der Fläche $dm = \varrho d\omega$ und sind seine Momente $xdm = \varrho x d\omega$, $ydm = \varrho y d\omega$, $zdm = \varrho z d\omega$ in Bezug auf die Ebenen der yz, zx, xy. Hiermit erhält man für die Masse m und die Momente mx_1, my_1, mz_1 des ganzen Flächenstückes:

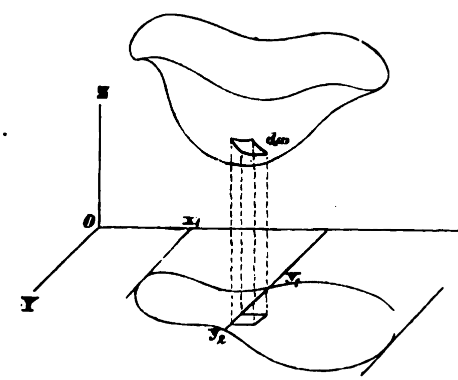

Fig. 40.

$$m = \int \varrho d\omega, \quad mx_1 = \int \varrho x d\omega, \quad my_1 = \int \varrho y d\omega, \quad mz_1 = \int \varrho z d\omega,$$

wo die Integralzeichen Doppelintegrale bedeuten und $d\omega$, x, y, z, ϱ durch die nach

Zweckmässigkeitsrücksichten zu wählenden Grundvariabelen auszudrücken sind. Die Integrationen sind über den ganzen Flächenraum auszudehnen.

Ist $U = 0$ die Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und ist $\Phi(x, y) = 0$ die Gleichung der Projection des Randes des Flächenstückes, dessen Massenmittelpunkt zu suchen ist, auf die xy-Ebene, so hat man (Fig. 40), wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Normalen der Fläche im Punkte (x, y, z) sind:

$$d\omega = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}, \quad \frac{\cos\alpha}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

und also

$$m = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\varrho R\,dx\,dy}{\frac{\partial U}{\partial z}}, \quad m x_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\varrho R x\,dx\,dy}{\frac{d U}{dz}},$$

$$m y_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\varrho R y\,dx\,dy}{\frac{\partial U}{\partial z}}, \quad m z_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\varrho R z\,dx\,dy}{\frac{d U}{dz}}$$

wo $R = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, z mit Hülfe von $U = 0$ zu eliminiren ist, und die Grenzen y_1, y_2 aus der Gleichung $\Phi = 0$ für beliebiges x und die Grenzen x_1, x_2 mit Hülfe der äussersten Tangenten sich ergeben, welche man parallel zur y-Axe an die Curve $\Phi = 0$ legen kann. Je nach der Gestalt des Randes $\Phi = 0$ hat man die Integrale zu spalten.

Stellt man die Gleichung der Fläche unter der Form dar: $z = f(x, y)$, so wird $U = z - f(x, y) = 0$; man hat

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 1$$

und wenn man abkürzend

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

setzt

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Damit erhält man

$$m = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad m x_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho x\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$m y_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho y\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad m z_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho z\,dx\,dy\,\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

Für ebene Flächenräume wähle man die Ebene derselben zur xy-Ebene, dann sind z, z_1 Null, $\cos\gamma = 1$, $d\omega = dx\,dy$ und erhält man:

$$m = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho\, dx\, dy, \quad m x_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho x\, dx\, dy, \quad m y_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \varrho y\, dx\, dy.$$

Für **homogene** ebene Flächen wird $m = \varrho \Omega$, wenn Ω die Grösse des Flächenraumes ist; daher fällt ϱ aus der Betrachtung heraus und bleibt:

$$\Omega = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} dx\, dy, \quad \Omega x_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} x\, dx\, dy, \quad \Omega y_1 = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} y\, dx\, dy,$$

wobei man die Integration nach y sofort ausführen kann, so dass man erhält:

$$\Omega = \int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)\, dx, \quad \Omega x_1 = \int_{x_1}^{x_2} x(y_2 - y_1)\, dx, \quad \Omega y_1 = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (y_2 - y_1)\, dx.$$

6. Für die **homogene Fläche der Parabel** $y^2 = 2px$, begrenzt von der Axe, einer Ordinate y und dem Bogen vom Scheitel an gerechnet wird

$$y_1 = 0, \quad \Omega = \tfrac{2}{3}\, xy, \quad \Omega x_1 = \tfrac{2}{5}\, x^2 y, \quad \Omega y_2 = \tfrac{1}{4}\, xy, \quad \text{also} \quad x_1 = \tfrac{3}{5}\, x_2, \quad y_1 = \tfrac{3}{8}\, y.$$

7. Zu finden: *a*) den Massenmittelpunkt eines elliptischen Segmentes (mit Hülfe schiefer Coordinaten, deren Richtungen parallel und conjugirt zur Sehne sind); *b*) den Massenmittelpunkt der halben und ganzen Cycloïdenfläche; *c*) den Massenmittelpunkt der ganzen und halben Fläche des Ovals $r = 2a \cos^2 \vartheta$.

8. Für Polarcoordinaten in der Ebene, Radiusvactor r und Polarwinkel φ hat man zur Bestimmung des Massenmittelpunktes ebener homogener Flächenräume, da $r\,dr\,d\varphi$ das Flächenelement $d\omega$, $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$ ist:

$$\Omega = \iint r\, dr\, d\varphi, \quad \Omega x_1 = \iint r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi, \quad \Omega y_1 = \iint r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi,$$

wo die Integrationen über die ganze Fläche Ω auszudehnen sind.

Ist Ω ein Sector, begrenzt von zwei den Winkeln Φ_0, Φ entsprechenden Radienvectoren und dem zwischenliegenden Bogen der Curve $r = f(\varphi)$, so wird

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\, d\varphi, \quad \Omega x_1 = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \cos\varphi\, d\varphi, \quad \Omega y_1 = \tfrac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

9. Für ein homogenes Stück Ω einer **Rotationsfläche**, begrenzt von zwei Kreisschnittsbogen senkrecht zur Rotationsaxe und zwei Meridianbogen, nehmen wir diese Axe zur z-Axe und in einer Ebene senkrecht zu ihr die Polarcoordinaten r, φ mit dem Pol auf der Axe und sei $z = F(r)$ die Gleichung der Fläche in den gemischten Coordinaten r, φ, z. Das Flächenelement $d\omega$ ist ein unendlich kleines Rechteck, gebildet vom Bogenelement $r\,d\varphi$ des Parallelkreises und dem Bogenelemente $(dr^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}$ des Meridians und also

$$d\omega = r\,(dr^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi = \psi(r)\, r\, dr\, d\varphi, \quad \text{wenn } \psi(r) = [1 + F'(r)^2]^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird. Man hat daher, wenn $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ den begrenzenden Meridianen, r_0 r_1 den begrenzenden Parallelkreisen entsprechen:

$$\Omega = \varphi \int_{r_0}^{r} \psi(r)\, r\, dr, \quad \Omega \cdot x_1 = \int_0^{\varphi}\int_{r_0}^{r} \psi(r)\, r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi = \sin\varphi \int_{r_0}^{r} \psi(r)\, r^2\, dr,$$

$$\Omega \,.\, y_1 = \int_0^\varphi\int_{r_0}^r \psi(r) r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi = (1 - \cos\varphi)\int_{r_0}^r \psi(r)\, r^2 dr$$

$$\Omega \,.\, z_1 = \varphi \int_{r_0}^r F(r)\, \psi(r)\, r\, dr.$$

Für den Rotationskegel $z = \frac{h}{R}\, r$ wird

$$\psi(r) = \left(1 + \frac{h^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \Omega = \tfrac{1}{2} R\varphi (h^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}, \ x_1 = \tfrac{2}{3} R \frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

$$y_1 = \tfrac{2}{3} R \frac{1 - \cos\varphi}{\varphi}, \ z_1 = \tfrac{2}{3} h.$$

Für die Kugelmütze $z^2 + r^2 = a^2$ erhält man $z_1 = a - \frac{1}{2} h$, wenn h die Höhe derselben ist, d. h. ihr Massenmittelpunkt liegt in der Mitte ihrer Höhe.

10. Rotirt ein ebener Flächenraum Ω um eine Axe seiner Ebene, die wir als x-Axe ansehen wollen, so erzeugt er beim vollen Umschwunge das Volumen $V = \pi \int (Y^2 - y^2)\, dx$, wo Y, y die beiden Ordinaten der rotirenden Curve sind, y ist Null, wenn die rotirende Fläche von der Axe begrenzt wird. Für die Ordinate y_1 des Massenmittelpunktes S ist $\Omega \,.\, y_1 = \frac{1}{2} \int (Y^2 - y^2)\, dx$ (s. N. 5) und daher $V = 2\pi y_1 \,.\, \Omega$ d. h. das Volumen eines Rotationskörpers wird erhalten, wenn man die rotirende Fläche mit dem Wege ihres Massenmittelpunktes multiplicirt. Der Satz gilt auch für Theilrotationen. Im Falle die Axe den Flächenraum schneidet, ist Vorsicht nöthig, um das gewünschte Volumen richtig zu erhalten. Der Satz wird gleichfalls Guldin zugeschrieben wie der frühere, er gebührt aber Pappus. Er ist derselben Erweiterung fähig, wie jener. Da in ihm drei Grössen V, Ω, y, vorkommen, so kann jede von ihnen gefunden werden, wenn die beiden anderen gegeben sind.

Welche Lage man auch der Fläche Ω vor der Rotation geben mag, bei unverändertem Abstande ihres Massenmittelpunktes von der Axe bleibt das erzeugte Volumen dasselbe.

§. 4. Massenmittelpunkt von Körperräumen.

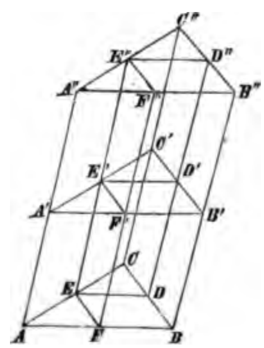

Fig. 41.

1. Das homogene Parallelepiped. Betrachtungen derselben Art, wie §. 3 Nr. 1 führen zu dem Satze, dass der Massenmittelpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkte zusammenfällt und zugleich der Massenmittelpunkt der acht Ecken ist, wenn diese von gleicher Masse angenommen werden.

2. Das homogene dreiseitige Prisma. $ABCA''B''C''$. (Fig. 41.) Der Mittelquerschnitt $A'B'C'$ und zwei Parallelebenen zu den Seitenflächen, welche diese halbiren, zerlegen das Prisma in 4 ihm ähnliche unter sich congruente dreiseitige Prismen und ein Parallelepiped. Sind p, q, r, q', r', s die Abstände der Massenmittelpunkte des Parallelepipeds, der vier kleineren Prismen und des Gesammtprismas a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', . . .

die der übrigen Punkte der Figur von einer beliebigen Ebene, so hat man, wenn die Masse eines der 4 Prismen als Einheit gilt, die Gleichung der Momente

$$4p + q + q' + r + r' = 8s$$

und vermöge der Aehnlichkeit der Prismen und nach Nr. 1 dieses §.

$$q - a = r - e = q' - a' = r' - e' = \tfrac{1}{2}(s - a),\ p = \tfrac{1}{2}(b' + e').$$

Eliminirt man hiemit a, b, c, e, p, q, q', r', so bleibt, da $4p = 2b' + 2e = 2b' + a' + c'$, $q + q' + r + r' = 2s - 2a + (a + e') + (a' + e) = 2s - 2a + 2(a + e') = 2s + 2e' = 2s + a' + c'$ ist, $s = \frac{1}{3}(a' + b' + c')$, d. h. **der Massenmittelpunkt des Prismas ist der Massenmittelpunkt seines Mittelquerschnitts.** Da $a' = \frac{1}{2}(a + a'')$, $b' = \frac{1}{2}(b + b'')$, $c' = \frac{1}{2}(c + c'')$ ist, so kann man auch setzen $s = \frac{1}{6}(a + b + c + a'' + b'' + c'')$.

3. **Das homogene Tetraeder.** (Fig. 42.) Drei durch die Mitten der sechs Kanten geführte Ebenen EFG, $EGHK$, EKJ zerfällen dasselbe in zwei ihm ähnliche, unter sich congruente, Tetraeder und zwei gleiche dreiseitige Prismen. Jedes der letzteren ist dreimal so gross als eines jener Tetraeder und jedes von diesen ist $\frac{1}{8}$ des Ganzen. Sind P, Q, R, S, T die Massenmittelpunkte der beiden kleineren Tetraeder, der beiden Prismen und des Gesammttetraeders, so hat man, wenn die kleinen Buchstaben wieder die Abstände der gleichnamigen Punkte von irgend einer Ebene bedeuten:

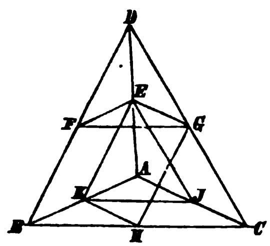

Fig. 42.

$$8t = p + q + 3r + 3s$$
$$p - a = q - e = \tfrac{1}{2}(t - a)$$
$$r = \tfrac{1}{6}(b + e + f + g + h + k)$$
$$s = \tfrac{1}{6}(c + e + g + h + i + k).$$

Hieraus erhält man

$$p + q = t + e$$
$$6r + 6s = b + c + 2e + f + 2g + 2h + 2k + i$$

oder da

$$2e = a + d,\ 2g = c + d,\ 2h = b + c,\ 2k = a + b,\ f + i = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d)$$
$$2(p + q) + 6(r + s) = 3(a + b + c + d) + \tfrac{1}{2}(a + b + c + d)$$

ist:

$$16t = 2t + \tfrac{7}{2}(a + b + c + d)$$

oder

$$t = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d).$$

Lässt man die Ebene mit einer Seitenfläche des Tetraeders zusammenfallen, so folgt, dass der Massenmittelpunkt in $\frac{1}{4}$ der zugehörigen Höhe von dieser Seitenfläche absteht. Legt man sie durch eine Kante und die Mitte der Gegenkante, so wird $t = 0$, also der Massenmittelpunkt der Schnittpunkt aller solcher Ebenen. Hieraus folgt, dass er in der Verbindungslinie der Mitten je zweier Gegenkanten liegt. Daher ist er der Mittelpunkt des Parallelogramms $EGHK$. Die drei Ebenen, welche durch die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten und die Mitten ihrer Gegenkanten gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche jene Ecke mit dem Massenmittelpunkte der ihr gegenüberliegenden Fläche verbindet. In dieser Geraden liegt der Massenmittelpunkt des Tetraeders und da er um $\frac{1}{4}$ der Höhe von der Fläche absteht, so theilt er jene Verbindungslinie im Verhältniss 1 : 3 und ist mithin der Punkt, von welchem aus das Tetraeder in vier gleich grosse Tetraeder durch Ebenen zerlegt werden kann, welche durch die Kanten gehen.

Die hier erläuterte Methode der Massenmittelpunktsbestimmung des Prisma's und des Tetraeders, sowie früher des Parallelogramms und Dreiecks ist von Poinsot in seinen *Elémens de statique*, sowie von Möbius in seinem Lehrbuch der Statik gelehrt worden. Sie hat den Vorzug grosser Allgemeinheit und führt zu einer Menge von Specialsätzen, sobald man die Ebene, in Bezug auf welche die Momente genommen werden, mit dieser oder jener ausgezeichneten Ebene der Figur zusammenfallen lässt. Für die hier behandelten Formen war der Abstand des Mittelpunktes des mit homogener Masse erfüllt gedachten Körpers das arithmetische Mittel aus den Abständen der Ecken, d. h. der Massenmittelpunkt des Körpers war zugleich der Massenmittelpunkt seiner gleichmassig gedachten Ecken. Diese Eigenschaft besitzen verhältnissmässig wenige ebenflächig begrenzte Formen.

Der Satz vom Massenmittelpunkte des dreiseitigen Prismas, dass er der Massenmittelpunkt des Mittelquerschnittes ist, gilt offenbar auch für jedes vielseitige Prisma und für jeden Cylinder als Grenze eines solchen. Ebenso gilt der Satz über den Massenmittelpunkt des Tetraeders, dass er die Verbindungslinie des Massenmittelpunktes der Grundfläche mit der gegenüberliegenden Spitze im Verhältniss 1 : 3 theilt, für jede vielseitige Pyramide und den Kegel.

4. Die Auffindung des Massenmittelpunktes homogener Figuren wird oft sehr erleichtert durch die Anwendung der folgenden, bereits §. 3. angedeuteten Sätze, welche wir hier für continuirliche Systeme ausführlicher besprechen müssen:

a) **Besitzt die Oberfläche eines homogenen Körpers eine Symmetrieebene, so liegt der Massenmittelpunkt in ihr.** Eine solche Ebene besitzt nämlich die Eigenschaft, dass eine Senkrechte in irgend einem Punkte auf ihr errichtet, diesseits und jenseits vom Fusspunkte bis zum Schnittpunkte mit der Fläche gleiche Länge hat. Legt man daher ein System von Parallelebenen, welche in unendlich kleinen Abständen aufeinanderfolgen, senkrecht zur Symmetrieebene und schneidet dies System durch ein anderes von derselben Beschaffenheit, so zerfällt der ganze Raum und folglich auch die Partie desselben, welche den fraglichen Körper bildet, in unendlich schmale prismatische Säulchen, senkrecht zur Symmetrieebene und diesseits und jenseits derselben gleich lang. Zerschneidet man dieselben durch ein drittes System Ebenen parallel der Symmetrieebene geführt, in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipede, so haben diese paarweise gleiche und entgegengesetzte Abstände von der Symmetrieebene und da sie von gleicher Masse sind, auch gleiche und entgegengesetzte Momente in Bezug auf sie. Daher ist die Summe der Momente der Massen des ganzen Körpers bezüglich der Symmetrieebene gleich Null und geht sie folglich durch den Massenmittelpunkt.

b) **Besitzt die Oberfläche eines homogenen Körpers eine Diametralebene, so enthält diese den Massenmittelpunkt desselben.** Eine Diametralebene halbirt ein Sehnensystem von bestimmter Richtung (die Symmetrieebene ist eine Diametralebene, welche das ihr zugeordnete Sehnensystem rechtwinklig halbirt). Der Beweis des Satzes wird wie der des vorigen geführt, die beiden ersten Ebenensysteme laufen der Sehnenrichtung parallel und besteht der ganze Unterschied vom vorigen Falle darin, dass sie schräg auf der Diametralebene stehen.

c) **Besitzt die Oberfläche des Körpers eine Symmetrieaxe, so enthält diese den Massenmittelpunkt.** Eine Symmetrieaxe ist eine Gerade von der Eigenschaft, dass jede zu ihr senkrechte Gerade die Fläche in zwei Punkten trifft, welche diesseits und jenseits vom Fusspunkte gleichweit abstehen. Legt man durch eine solche Axe eine Schaar Ebenen, welche unendlich kleine Winkel aufeinanderfolgend miteinander bilden und schneidet dieselbe mit einer zweiten Schaar Ebenen, welche zur Axe senkrecht sind, so zerfällt der Körper in unendlich schmale, paarweise gleiche keilförmige Scheitelräume. Ein System von Kreiscylindern, deren gemeinsame Axe mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, zerlegt diese Keile in unendlich kleine, paarweise von der Axe gleichentfernte Elemente. Die Massenmittelpunkte aller Paare solcher Elemente liegen in der Axe, mithin auch der Massenmittelpunkt des Ganzen.

d) Besitzt die Oberfläche des Körpers einen Mittelpunkt, so ist er zugleich der Massenmittelpunkt. Ein Mittelpunkt halbirt alle durch ihn hindurchgehende Sehnen der Fläche. Zieht man durch denselben eine beliebige Gerade und legt um sie eine Schaar gerader Kegelflächen concentrisch mit der Fläche, so zerlegen sie den Körper in unendlich dünne gleiche conische Scheitelräume; ein durch die Gerade geführtes Ebenensystem spaltet diese in gleiche pyramidale Scheitelräume und ein System Kugelflächen, concentrisch mit der Oberfläche des Körpers, zerlegt wiederum diese in paarweise gleiche und vom Mittelpunkte gleich weit abstehende Volumenelemente. Da dieselben paarweise gleiche Masse besitzen, so fallen die Massenmittelpunkte aller Paare in den Mittelpunkt und dieser ist mithin auch Massenmittelpunkt des Ganzen.

5. Für den Kugelsector ist die Linie vom Kugelmittelpunkte nach dem Mittelpunkte der Kugelmütze Symmetrieaxe und enthält folglich den Massenmittelpunkt. Zerlegt man den Sector in Elementarpyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze im Mittelpunkte, so liegen die Massenmittelpunkte aller dieser auf einer Kugelmütze vom Radius $\frac{3}{4}r$, wenn r den Radius der Kugel bedeutet und ist der Massenmittelpunkt dieser Kugelmütze zugleich der des Kugelsectors. Daher ist nach §. 3. Nr. 9 $x_1 = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$, wenn h die Höhe der Kugelmütze ist, oder auch $x_1 = \frac{3}{8}(2r - h)$ und da $2r - h = r + r\cos\alpha = 2r\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ ist, wenn α die halbe Oeffnung des Sectors bedeutet, so wird schliesslich $x_1 = \frac{3}{4}r\cos^2\frac{1}{2}\alpha$. Für die Halbkugel ist $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, mithin der Abstand ihres Massenmittelpunktes vom Kugelmittelpunkte $x_1 = \frac{3}{8}r$.

Für das Kugelsegment nehme man die Momente des Sectors, des Kegels und des Segmentes in Bezug auf die zur Symmetrieaxe senkrechte, durch den Mittelpunkt gehende Ebene und setze die Summe der beiden letzteren Momente gleich dem ersteren. Nun sind die Volumina des Sectors, Kegels und Segmentes $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ (Product aus dem Inhalte der Kugelmütze $2\pi rh$ und $\frac{1}{3}r$),

$$\tfrac{1}{3}\pi h\,(r - h)\,(2r - h)$$

(die Grundfläche ist $\pi(2r - h)h$), $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ (Differenz zwischen Sector und Kegel) und die Abstände ihrer Massenmittelpunkte vom Kugelmittelpunkte sind $\frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h$, $\frac{3}{4}(r - h)$, x_1 und hiermit wird die Gleichung der Momente:

$$\tfrac{2}{3}\pi r^2 h\,.\,\tfrac{3}{8}(2r - h) = \tfrac{1}{3}\pi h\,(r - h)\,(2r - h)\cdot\tfrac{1}{3}(r - h) + \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)\,.\,x_1,$$

woraus folgt:

$$x_1 = \tfrac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}\,.$$

6. Um die Coordinaten x_1, y_1, z des Massenmittelpunktes eines beliebigen Körpers zu finden, sei $dx\,dy\,dz$ das am Punkte (xyz) im Innern des Körpers liegende Volumenelement, mithin $\varrho\,dx\,dy\,dz$ seine Masse und $\varrho x\,dx\,dy\,dz$, $\varrho y\,dx\,dy\,dz$, $\varrho z\,dx\,dy\,dz$

seine Momente in Bezug auf die Coordinatenebenen. Integrirt man diese vier Differentialien dritter Ordnung nach z zwischen zwei Grenzen z', z'', welche sich aus der Gleichung der Oberfläche des Körpers ergeben, so erhält man die Masse und die Momente einer unendlich schmalen Säule des Körpers vom Querschnitte $dx\,dy$ und der Höhe $z'' - z'$. Integrirt man hierauf die so gewonnenen Resultate, welche Differentialien zweiter Ordnung sind, nach y zwischen den Grenzen y', y'', welche die Gleichung der Projection der Oberfläche des Körpers auf die xy-Ebene gibt, so findet man die Masse und die Momente einer dünnen Lamelle von der Dicke dx, parallel der yz-Ebene. Durch eine abermalige Integration nach x zwischen den Grenzen x', x'', welche durch die äussersten Berührungsebenen der Oberfläche auf der x-Axe bestimmt werden, welche man parallel zur yz-Ebene legen kann, erhält man endlich die Masse M des ganzen Körpers und die Momente Mx_1, My_1, Mz_1 bezüglich der drei Coordinatenebenen. Daher bestehen für die Coordinaten des Massenmittelpunktes die Gleichungen:

$$M = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho\,dx\,dy\,dz, \quad M.x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho x\,dx\,dy\,dz,$$

$$M.y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho y\,dx\,dy\,dz, \quad M.z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} \varrho z\,dx\,dy\,dz.$$

Ist der Körper homogen, also ϱ constant, so wird $M = \varrho V$, wenn V das Volumen desselben bedeutet und mithin sind die Formeln:

$$V = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dx\,dy\,dz, \quad V.x_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$V.y_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} y\,dx\,dy\,dz, \quad V.z_1 = \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} z\,dx\,dy\,dz,$$

wobei man die Integration nach z sofort ausführen kann.

Ist der homogene Körper ein Rotationskörper und die Rotationsaxe z. B. die x-Axe, so vereinfachen sich diese Gleichungen sehr bedeutend. In diesem Falle ist nämlich $z' = -z''$ und folglich $\int_{z'}^{z''} dz = 2z''$, $\int_{z'}^{z''} z\,dz = \frac{1}{2}(z''^2 - (-z'')^2) = 0$, $\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} y\,dy\,dz = \int_{y'}^{y''} y \cdot 2z''\,dy = 0$, da jedem Producte $2z''y$ mit positivem y ein entgegengesetzt gleiches mit negativem y zugehört und sich folglich die Elemente des Integrales paarweise tilgen. Endlich ist $\int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dy\,dz = 2\int_{y'}^{y''} z''\,dy$ der Inhalt eines Kreisringes von den Radien y', y'' und daher gleich $\pi(y''^2 - y'^2)$. Durch diese speciellen Werthe ergibt sich aber jetzt:

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} (y''^2 - y'^2)\,dx, \quad V.x_1 = \pi \int_{x'}^{x''} x\,(y''^2 - y'^2)\,dx, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0.$$

Der Inhalt dieser Formeln leuchtet auch unmittelbar ein; y_1 und z_1 sind Nu weil die x-Axe die Symmetrieaxe der Figur ist. Für $y' = 0$ wird der Rotationskörper ein Vollkörper.

Von den obigen allgemeinen Formeln für homogene Körper lässt sich die erste und zweite für manche Zwecke bequemer schreiben. Da nämlich der Querschnitt Q des Körpers senkrecht zur x-Axe den Inhalt hat: $Q = \int_{y'}^{y''}\int_{z'}^{z''} dy\,dz$, so wird hiermit

$$V = \int_{x'}^{x''} Q\,dx, \quad V \,.\, x_1 = \int_{x'}^{x''} Qx\,dx.$$

7. Wir wollen diese letzte Bemerkung benutzen für die Bestimmung des Massenmittelpunktes eines parallel abgeschnittenen Kreiskegels. Da jede durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen gelegte Ebene eine Diametralebene ist, so liegt der Massenmittelpunkt auf dieser Verbindungslinie. Nehmen wir also die Kegelspitze als Coordinatenursprung und das Perpendikel auf die Grundflächen zur Richtung der x-Axe, so hat man, wenn h, h' die Abstände der Grundflächen von der Spitze, B der Querschnitt für h, Q der Querschnitt, entsprechend einer beliebigen Abscisse x, ist: $\frac{Q}{B} = \frac{x^2}{h^2}$ (wegen der Aehnlichkeit der Kreisschnitte), mithin $Q = \frac{B}{h^2} x^2$ und daher:

$$V = \int_{h'}^{h} Q\,dx = \tfrac{1}{3} \frac{B}{h^2} (h^3 - h'^3), \quad V \,.\, x_1 = \int_{h'}^{h} Qx\,dx = \tfrac{1}{4} \frac{B}{h^2} (h^4 - h'^4),$$

folglich

$$x_1 = \tfrac{3}{4} \frac{h^4 - h'^4}{h^3 - h'^3}.$$

Hieraus ist leicht der Abstand des Massenmittelpunktes von den Grundflächen und das Verhältniss zu entwickeln, nach welchem er die Höhe theilt.

8. Massenmittelpunkt einer homogenen, von zwei parallelen Ebenen begrenzten elliptischen Platte. Wir beziehen das Ellipsoid, aus welchem die Platte geschnitten ist, auf die den Grenzebenen parallele Diametralebene als yz-Ebene, indem wir zu Axen der y und z die Richtungen irgend zweier conjugirter Semidiameter a, b, welche den Winkel ω bilden, zur x-Axe aber die Richtung des dritten, zu a, b conjugirten Semidiameters c nehmen, dessen Neigung gegen die yz-Ebene λ sei. Der Massenmittelpunkt der Platte liegt auf der x-Axe, da jede durch sie hindurchgehende Ebene eine Diametralebene ist; demnach bleibt blos x_1 zu suchen. Nun ist die Gleichung des Ellipsoids in Bezug auf unser Coordinatensystem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und die Gleichung des elliptischen Querschnittes Q im Abstande x wird $\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$. Der Inhalt dieses Querschnittes wird erhalten, wenn man das Rechteck der Halbaxen desselben mit π multiplicirt; dies Rechteck wird aber durch $bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin \omega$ ausgedrückt, da das Parallelogramm über conjugirten Semidiametern constant ist. Demnach ist $Q = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin \omega$. Die Höhe der an Q anstossenden unend-

lich dünnen Lamelle ist $dx \sin \lambda$ und folglich ihr Inhalt $\pi b c \sin \omega \sin \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$ und da $x \sin \lambda$ ihr Abstand von der yz-Ebene ist, so wird ihr Moment in Bezug auf diese Ebene $\pi b c \sin \omega \sin^2 \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x dx$. Daher hat man mit Rücksicht darauf, dass $V \,.\, x_1 \sin \lambda$ das Moment der ganzen Platte wird:

$$V = \pi b c \sin \omega \sin \lambda \int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx, \quad V \,.\, x_1 = \pi b c \sin \omega \sin \lambda \int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x dx,$$

unter α und β die Stücke verstanden, welche die Grenzebenen der Platte von der x-Axe abschneiden. Hiermit erhält man:

$$V = \pi b c \sin \omega \sin \lambda \frac{(\beta - \alpha)(3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2)}{3a^2},$$

$$V \,.\, x_1 = \pi b c \sin \omega \sin \lambda \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{4a^2}$$

und folglich

$$x_1 = \tfrac{3}{4} \frac{(\alpha + \beta)(2a^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{3a^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2}.$$

Diese Formel ist unabhängig von λ und bleibt für dieselben α, β für alle Richtungen gültig, nach welchen der Semidiameter a denselben Werth hat, d. h. für die Erzeugungslinien eines Kegels, der mit dem Ellipsoid concentrisch ist und durch die Schnittcurve der Fläche des Ellipsoids mit einer Kugel vom Radius a hindurchgeht.

Für $\alpha = 0$ und $\beta = a$ wird die Platte zum halben Ellipsoid, denn es wird $V = \frac{2}{3} \pi a b c \sin \omega \sin \lambda$ und ist $a b c \sin \omega \sin \lambda$ der constante Inhalt des über den drei conjugirten Semidiametern a, b, c beschriebenen Parallelepipeds und folglich gleich dem Producte der drei halben Hauptaxen A, B, C; $\frac{2}{3} \pi A B C$ stellt also das Volumen des halben Ellipsoids dar. Für x_1 hat man in diesem Falle $x_1 = \frac{3}{8} a$. Lässt man also eine Diametralebene des Ellipsoids sich um den Mittelpunkt desselben drehen, so schneidet sie vom Ellipsoid in allen Lagen die Hälfte ab und die Massenmittelpunkte aller dieser Hälften liegen auf den zur Schnittebene conjugirten Semidiametern um $\frac{3}{8}$ ihrer Länge vom Mittelpunkte ab. Sie bilden daher ein dem gegebenen Ellipsoide im Verhältniss $\frac{3}{8}$ ähnliches Ellipsoid. Bei einem schwimmenden Ellipsoid sind sie die Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeit.

9. Bei Anwendung von Polarcoordinaten, nämlich des Radiusvectors r, des Winkels ϑ zwischen ihm und der Polaraxe und des Winkels φ zwischen der Ebene von ϑ und der Fundamentalebene erhält man für das Volumenelement

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

und da $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $z = r \sin \vartheta \sin \varphi$, so gehen die Formeln für die Bestimmung des Massenmittelpunktes über in:

$$M = \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad M \,.\, x_1 = \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

$$M \,.\, y_1 = \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^3 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad M \,.\, z_1 = \int\!\!\int\!\!\int \varrho r^3 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

und bei constanter specifischer Masse, welche im Allgemeinen eine Function von r, ϑ, φ sein wird, in:

$$V = \int\int\int r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad V \,.\, x_1 = \int\int\int r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

$$V \,.\, y_1 = \int\int\int r^3 \sin^2\vartheta \cos\varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi, \quad V \,.\, z_1 = \int\int\int r^3 \sin^2\vartheta \sin\varphi \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

In Bezug auf die Grenzen dieser Integrale sind aber zwei Fälle zu sondern: 1. die Masse des Körpers enthält den Pol, dann ist nach ϑ von 0 bis π und nach φ von 0 bis 2π oder umgekehrt nach ϑ von 0 bis 2π und nach φ von 0 bis π zu integriren und 2. die Masse enthält den Pol nicht; in diesem Falle sind die Grenzen für ϑ und φ nicht constant, sondern hängen von der Beschaffenheit des Tangentenkegels ab, den man vom Pole an die Oberfläche des Körpers legen kann. Die Grenzen für r ergeben sich aus der Polargleichung der Fläche. Hat die Masse leere Hohlräume, so ist eine besondere Untersuchung hinsichtlich der Grenzen für r nöthig.

10. Conischer Ausschnitt einer Kugelschicht (Durchdringungsraum eines Kreiskegels von der halben Oeffnung α und der zwischen zwei mit ihm concentrischen Kugeln von den Radien R_0, R enthaltenen Schicht.)

Man hat hierfür, wenn die Symmetrieaxe Polaraxe ist:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{R_0}^{R} r^2 \, dr = \tfrac{4}{3}\pi \, (R^3 - R_0^3) \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$V \,.\, x_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \int_{R_0}^{R} r^3 \, dr = \tfrac{1}{4}\pi \, (R^4 - R_0^4) \sin^2 \alpha$$

und mithin

$$x_1 = \tfrac{3}{4} \frac{R^4 - R_0^4}{R^3 - R_0^3} \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

11. Einige Aufgaben über die Bestimmung des Massenmittelpunktes körperlicher Räume.

a) Ein Bogen der Parabel $y^2 = 2px$ vom Scheitel an gerechnet bis zur Abscisse a rotirt um die Tangente des Scheitels; das Volumen und die Lage des Massenmittelpunktes des Rotationskörpers zu finden.

b) Den Massenmittelpunkt einer parabolischen Platte zu finden, welche aus einem Rotationsparaboloid senkrecht zur Rotationsaxe geschnitten ist und Basiskreise von den Radien a und b besitzt.

c) Den Massenmittelpunkt des hyperbolischen Rotationskörpers zu bestimmen, welcher durch einen Bogen der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$, vom Scheitel bis zur Abscisse c gerechnet, um die reelle Axe erzeugt wird.

d) Den Massenmittelpunkt des Körpers zu finden, welcher durch Rotation der von den beiden Parabeln $y^2 = 2px$ und $y^2 = 2p'(a - x)$ eingeschlossenen Fläche um die gemeinschaftliche Hauptaxe entsteht.

e) Den Massenmittelpunkt des Octanten einer Kugel vom Radius a zu finden.

f) Von den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z sind die Stücke a, b, c, vom Ursprung O an gerechnet, abgeschnitten und ihre Endpunkte seien resp. A, B, C. In der yz-Ebene zieht man die Gerade BC, in der

xz-Ebene die Gerade AC und in der xy-Ebene durch B die Gerade BD parallel der x-Axe. Eine weitere Gerade QR bewegt sich nun so, dass sie stets der yz-Ebene parallel bleibt und die Geraden AC, BD schneidet; man soll den Massenmittelpunkt des Körpers bestimmen, welchen die erzeugte Fläche mit dem Octanten der Halbaxen bestimmt, auf welchen a, b, c abgeschnitten wurden.

VIII. Capitel.

Quadratische Momente. Trägheitsmomente.

§. 1. Das Product mp^2 aus der Masse m eines Punktes und dessen Abstand p von einem Punkte O heisst das polare quadratische Moment oder auch das polare Trägheitsmoment von m in Bezug auf O und die Summe Σmp^2 der polaren quadratischen Momente aller Punkte eines Systems in Bezug auf O das polare quadratische Moment oder das polare Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf diesen Punkt. Bereits Cap. VI, §. 6 haben wir gezeigt, dass man eine Länge σ finden kann, den Radius des polaren Momentes, so dass $\Sigma m \,.\, \sigma^2 = \Sigma mp^2$ wird. In ähnlicher Weise nennt man das Product mq^2 aus der Masse m eines Punktes und dessen Abstand q von einer Ebene E das quadratische Moment von m in Bezug auf diese Ebene und Σmq^2 das quadratische Moment des Systems in Bezug auf E, sowie eine Länge ι, wofür $\Sigma m \,.\, \iota^2 = \Sigma mq^2$ wird, den Arm dieses Momentes. Endlich das Produkt mr^2 aus der Masse m eines Punktes und dessen Abstand r von einer Geraden (Axe) h wird das quadratische Moment oder auch nach Euler's Vorgange das Trägheitsmoment von m in Bezug auf die Axe h genannt. Die Summe Σmr^2 der Trägheitsmomente aller Punkte eines Systems in Bezug auf dieselbe Axe h heisst das Trägheitsmoment des Systems für diese Axe und eine Länge $\varkappa$, welche der Bedingung genügt $\Sigma m \,.\, \varkappa^2 = \Sigma mr^2$ der Trägheitsradius des Systems für diese Axe.

Die genannten drei Momente sind für positive Massen, welche wir hier durchweg voraussetzen wollen, positive Grössen und hängen von der geometrischen Beschaffenheit des Punktsystems (dasselbe kann aus discreten Punkten bestehen oder ein continuirliches Gebilde, eine Linie, Fläche oder ein Körperraum sein), von der Massenvertheilung in demselben und von seiner Lage gegen den Punkt O, die Ebene E oder die Axe h ab. Sie sind unter sich verknüpft, wenn der Punkt, die Ebene und die Axe in einer gewissen Abhängigkeit stehen. Die Radien σ, ι, $\varkappa$ sind gewisse Mittelgrössen; so z. B. ist $\varkappa$ ein Mittelwerth unter allen Abständen r der verschiedenen Systempunkte von der Axe. Denn sind r_0 und r_0' der kleinste und der grösste unter den Abständen r von der Axe, so ist, wenn man in Σmr^2 das einemal alle verschiedene r durch r_0, das anderemal durch r_0' ersetzt:

$$\Sigma m \,.\, r_0^2 < \Sigma m r^2 < \Sigma m \,.\, r_0'^2$$

und indem man in dem Ausdrucke $\Sigma m \,.\, x^2$ der Variabeln x alle Werthe von r_0 bis r_0' beilegt, so folgt, dass es einen solchen Werth $x = \varkappa$ zwischen r_0 und r_0' geben muss, wofür $\Sigma m \,.\, \varkappa^2 = \Sigma m r^2$ wird, d. h. dass der Radius $\varkappa$ ein Mittelwerth der Abstände r ist. Aehnliches gilt von σ und ι. Die Linie $\varkappa$ gibt den Abstand eines Punktes von der Axe an, dessen Trägheitsmoment gleich dem Trägheitsmomente des ganzen Systems wird, wenn man demselben eine Masse gleich der Gesammtmasse Σm des Systems zuertheilt. Auch ist $\varkappa$ der Abstand einer Cylinderfläche von der Axe, auf welcher die Gesammtmasse irgendwie vertheilt, in Bezug auf die Axe ein Trägheitsmoment darbieten würde gleich dem Trägheitsmomente des ganzen Systems. Ebenso ist σ der Abstand eines Punktes von O oder der Radius einer Kugelfläche um O als Mittelpunkt, so dass die Gesammtmasse diesem Punkte zuertheilt oder auf der Kugelfläche irgendwie vertheilt in Bezug auf O dasselbe polare Trägheitsmoment liefern würde, wie das System. Aehnliches gilt von ι in Bezug auf einen Punkt oder eine zu E parallele Ebene, wenn der Punkt oder die Ebene die Masse Σm enthält.

§. 2. Das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ eines Systems in Bezug auf eine Axe h lässt sich bilden mit Hülfe des polaren quadratischen Momentes $\Sigma m p^2$ in Bezug auf irgend einen beliebigen Punkt O dieser Axe und des Trägheitsmomentes $\Sigma m q^2$ in Bezug auf die durch O gehende, zu h senkrechte Ebene. Denn die Abstände r, p, q (Fig. 43) des Punktes von der Masse m von der Axe, dem Punkte O und der Ebene E bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem $p^2 = q^2 + r^2$; daher ist

$$\Sigma m p^2 = \Sigma m q^2 + \Sigma r m^2$$

und

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m p^2 - \Sigma m q^2 .$$

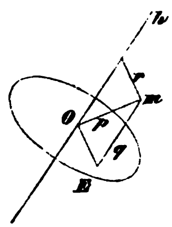

Fig. 43.

Das polare quadratische Moment in Bezug auf einen Punkt O ist gleich der Summe des Trägheitsmomentes in Bezug auf eine durch O gehende Axe und des Trägheitsmomentes bezüglich der zu dieser Axe senkrechten Ebene des Punktes O; das Trägheitsmoment bezüglich einer Axe ist die Differenz zwischen dem polaren quadratischen Momente bezüglich eines Punktes dieser Axe und dem Trägheitsmomente bezüglich der zu dieser Axe senkrechten Ebene dieses Punktes.

Drückt man die drei Momente durch die Radien σ, $\varkappa$ und den Arm ι aus, wofür also

$$\Sigma m \,.\, \sigma^2 = \Sigma m p^2, \quad \Sigma m \,.\, \varkappa^2 = \Sigma m r^2, \quad \Sigma m \,.\, \iota^2 = \Sigma m q^2,$$

so ergibt sich

$$\sigma^2 = \iota^2 + \varkappa^2.$$

Es können also die drei Linien σ, $\varkappa$, ι ein rechtwinkliges Dreieck bilden, dessen Hypotenuse σ ist. Daher ist das polare Trägheitsmoment grösser, sowohl als das Trägheitsmoment für eine jede Axe, als auch grösser als das Trägheitsmoment für eine jede Ebene des Poles O.

§. 3. Die Fundamentalaufgabe der Theorie der Trägheitsmomente ist die, das Trägheitsmoment eines gegebenen Systems für alle Axen des Raumes zu finden. Wir werden sie durch Reduction lösen, indem wir zunächst zeigen, wie man das Trägheitsmoment für alle Stralen eines Parallelstralenbündels von Axen bestimmt und wie man dasselbe für alle Stralen eines Stralenbündels bei beliebiger Lage seines Mittelpunktes findet.

Es seien h, h' (Fig. 44) zwei parallele Axen, r, r' die Abstände eines Punktes von der Masse m von diesen Axen, δ der Abstand der Axen. Dann ist

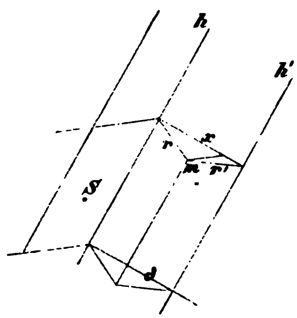

Fig. 44.

$$mr'^2 = mr^2 - 2m\delta r \cos(r\delta) + \delta^2 . m,$$

mithin

$$\Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 - 2\delta\Sigma mr \cos(r\delta) + \delta^2\Sigma m.$$

Legt man durch die Axe h eine Ebene senkrecht zu δ, so ist $r\cos(r\delta) = x$ der Abstand der Masse m von dieser Ebene und

$$\Sigma mr \cos(r\delta) = \Sigma mx = x_1\Sigma m$$

das Moment ersten Grades des Systems in Bezug auf diese Ebene. Die vorstehende Formel nimmt hiemit die Gestalt an:

$$\Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 - 2\delta x_1\Sigma m + \delta^2\Sigma m.$$

Für den Fall, dass die Axe h durch den Massenmittelpunkt S des Systems hindurchgeht, ist $x_1 = 0$ und $\delta^2\Sigma m$ das Trägheitsmoment des Massenmittelpunktes, wenn man ihm die Gesammtmasse Σm zuertheilt, in Bezug auf die Axe h' oder also:

$$\Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 + \delta^2\Sigma m.$$

Man sieht hieraus:

1. Kennt man das Trägheitsmoment Σmr^2 eines Systems in Bezug auf eine Axe h des Massenmittelpunktes S, so findet man das Trägheitsmoment für irgend einen Stral h' des Parallelbündels von der Richtung h im Abstande δ von h, indem man zu Σmr^2 das Trägheitsmoment $\delta^2\Sigma m$ des Massenmittelpunktes in Bezug auf h' addirt, wenn man demselben die Gesammtmasse des Systems zuertheilt.

2. Alle Stralen des Parallelbündels, welche gleichen Ab-

stand von dem Strale h des Massenmittelpunktes haben, besitzen gleiches Trägheitsmoment.

3. Das Trägheitsmoment ist für die Axe h des Massenmittelpunktes ein Minimum.

Es muss bemerkt werden, dass die Gleichung

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + \delta^2 \Sigma m$$

auch dann noch besteht, wenn die Axe h zwar nicht den Massenmittelpunkt enthält, wohl aber die Ebene, welche durch h senkrecht zur Ebene (hh') beider Axen gelegt werden kann, durch den Massenmittelpunkt hindurchgeht.

Aehnliche Betrachtungen können auch hinsichtlich des Trägheitsmomentes $\Sigma m q^2$ in Bezug auf eine Ebene durchgeführt werden. Sind E, E' zwei Parallelebenen, q, q' die Abstände von m von ihnen und δ ihr Abstand von einander, so ist $q' = q - \delta$, wo δ nach der einen Seite von E hin positiv, nach der andern hin negativ gerechnet wird. Daher wird

$$\Sigma m q'^2 = \Sigma m q^2 - 2\delta \Sigma m q + \delta^2 \Sigma m,$$

$\Sigma m q$ ist das Moment ersten Grades des Systems in Bezug auf die Ebene E und gleich $x_1 \Sigma m$, wenn x_1 den Abstand des Massenmittelpunktes des Systems von E bedeutet. Geht die Ebene E durch den Massenmittelpunkt hindurch, so wird $x_1 = 0$ und mithin

$$\Sigma m q'^2 = \Sigma m q^2 + \delta^2 \Sigma m.$$

Hieraus folgt:

Unter den Trägheitsmomenten eines Systems in Bezug auf die Ebenen eines Parallelebenenbündels ist dasjenige das kleinste, welches der Ebene des Massenmittelpunktes entspricht. In Bezug auf zwei Ebenen E' in gleichem Abstande diesseits und jenseits von dieser Ebene sind die Trägheitsmomente gleich und werden aus dem Trägheitsmomente für die Ebene des Massenmittelpunktes erhalten, indem man diesem Trägheitsmomente das Trägheitsmoment des Massenmittelpunktes, welchem man die Gesammtmasse zuertheilt, in Bezug auf die Ebene E' zufügt.

§. 4. Da wir nach dem vorigen Paragraphen das Trägheitsmoment für jede Axe des Raumes zu bestimmen vermögen, sobald wir dasselbe für die ihr parallele Axe des Massenmittelpunktes kennen, so bedürfen wir nur noch einer Methode für die Auffindung der Trägheitsmomente für die Axen des Massenmittelpunktes. Wir suchen im Folgenden das Trägheitsmoment für die Axen irgend eines Punktes O auf, gleichviel ob dies der Massenmittelpunkt ist oder nicht.

Ist O (Fig. 45) der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z, sind α, β, γ die Richtungscosinusse einer Axe h des Punktes O, p der Abstand eines Systempunktes von der Masse m von O, x, y, z dessen Coordinaten und q sein Abstand von der zu h senkrechten Ebene des Punktes O, so ist

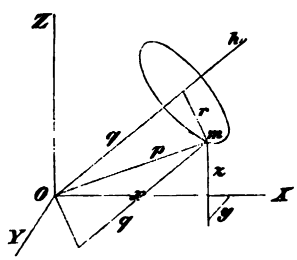

Fig. 45.

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad q = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

und mithin das polare Trägheitsmoment für den Punkt O:

$$\Sigma m p^2 = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2$$

und das Trägheitsmoment für die zu h senkrechte Ebene:

$$\Sigma m q^2 = \alpha^2 \Sigma m x^2 + \beta^2 \Sigma m y^2 + \gamma^2 \Sigma m z^2 + 2\beta\gamma \Sigma m y z + 2\gamma\alpha \Sigma m z x + 2\alpha\beta \Sigma m x y.$$

Aus beiden bildet sich das Trägheitsmoment für die Axe h nach der Formel:

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m p^2 - \Sigma m q^2,$$

d. h. es wird

$$\Sigma m r^2 = (1 - \alpha^2)\, \Sigma m x^2 + (1 - \beta^2)\, \Sigma m y^2 + (1 - \gamma^2)\, \Sigma m z^2 - 2\beta\gamma \Sigma m y z - 2\gamma\alpha \Sigma m z x - 2\alpha\beta \Sigma m x y$$

oder wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und mithin

$$1 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad 1 - \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2, \quad 1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

wenn man nach α, β, γ ordnet:

$$\Sigma m r^2 = \alpha^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \Sigma m (x^2 + y^2) - 2\beta\gamma \Sigma m y z - 2\gamma\alpha \Sigma m z x - 2\alpha\beta \Sigma m x y,$$

was wir schreiben wollen:

$$\Sigma m r^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Da $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$, $x^2 + y^2$ die Quadrate der Abstände von m von den Axen der x, y, z sind, so stellen von den sechs Coefficienten

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad D = \Sigma m y z,$$
$$B = \Sigma m (z^2 + x^2), \quad E = \Sigma m z x,$$
$$C = \Sigma m (x^2 + y^2), \quad F = \Sigma m x y,$$

die drei ersten, A, B, C, die Trägheitsmomente des Systems für die Coordinatenaxen dar und sind für positive Massen, welche wir hier voraussetzen, positive Grössen; die drei letzten D, E, F wollen wir nach Rankine Deviationsmomente nennen. Sie können auch bei Voraussetzung durchaus positiver Massen positive oder negative Grössen sein.

Das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf einen Stral h eines Stralenbündels O als Axe ist eine homogene Function zweiten Grades der Richtungscosinusse α, β, γ des Strales in Bezug auf irgend drei zu einander senkrechte Stralen desselben Punktes als Coordinatenaxen; die Coefficienten der Quadrate von α, β, γ sind die Trägheitsmomente des Systems für die Coordinatenaxen.

Setzen wir die Trägheitsmomente in Bezug auf die Coordinatenebenen, nämlich

$$\Sigma m x^2 = A', \quad \Sigma m y^2 = B', \quad \Sigma m z^2 = C',$$

so wird der Ausdruck für das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene, deren Normale h die Richtungscosinusse α, β, γ, besitzen:

$$\Sigma m q^2 = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta,$$

ein Ausdruck, welcher sich von dem für $\Sigma m r^2$ durch die Werthe der Coefficienten der Quadrate und die Vorzeichen der Glieder mit den Producten der Grössen α, β, γ unterscheidet.

Da die Coordinatenaxen und somit auch die Coordinatenebenen beliebig sind, so folgt aus vorstehenden Formeln:

$$A' + B' + C' = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2 = \Sigma m p^2,$$
$$A + B + C = 2[\Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2] = 2\,\Sigma m p^2:$$

Die Summe der Trägheitsmomente in Bezug auf drei zu einander rechtwinklige Ebenen, sowie auch die in Bezug auf drei zu einander rechtwinklige Axen eines Punktes O bleibt constant für alle solche Tripel von Ebenen oder Axen dieses Punktes. Die constante Summe der letzteren drei Trägheitsmomente ist doppelt so gross, als die der drei ersteren, nämlich doppelt so gross als das polare Trägheitsmoment für den Punkt O.

Ferner ist $B' + C' = A$, $C' + A' = B$, $A' + B' = C$ d. h. die Summe der Trägheitsmomente bezüglich zweier zu einander senkrechter Ebenen ist das Trägheitsmoment in Bezug auf deren Durchschnittslinie als Axe.

§. 5. In dem Ausdrucke für das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ für eine Axe und das $\Sigma m q^2$ für eine Ebene sind die drei ersten Coefficienten A, B, C resp. A', B', C', welche selbst Trägheitsmomente bedeuten, für positive Massen, wie sie hier immer vorausgesetzt werden, positive Grössen, während die drei letzten Coefficienten, welche aus Deviationsmomenten D, E, F gebildet sind, positiv oder negativ ausfallen können, je nach der Lage der Coordinatenaxen. Denn diese Momente, wie z. B. $\Sigma m x y$ enthalten positive und negative Elemente mxy. Es entsteht daher die Frage, ob man nicht etwa die Coordinatenaxen so wählen könne, dass die Momente alle drei zugleich verschwinden, wodurch die Ausdrücke für

$$\Sigma m r^2 \text{ und } \Sigma m q^2$$

eine wesentliche Vereinfachung erleiden würden. Um diese Frage möglichst einfach und anschaulich zu beantworten, wollen wir uns einer geometrischen Interpretation bedienen, welche für die Trägheitsmomente für Axen zuerst von Poinsot angegeben wurde.

Auf jeder Axe h, deren Lage durch die Richtungscosinusse α, β, γ

bestimmt ist, tragen wir vom Ursprunge O aus nach beiden Seiten eine Länge $OM = \varrho$ umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente des Systems für die Axe h auf, so dass also

$$\varrho = \sqrt{\frac{\text{const.}}{\Sigma m r^2}} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 \Sigma m r^2 = \text{const.}$$

wird, wo wir die Constante noch willkührlich wählen können. Wählen wir sie so, dass mit Hülfe von $\Sigma m r^2 = \Sigma m \,.\, \varkappa^2$.

$$\varrho \varkappa = \varepsilon^2,$$

also das Product aus der Strecke ϱ und Trägheitsradius $\varkappa$ von h für alle Axen dieselbe Grösse ε^2 ist, d. h. setzen wir $\frac{\text{const.}}{\Sigma m} = \varepsilon^4$, wo ε noch willkührlich wählbar bleibt, so wird

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m \,.\, \varkappa^2 = \Sigma m \cdot \frac{\varepsilon^4}{\varrho^2}$$
$$= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit ϱ^2 und bedenken, dass alsdann $\alpha\varrho$, $\beta\varrho$, $\gamma\varrho$ die Coordinaten x, y, z des Endpunktes M von ϱ bedeuten, so ergibt sich für die Fläche, welche sämmtliche Punkte M enthält, die Gleichung 2. Grades

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = \Sigma m \,.\, \varepsilon^4.$$

Diese Fläche zweiter Ordnung, welche O zum Mittelpunkte hat, besitzt drei Hauptaxen; wenn wir diese von vornherein zu Coordinatenaxen gewählt hätten, so würden in der Gleichung die Coefficienten von yz, zx, xy nicht vorkommen, dieselbe vielmehr die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \Sigma m \,.\, \varepsilon^4$$

angenommen haben, worin A, B, C die Trägheitsmomente bezüglich der Hauptaxen der Fläche bedeuten. Da diese Grössen ihrer Bedeutung nach positiv sind, so folgt, dass die Fläche ein Ellipsoid ist. Die Hauptaxen dieses Ellipsoids, welches von Cauchy*) gefunden wurde, dessen Bedeutung für die Theorie der Rotation Poinsot zuerst erkannte, und das wir das Cauchy-Poinsot'sche Trägheitsellipsoid des Punktes O nennen werden, haben also die Eigenschaft, dass in Bezug auf sie als Axen der x, y, z die drei Deviationsmomente

$$D = \Sigma myz, \quad E = \Sigma mzx, \quad F = \Sigma mxy$$

des Systems verschwinden. Wir nennen sie Hauptträgheitsaxen und die Trägheitsmomente A, B, C, welche ihnen entsprechen, die Hauptträgheitsmomente des Punktes O. Ist O der Massenmittelpunkt S des Systems,

*) Exercises de Mathématiques T. II, p. 98 (1824).

so nennen wir das Trägheitsellipsoid Centralellipsoid und seine Axen Hauptcentralaxen. Mit Hülfe der Hauptträgheitsradien a, b, c, wofür

$$A = \Sigma m \,.\, a^2,\ B = \Sigma m \,.\, b^2,\ C = \Sigma m \,.\, c^2$$

sind, nimmt die Gleichung der Fläche die Form an

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \varepsilon^4$$

und wenn man $x = \alpha\varrho$, $y = \beta\varrho$, $z = \gamma\varrho$, $\varepsilon^2 = \varrho\varkappa$ restituirt, erhält man für den Trägheitsradius $\varkappa$:

$$\varkappa^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

und für das Trägheitsmoment:

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m \,.\, \varkappa^2 = A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2.$$

Legt man der willkührlich wählbaren Constante ε alle Werthe bei, so erhält man eine ganze Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide, von denen jedes der Bestimmung der Trägheitsmomente zu Grunde gelegt werden kann.

Aus der Gleichung $\varrho\varkappa = \varepsilon^2$ folgt, dass mit wachsendem Radiusvector ϱ des Ellipsoids der Trägheitsradius $\varkappa$ und mit ihm das Trägheitsmoment $\Sigma m \,.\, \varkappa^2$ für die Axe h, in welche ϱ hineinfällt, abnimmt und umgekehrt. Wird das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so sind die Radienvectoren ϱ senkrecht zur Rotationsaxe alle einander gleich; alle Axen senkrecht zur Rotationsaxe haben daher gleiche Trägheitsmomente und sind die beiden Hauptaxen senkrecht zur Rotationsaxe der Lage nach unbestimmt. Wird das Ellipsoid eine Kugel, so haben alle Axen des Mittelpunktes gleiches Trägheitsmoment; alle Axen dieses Punktes sind Hauptaxen desselben.

§. 6. Um die Hauptaxen des Cauchy-Poinsot'schen Trägheitsellipsoids

$$U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy - \Sigma m \,.\, \varepsilon^4 = 0$$

zu finden, kann man ausdrücken, dass die Tangentenebene in dem Endpunkte des Radiusvectors ϱ $(\alpha\beta\gamma)$ vom Mittelpunkte der Fläche nach dem Punkte (xyz) auf dem Radiusvector senkrecht stehen muss, wenn er die Richtung einer Hauptaxe haben soll. Nun sind die Richtungscosinusse der Normalen des Punktes (xyz) der Fläche U proportional den Grössen

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} &= \quad Ax - Fy - Ez = \varrho\,(A\alpha - F\beta - E\gamma)\\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial y} &= -Fx + By - Dz = \varrho\,(-F\alpha + B\beta - D\gamma)\\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial z} &= -Ex - Dy + Cz = \varrho\,(-E\alpha - D\beta + C\gamma),
\end{aligned}$$

und wenn ihre Richtung mit der des Radiusvectors $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ zusammenfallen soll, so müssen folgende Gleichungen bestehen, in denen λ einen noch unbestimmten Proportionalitätsfactor bezeichnet:

$$\begin{aligned} A\alpha - F\beta - E\gamma &= \lambda\alpha, \\ -F\alpha + B\beta - D\gamma &= \lambda\beta, \\ -E\alpha - D\beta + C\gamma &= \lambda\gamma. \end{aligned}$$

Die Bedeutung von λ erhellt sofort. Multiplicirt man nämlich diese Gleichungen mit α, β, γ und addirt sie, so kommt

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta = \lambda = \Sigma mr^2 = H,$$

es ist also λ der Werth des dem Radiusvector ϱ als Axe entsprechenden Trägheitsmomentes, nämlich $\lambda = \Sigma mr^2 = H$, wo H abkürzend das Trägheitsmoment bezeichnet. Schreiben wir daher die Gleichungen so:

$$\begin{aligned} (H-A)\alpha + F\beta + E\gamma &= 0, \\ F\alpha + (H-B)\beta + D\gamma &= 0, \\ E\alpha + D\beta + (H-C)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

und eliminiren α, β, γ, so ergibt sich zur Bestimmung der drei den Hauptaxen entsprechenden Werthe des Trägheitsmomentes H die cubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} H-A & F & E \\ F & H-B & D \\ E & D & H-C \end{vmatrix} = 0$$

und sobald die drei Wurzeln H', H'', H''' derselben gefunden sind, liefern die obigen drei Gleichungen die drei zugehörigen Richtungen $(\alpha' \beta' \gamma')$, $(\alpha'' \beta'' \gamma'')$, $(\alpha''' \beta''' \gamma''')$ der Hauptaxen. Die Wurzeln der cubischen Gleichung sind alle drei reell. Man sieht dies leicht, indem man dieser Gleichung eine etwas übersichtlichere Gestalt gibt. Man kann sie zunächst so schreiben:

$$\begin{vmatrix} (H-A)D & DF & DE \\ EF & (H-B)E & DE \\ EF & DF & (H-C)F \end{vmatrix} = 0$$

oder, indem man von der ersten Reihe die zweite und von der zweiten die dritte subtrahirt

$$\begin{vmatrix} (H-A)D - EF, & DF - (H-B)E & 0 \\ 0 & (H-B)E - DF, & DE - (H-C)F \\ EF & DF & (H-C)F - DE + DE \end{vmatrix} = 0.$$

Dividirt man nun die erste Colonne mit D, die zweite mit E und die dritte mit F und setzt

$$A + \frac{EF}{D} = L, \quad B + \frac{FD}{E} = M, \quad C + \frac{DE}{F} = N,$$

so nimmt sie die Form an

$$\begin{vmatrix} H-L & M-H & 0 \\ 0 & H-M & N-H \\ \frac{EF}{D} & \frac{DF}{E} & H-N+\frac{DE}{F} \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\frac{\frac{EF}{D}}{L-H} + \frac{\frac{FD}{E}}{M-H} + \frac{\frac{DE}{F}}{N-H} - 1 = 0.$$

Diese Form der Gleichung lässt erkennen, dass wenn die Folge der Grössen L, M, N auch die relative Grösse derselben bezeichnet, so dass $L < M < N$ ist, die drei Wurzeln zwischen

$$-\infty, L, M, N \quad \text{oder} \quad L, M, N, +\infty$$

fallen, je nachdem das Product LMN positiv oder negativ ist, und mithin alle drei reell sind.

Ist $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \varepsilon^4$ die Gleichung des Trägheitsellipsoids, bezogen auf die Hauptaxen, so dass also $\Sigma m \,.\, a^2 = A$, $\Sigma m \,.\, b^2 = B$, $\Sigma m \,.\, c^2 = C$ die Hauptträgheitsmomente und a, b, c die ihnen entsprechenden Trägheitsradien sind, so sind die Halbaxen dieser Fläche

$$\frac{\varepsilon^2}{a}, \frac{\varepsilon^2}{b}, \frac{\varepsilon^2}{c},$$

so dass also die grösste Halbaxe dem kleinsten Hauptträgheitsradius und also auch dem kleinsten Hauptträgheitsmomente, die kleinste Halbaxe dem grössten und die mittlere Halbaxe dem mittleren Hauptträgheitsradius und Hauptträgheitsmomente entspricht. Man kann daher zu den hier entwickelten Resultaten auch dadurch gelangen, dass man den allgemeinen Ausdruck

$$H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

mit Rücksicht auf $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ in Bezug auf α, β, γ zu einem Maximum oder Minimum werden lässt. Für die Ausführung dieses Gedankens wird man behufs Elimination einer der Grössen α, β, γ den unbestimmten Factor λ benutzen, die Grösse

$$H - \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = (A - \lambda)\alpha^2 + \cdots$$

nach α, β, γ differentiiren und $\frac{\partial H}{\partial \alpha}, \frac{\partial H}{\partial \beta}, \frac{\partial H}{\partial \gamma}$ gleich Null setzen. Dies führt zu denselben Resultaten, wie vorher.

§. 7. Durch die Einführung des Cauchy-Poinsot'sche Ellipsoids erlangt die Theorie des Trägheitsmomentes einen hohen Grad geometischer Durchsichtigkeit. Fast jeder Satz über die Diameter des Ellipsoids liefert die Interpretation eines ihm entsprechenden Satzes über Trägheitsmomente.

Sind ϱ', ϱ'', ϱ''' drei zu einander senkrechte Semidiameter des Ellipsoids so ist nach einem bekannten Satze $\frac{1}{\varrho'^2} + \frac{1}{\varrho''^2} + \frac{1}{\varrho'''^2}$ constant für alle Lagen dieses Tripels zu einander rechtwinkliger Linien. Da nun

$$\varrho'\varkappa' = \varepsilon^2,\ \varrho''\varkappa'' = \varepsilon^2,\ \varrho'''\varkappa''' = \varepsilon^2,$$

wenn $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ die Trägheitsradien für $\varrho', \varrho'', \varrho'''$ als Axen sind, so folgt, dass $\varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \varkappa'''^2$ und mithin auch $H' + H'' + H'''$ constant ist, wenn H', H'', H''' die entsprechenden Trägheitsmomente sind. Dies gibt den schon §. 4 bewiesenen Satz: Die Summe der Trägheitsmomente für drei zu einander senkrechte Axen eines Punktes ist constant, nämlich gleich der Summe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes.

Nach einem andern Satze ist die Quadratsumme dreier conjugirter Semidiameter des Ellipsoids constant. Sind also h', h'', h''' drei solche conjugirte Axen, $\varkappa', \varkappa'', \varkappa''', H', H'', H'''$ ihre Trägheitsradien und Trägheitsmomente, $\varrho', \varrho'', \varrho'''$ die entsprechenden Semidiameter des Poinsot'schen Ellipsoids, so ist $\varrho'^2 + \varrho''^2 + \varrho'''^2$ constant, also

$$\frac{1}{\varkappa'^2} + \frac{1}{\varkappa''^2} + \frac{1}{\varkappa'''^2} \text{ und mithin } \frac{1}{H'} + \frac{1}{H''} + \frac{1}{H'''}$$

constant; d. h. die Summe der reciproken Werthe der Trägheitsmomente für drei zu einander in Bezug auf das Trägheitsellipsoid conjugirte Axen eines Punktes ist constant, nämlich gleich der Summe der reciproken Werthe der drei Hauptträgheitsmomente dieses Punktes.

Der geometrische Ort der Richtungslinien aller Diameter gleicher Länge $2r$ eines Ellipsoids ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit dem Ellipsoid den Mittelpunkt und die Hauptaxen gemein hat und dasselbe in einem sphärischen Kegelschnitt durchdringt. Dies liefert den Satz: Der Ort aller Axen eines Punktes von gleichem Trägheitsmomente ist ein Kegel zweiten Grades, welcher mit dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoid dieses Punktes gemeinsame Hauptaxen besitzt.

Die Gleichung des Ellipsoids ist $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - \varepsilon^4 = 0$, die der mit ihm concentrischen Kugel vom Radius r ist $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, mithin ist

$$\left(\frac{a^2}{\varepsilon^4} - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + \left(\frac{b^2}{\varepsilon^4} - \frac{1}{r^2}\right)y^2 + \left(\frac{c^2}{\varepsilon^4} - \frac{1}{r^2}\right)z^2 = 0$$

die Gleichung des Kegels, dessen Erzeugungslinien gleiches Trägheitsmoment $H = \Sigma m \cdot \frac{\varepsilon^4}{r^2}$ haben.

Ist $a < b < c$, d. h. sind a, b, c die Trägheitsradien der grössten, mittleren und kleinsten Axe des Ellipsoids, und ist r kleiner als die mittlere Halbaxe

$\frac{\varepsilon^2}{b}$, aber grösser als die kleinste Axe $\frac{\varepsilon^2}{c}$, so umgibt der Kegel die kleinste Axe des Ellipsoids; liegt r zwischen $\frac{\varepsilon^2}{b}$ und $\frac{\varepsilon^2}{a}$, so umgibt er die grösste Axe; ist aber $r = \frac{\varepsilon^2}{b}$, so zerfällt derselbe in die beiden Ebenen

$$(a^2 - b^2)x^2 - (b^2 - c^2)z^2 = 0$$

der Kreisschnitte des Ellipsoids, welche durch die mittlere Axe hindurchgehen. Lässt man den Radius r der Kugel von der Länge der kleinsten Halbaxe an bis zur Länge der grössten wachsen, so erhält man die ganze Schaar sphärischer Kegelschnitte auf dem Ellipsoid, durch welche die Kegel hindurchgehen, für deren Erzeugungslinien die Trägheitsmomente vom grössten Werthe bis zum kleinsten Werthe herab abnehmen.

Um über die Vertheilung der Axen gleichen Trägheitsmomentes im ganzen Raume ins Klare zu kommen, bedenken wir, dass in der Gleichung $H' = H + \Sigma m \,.\, d^2$, welche das Trägheitsmoment H' für irgend eine Axe h' des Raumes mit Hülfe des Trägheitsmomentes H der ihr parallelen Axe h des Massenmittelpunktes bestimmt, zwei Grössen H und d vorkommen, welche variiren können, ohne dass H' aufzuhören braucht, denselben Werth zu behalten. Ziehen wir durch den Massenmittelpunkt eine Axe h, welche dem Kegel für das Trägheitsmoment H angehört, so liegen alle Axen des Raumes, welche ihr parallel sind und das Trägheitsmoment H' besitzen, auf einem Cylinder, um h mit dem Radius $d = \sqrt{\frac{H' - H}{\Sigma m}}$ beschrieben. Wechselt h seine Lage auf dem Kegel, so verschiebt sich der Cylinder im Raume ohne seinen Radius d zu ändern. Wählt man einen andern Kegel, welchem ein anderer Werth von H zugehört, so ergibt sich eine andere Schaar Cylinder. Indessen sind die Axen h', welche ein gegebenes Trägheitsmoment besitzen sollen, an gewisse Grenzen hinsichtlich ihrer Entfernung d vom Massenmittelpunkte gebunden. Denn ist A der kleinste, C der grösste Werth, den das Trägheitsmoment H für die Axen des Massenmittelpunktes zulässt, so sind

$$d = \sqrt{\frac{H' - A}{\Sigma m}}, \quad d = \sqrt{\frac{H' - C}{\Sigma m}}$$

der grösste und kleinste Werth, den der Abstand d bei constantem H' annehmen kann. Beschreibt man daher mit diesen beiden Längen als Radien um den Massenmittelpunkt zwei Kugelflächen, so sind die Tangenten dieser Flächen hinsichtlich ihres Abstandes die äussersten Axen, welche das Trägheitsmoment H' besitzen. Zwischen diesen Grenzen kann man der Grösse d jeden Werth δ beilegen, um sofort eine Schaar Cylinder zu finden, deren Erzeugungslinien das Trägheitsmoment H' besitzen und deren Axen eine Kegelfläche mit dem Massenmittelpunkte als Mittelpunkt bilden, deren Erzeugungslinien der gemeinsame Werth $H = H' - \Sigma m \,.\, \delta^2$ des Trägheitsmomentes zukommt.

§. 8. Für das Trägheitsmoment $\Sigma m q^2$ bezüglich einer Ebene, deren Normale h die Richtungscosinusse α, β, γ besitzt, fanden wir §. 5

$$\Sigma m q^2 = \Sigma m \,.\, \iota^2 = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta,$$

wo $A' = \Sigma m x^2$, $B' = \Sigma m y^2$, $C' = \Sigma m z^2$ ist, D, E, F aber dieselbe Bedeutung haben, wie beim Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoid. Trägt man nun vom Ursprunge O auf der Normalen h nach beiden Seiten die Länge ϱ so auf, dass $\varrho = \sqrt{\frac{\text{const.}}{\Sigma m \,.\, \iota^2}}$, d. h. ϱ umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmomente in Bezug auf die Ebene wird und setzt $\frac{\Sigma m}{\text{const.}} = \varepsilon^4$, so dass $\varrho\iota = \varepsilon^2$ wird, so erhält man als Ort der Endpunkte von ϱ eine Fläche zweiten Grades, deren Gleichung mit Hülfe von $\varrho\alpha = x$, $\varrho\beta = y$, $\varrho\gamma = z$ dargestellt werden kann als:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = \Sigma m \,.\, \varepsilon^4$$

und wenn man diese Gleichung auf die Hauptaxen des Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoids bezieht, wofür $D = E = F = 0$ werden, als:

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \Sigma m \,.\, \varepsilon^4.$$

Sie drückt ein Ellipsoid aus, da A', B', C' positive Grössen sind; dasselbe hat mit dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoids den Mittelpunkt und die Hauptaxen gemein. Setzt man

$$A' = \Sigma m x^2 = \Sigma m \,.\, a'^2, \quad B' = \Sigma m \,.\, b'^2, \quad C' = \Sigma m \,.\, c'^2,$$

wo also a', b', c' die Trägheitsarme von A', B', C' bedeuten, so nimmt die Gleichung die Gestalt an

$$a'^2 x^2 + b'^2 y^2 + c'^2 z^2 = \varepsilon^4.$$

Sie drückt eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide aus, von denen jedes ebenso gut, wie das Cauchy-Poinsot'sche zur Bestimmung der Hauptaxen benutzt werden kann. Um diese Rechnung durchzuführen, hätte man ähnlich wie §. 6 die Gleichung

$$U' = A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy - \Sigma m \,.\, \varepsilon^4 = 0$$

zu differentiiren und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A'\alpha + F\beta + E\gamma &= \lambda\alpha, \\ F\alpha + B'\beta + D\gamma &= \lambda\beta, \\ E\alpha + D\beta + C'\gamma &= \lambda\gamma \end{aligned}$$

zu behandeln. Man findet durch Multiplication mit α, β, γ und Addition

$$A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = \lambda$$

so dass also λ den Werth des der Ebene, deren Normale h ist, entsprechenden Trägheitsmomentes $\Sigma m q^2$ bedeutet.

Zur Auffindung von λ dient die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} A' - \lambda & F & E \\ F & B' - \lambda & D \\ E & D & C' - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

welche leicht auf die cubische Gleichung in H des §. 6 zurückgeführt werden kann. Denn der Werth von H (das dortige λ) ist

$$H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

und daher

$$H + \lambda = (A + A')\alpha^2 + (B + B')\beta^2 + (C + C')\gamma^2.$$

Da aber

$$A + A' = \Sigma m(y^2 + z^2) + \Sigma m x^2 = \Sigma m p^2 = B + B' = C + C'$$

ist, so wird

$$H + \lambda = A + A' = B + B' = C + C',$$

also

$$A' - \lambda = H - A, \quad B' - \lambda = H - B, \quad C' - \lambda = H - C,$$

wodurch die vorstehende Determinante in die Determinante des §. 6 übergeht. Die Trägheitsmomente für Ebenen wurden von Binet*) eingeführt. Daher nennen wir das Ellipsoid $a'^2 x^2 + b'^2 y^2 + c'^2 z^2 = \varepsilon^4$ das Binet'sche Trägheitsellipsoid.

§. 9. Ist ε der Radius einer Kugel um einen Punkt O und bestimmt man zu allen Punkten M einer Figur ihre Polarebenen μ in Bezug auf die Kugel, so umhüllen diese Polarebenen eine Figur, welche die reciproke zu jener genannt wird. Ist die gegebene Figur eine Fläche, so entspricht ihr wieder eine Fläche. Schneidet die Polarebene μ den Radiusvector $OM = \varrho$ des Punktes M in M', so dass also $OM' = \varkappa$ den Abstand der Polarebene vom Mittelpunkt der Kugel angibt, so ist das Product $\varrho\varkappa$ constant nämlich $\varrho\varkappa = \varepsilon^2$ und mithin sind ϱ und $\varkappa$ einander reciprok proportional. Man nennt daher die Bildung der einen Figur aus der andern die Transformation der Figuren nach der Methode der reciproken Radienvectoren.

Die reciproke Fläche zu dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoid

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \varepsilon^4$$

ist das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Denn legen wir an die letztere Fläche in irgend einem Punkte (xyz) die Tangentenebene, so ist deren Gleichung

*) Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps (1811). Journ. de l'Ecole polytechn. Cah. XVI.

$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta - 1 = 0$, wenn ξ, η, ζ laufende Coordinaten dieser Ebene bedeuten. Demnach sind die Richtungscosinusse α, β, γ und die Länge $OM' = \varkappa$ der vom Ursprung O auf die Tangentenebene gefällten Normale bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\alpha}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\beta}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\gamma}{\frac{z}{c^2}} = \frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \varkappa = \frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

mithin ist

$$a\alpha = \frac{x}{a}\varkappa, \quad b\beta = \frac{y}{b}\varkappa, \quad c\gamma = \frac{z}{c}\varkappa$$

und

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\varkappa^2,$$

oder

$$\varkappa^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2.$$

Verlängert man nun $OM' = \varkappa$ bis zu Punkte M, so dass $OM'.OM = \varepsilon^2$ oder also, wenn $OM = \varrho$ gesetzt wird, $\varkappa\varrho = \varepsilon^2$ und $\varkappa = \frac{\varepsilon^2}{\varrho}$ wird, so erhält man

$$\frac{\varepsilon^4}{\varrho^2} = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

oder weil die Coordinaten x, y, z des Punktes M sind: $\varrho\alpha = x$, $\varrho\beta = y$, $\varrho\gamma = z$

$$\varepsilon^4 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Der Punkt M liegt demnach auf dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoid

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \varepsilon^4.$$

Wegen $\varkappa\varrho = \varepsilon^2$ ist das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ diesem also reciprok.

Nach §. 5 ist $\varkappa^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$ der Trägheitsradius für die Axe des Punktes O, welche die Richtungscosinusse α, β, γ besitzt. Die beiden Ellipsoide haben daher die Beziehung zu einander, dass für jede Axe h des gemeinsamen Mittelpunktes der Radiusvector $OM = \varrho$ des Cauchy-Poinsot'schen umgekehrt proportional dem Trägheitsradius für die Axe h ist und die zu h senkrechte Tangentenebene des diesem reciproken Ellipsoids auf der Axe h die Strecke OM' abschneidet, welche der Trägheitsradius $\varkappa$ selbst ist. Wir sprechen diese wichtigen Resultate in dem Satze aus:

In Bezug auf ein gegebenes System von Massenpunkten gibt es in jedem Punkte O eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Cauchy-Poinsot'scher Ellipsoide, deren gemeinsame Axen die Hauptträgheitsaxen sind, nämlich die Axen, für welche die Deviationsmomente Σmyz, Σmzx, Σmxy verschwinden und ein diesen reciprokes Ellipsoid von denselben Axenrichtungen. Die Halbaxen eines Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoids sind den Hauptträgheitsradien a, b, c umgekehrt proportional, nämlich gleich $\frac{\varepsilon^2}{a}$, $\frac{\varepsilon^2}{b}$, $\frac{\varepsilon^2}{c}$, wo ε von Ellipsoid zu Ellipsoid variirt; die Halbaxen des reciproken Ellipsoids sind diese Trägheitsradien a, b, c selbst. Für irgend eine Axe h des gemeinsamen Mittelpunktes O, welche ein dem Werthe ε entsprechendes Cauchy-Poinsot'sches Ellipsoid in M schneidet und in ihm den Semidiameter $OM = \varrho$ bestimmt, ist der Trägheitsradius $\varkappa = \frac{\varepsilon^2}{\varrho}$ und das Trägheitsmoment $\frac{\varepsilon^4}{\varrho^2}\Sigma m$; für dieselbe Axe ist die Strecke OM', welche die zu h senkrechte Tangentenebene des reciproken Ellipsoids auf h abschneidet, der Trägheitsradius $\varkappa$ selbst.

Die Schaar Cauchy-Poinsot'scher Ellipsoide liegt gegen das ihnen reciproke Ellipsoid so, dass ihre kürzesten und längsten Axen resp. mit den längsten und kürzesten Axen dieses zusammenfallen.

§. 10. Auch zu dem Ellipsoid $a'^2x^2 + b'^2y^2 + c'^2z^2 = \varepsilon^4$ kann das reciproke Ellipsoid $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$ gefunden werden. Sind ϱ und $\varkappa$ in Bezug auf eine Axe h der Semidiameter des ersten und die Strecke, welche die Tangentenebene des zweiten, welche zu h senkrecht ist, auf dieser Axe bestimmt, so ist $\varrho\varkappa = \varepsilon^2$ und $\varkappa$ stellt den Trägheitsarm für die zu h senkrechte Ebene des Punktes O dar. Beide Ellipsoide haben dieselben Hauptaxen, nämlich die Hauptaxen des Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoids. Man hat daher den weiteren, dem vorigen analogen Satz:

In Bezug auf ein gegebenes System von Massenpunkten gibt es für jeden Punkt O eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Binet'scher Ellipsoide, deren Hauptaxen mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen und ein diesen reciprokes Ellipsoid von denselben Axenrichtungen. Die Halbaxen eines Ellipsoids der Schaar sind den Hauptträgheitsarmen a', b', c' umgekehrt proportional, nämlich gleich $\frac{\varepsilon^2}{a'}$, $\frac{\varepsilon^2}{b'}$, $\frac{\varepsilon^2}{c'}$, wo ε eine von Ellipsoid zu Ellipsoid variirende Constante ist; die Halbaxen des reciproken Ellipsoids sind die Trägheitsarme a', b', c' selbst. Für irgend eine Ebene, deren in O errichtete Normale das erste Ellipsoid in M schneidet und in ihm den Semidiameter $OM = \varrho'$ bestimmt, ist der Träg. arm $\varkappa' = \frac{\varepsilon^2}{\varrho'}$ und das Trägheitsmoment $\frac{\varepsilon^4}{\varrho'^2}\Sigma m$; in Bezug auf dieselbe Ebene ist die Strecke OM', welche die zur Normalen h sen rechte Tangentenebene des reciproken Ellipsoids auf h bestimm der Trägheitsarm $\varkappa'$ selbst.

Auch hier fallen die längsten und kürzesten Axen der Ellipsoide d Schaar in die Richtungen der kürzesten und längsten Axen des reciprok Ellipsoids. Addirt man die Gleichungen

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \varepsilon^4 \quad \text{und} \quad a'^2x^2 + b'^2y^2 + c'^2z^2 = \varepsilon^4$$

eines Cauchy-Poinsot'schen und eines Trägheitsellipsoids für Ebenen, so erhä man, da

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 = \frac{\Sigma mp^2}{\Sigma m} = \sigma^2$$

das Quadrat des polaren Momentes für O darstellen, die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2\varepsilon^4}{\sigma^2},$$

d. h. je zwei dieser Flächen, entsprechend demselben Werthe ε, schneiden sic in einer sphärischen Curve.

§. 11. In jedem Punkte des Raumes gibt es drei Hauptaxen; die Ric tung derselben und die Grösse ihrer Trägheitsradien variiren im Allg meinen von Punkt zu Punkt. Wir wollen jetzt untersuchen, wie diese Aen derungen erfolgen, indem wir von den Hauptaxen des Massenmittelpunkte und deren Trägheitsradien ausgehen. Diese Untersuchung hängt eng mit de Theorie der confocalen Flächen zweiter Ordnung zusammen.

Es seien zwei Punkte F, F' gegeben. Es gibt eine Schaar Ellipse welche sie zu Brennpunkten haben; man nennt sie confocale Ellipsen. Di Scheitel A ihrer grossen Axen erfüllen die beiden Stralen, welche auf de Geraden FF' von F und F' aus in entgegengesetztem Sinn nach dem Un endlichen verlaufen. Die Scheitel B ihrer kleinen Axen erfüllen die im Mittelpunkte O von FF' zu dieser Linie senkrechte Gerade. Sind $OA = a$ $OB = b$ die Halbaxen einer, $OA' = a'$, $OB' = b'$ die einer andern diese Ellipsen, so ist $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, nämlich gleich dem Quadrate der Excen tricität OF. Hieraus folgt $a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2$ d. h. für jedes Paar con focaler Ellipsen ist die Quadratdifferenz der grossen Halbaxen gleich de Quadratdifferenz der kleinen Halbaxen. Setzt man den gemeinsamen Wert dieser Differenzen gleich λ, so erhält man $a'^2 = a^2 + \lambda$, $b'^2 = b^2 + \lambda$ indem man λ variiren lässt, erhält man hiemit aus den Halbaxen a, b eine beliebig wählbaren Grundellipse die Halbaxen aller übrigen ihr confocale Ellipsen. Die Ellipsenschaar beginnt mit der Verbindungsstrecke der Punkt F, F'; sie stellt die Ellipse dar, deren kleine Axe Null ist, entsprechend dem Werthe $\lambda = -b^2$. Mit wachsendem λ dehnt sich die Ellipse aus, für $\lambda = 0$ erhält man die eben als Grundellipse bezeichnete und wenn λ ins Un endliche wächst, so schliesst die Schaar mit dem unendlich grossen Kreise, der gleichfalls als eine Ellipse der Schaar anzusehen ist. Ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

die Gleichung der Grundellipse, bezogen auf die Hauptaxen, so stellt

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$$

die Gleichung der ganzen Schaar dar; sie gibt alle einzelnen Ellipsen der Schaar, wenn λ von $-b^2$ bis $+\infty$ variirt.

Die Punkte F, F' sind zugleich die gemeinsamen Brennpunkte einer Schaar confocaler Hyperbeln. Die Scheitel A ihrer reellen Axen erfüllen die Strecke FF'. Beschreibt man um O mit OF als Radius einen Kreis, so liefert für jeden Scheitel A das in A auf FF' errichtete, sich bis zum Kreise erstreckende Perpendikel AB die imaginäre Halbaxe sowie die Asymptote OB. Die Hyperbelschaar beginnt mit den beiden von F und F' nach dem Unendlichen verlaufenden Aussenstralen; sie stellen eine Hyperbel dar, deren Asymptotenwinkel π beträgt. Von da an erheben sich die Asymptoten mehr und mehr aus der Richtung von FF' heraus und rücken die Scheitel näher an den Mittelpunkt. Die Schaar schliesst mit der Geraden, welche in O die Gerade FF' rechtwinklig schneidet; sie stellt eine Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel 0 dar. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0$$

stellt, wenn λ von $-b^2$ bis $-a^2$ läuft, die Schaar Hyperbeln dar. Multiplicirt man sie mit $b^2+\lambda$ und setzt dann $\lambda=-b^2$, so ergibt sich $y=0$ für die Punkte der degenerirten Hyperbel, entsprechend dem Asymptotenwinkel π, wie auch zugleich für die Punkte der Strecke FF' als degenerirter Ellipse; für $\lambda=-a^2$ erhält man ebenso $x=0$ für alle Punkte der Grenzgeraden der Schaar. Für $\lambda<-a^2$ stellt die Gleichung keine reelle Curve mehr dar.

Die beiden Schaaren confocaler Kegelschnitte erfüllen jede die ganze Ebene so, dass durch jeden Punkt derselben sowohl eine Linie der einen, als auch eine Linie der anderen Schaar hindurchgeht. Da sowohl bei der Ellipse, als auch bei der Hyperbel die Tangente und Normale in jedem Punkte die Winkel der Radienvectoren halbiren, so folgt, dass in jedem Punkte der Ebene die beiden durch ihn hindurchgehenden confocalen Kegelschnitte sich rechtwinklig schneiden. Nennen wir die Coordinaten eines Punktes der Ebene x, y, so finden wir die beiden Werthe des Parameters λ, entsprechend der Ellipse und der Hyperbel, welche durch den Punkt hindurchgehen, als die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}-1=0.$$

Diese beiden Werthe von λ sind stets reell und liegt der eine zwischen $-a^2$ und $-b^2$, der andere zwischen $-b^2$ und $+\infty$. Denn lässt man λ alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so wird diese Gleichung für $-\infty < \lambda < -a^2$ nicht erfüllt, indem die linke Seite negativ ausfällt. Erst wenn λ den Werth $-a^2$ überschritten hat wird dies möglich. Liegt λ zwischen $-a^2$ und $-b^2$, aber sehr nahe an $-a^2$, so ist das erste Glied $\frac{x^2}{a^2+\lambda}$ positiv und sehr gross, also die linke Seite der Gleichung positiv; kommt aber λ dem $-b^2$ sehr nahe, ohne es jedoch überschritten zu haben, so wird das zweite Glied $\frac{y^2}{b^2+\lambda}$ negativ und sehr gross; es wird also die linke Seite der Gleichung negativ. Hieraus ersieht man, dass zwischen $-a^2$ und $-b^2$ ein Werth λ'' von λ liegen muss, welcher der Gleichung genügt. Hat λ den Werth $-b^2$ überschritten, so ist $\frac{y^2}{b^2+\lambda}$ und $\frac{x^2}{a^2+\lambda}$ positiv und ist ersteres sehr gross, also die linke Seite positiv; für $\lambda=+\infty$ verschwinden aber beide Glieder und wird die linke Seite negativ. Daher liegt zwischen $-b^2$ und $+\infty$ ein zweiter Werth λ', welcher der Gleichung genügt. Die beiden Wurzeln λ', λ'' sind daher reell. λ', welches zwischen $-b^2$ und $+\infty$ liegt, liefert einen elliptischen Kegelschnitt, λ'' aber, zwischen $-b^2$ und $-a^2$ gelegen, einen hyperbolischen. Die beiden Schaaren confocaler Kegelschnitte können als Coordinatensystem dienen; man nennt es das elliptische Coordinatensystem; die Grössen λ', λ'' heissen die elliptischen Coordinaten des Punktes, durch welchen die beiden confocalen Kegelschnitte gehen, wofür sie die Werthe des Parameters λ der Schaaren sind. Die Coordinatenlinien schneiden sich rechtwinklig und zerlegen ähnlich, wie das rechtwinklige Parallelcoordinatensystem die Ebene in rechtwinklige Elemente. Indem man die beiden Werthe λ', λ'' in die Gleichung einsetzt und das Gleichungssystem

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'}=1,\quad \frac{x^2}{a^2+\lambda''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda''}=1,$$

nach x, y auflöst, erhält man die rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt durch die elliptischen. Man findet

$$x=\sqrt{\frac{(a^2+\lambda')(a^2+\lambda'')}{a^2-b^2}},\quad y=\sqrt{\frac{(b^2+\lambda')(b^2+\lambda'')}{b^2-a^2}}.$$

Zu einem Ellipsoide mit den Halbaxen a, b, c, wo $a>b>c$ sei, gibt es eine Schaar confocaler Ellipsoide, d. h. solcher, welche mit ihm dieselben Brennpunkte der Hauptschnitte haben. In dem Hauptschnitte (ab) liegen auf der grösseren Axe $2a$ zwei Brennpunkte F, F' im Abstande

$$OF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

vom Mittelpunkte O; im Hauptschnitte (bc) finden sich auf der mittleren Axe $2b$ die Brennpunkte G, G' im Abstande $OG = \sqrt{b^2 - c^2}$ und im Hauptschnitte (ca) liegen auf der grössten Axe $2a$ zwei Brennpunkte H, H' im Abstande $OH = \sqrt{a^2 - c^2}$ vom Mittelpunkte. Die längste Axe $2a$ des Ellipsoids enthält also 4 Brennpunkte, die mittlere enthält deren 2, die kleinste Axe keine. Die Brennpunkte F', F' liegen dem Mittelpunkte näher, als die Brennpunkte H, H'. Ein Ellipsoid von den Halbaxen a', b', c', welches mit dem Ellipsoide (a, b, c) confocal sein soll, muss daher hinsichtlich seiner Halbaxen den Bedingungen genügen:

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \quad b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2, \quad a'^2 - c'^2 = a^2 - c^2,$$

woraus folgt: $a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2$ d. h. bei zwei confocalen Ellipsoiden haben die drei Quadratdifferenzen der Halbaxen gleicher Richtung denselben Werth. Setzen wir den gemeinschaftlichen Werth derselben gleich λ, so folgt $a'^2 = a^2 + \lambda$, $b'^2 = b^2 + \lambda$, $c'^2 = c^2 + \lambda$; daher ist das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

confocal mit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Schaar der confocalen Ellipsoide beginnt mit der Ellipse im Hauptschnitte (ab), welche durch die Brennpunkte H, H'; G, G' geht und sie zu Scheiteln hat; diese Ellipse, Focalellipse genannt, ist als ein Ellipsoid anzusehen, dessen dritte Axe Null ist. Sie entspricht dem Werthe $\lambda = -c^2$, wofür $a'^2 = a^2 - c^2$, $b'^2 = b^2 - c^2$, $c'^2 = 0$ wird und ihre Brennpunkte sind F, F'. Wächst λ von $-c^2$ nach $+\infty$ hin, so dehnt sich das Ellipsoid und indem λ alle Werthe zwischen $-c^2$ und $+\infty$ durchläuft, erhalten wir die ganze Schaar confocaler Ellipsoide; sie schliesst für $\lambda = +\infty$ mit der unendlich grossen Kugelfläche. Es gibt aber auch eine Schaar einfacher Hyperboloide, welche unter sich und mit dem Ellipsoid (a, b, c) confocal sind. Dieselbe beginnt mit dem Aussenraume der Focalellipse, welcher als ein einfaches Hyperboloid anzusehen ist, dessen Asymptotenkegel in eine Doppelebene (ab) degenerirt ist. Dies Hyperboloid entspricht $\lambda = -c^2$. Nimmt λ von $-c^2$ bis $-b^2$ ab, so nehmen die Halbaxen des einfachen Hyperboloids von

$$\sqrt{a^2 - c^2}, \ \sqrt{b^2 - c^2}, \ 0 \ \text{ ab bis } \ \sqrt{a^2 - b^2}, \ 0, \ \sqrt{c^2 - b^2}$$

und schliesst die Schaar der einfachen Hyperboloide mit der Hyperbel in dem Hauptschnitte (ac), welche F, F' zu Scheiteln und H, H' zu Brennpunkten hat. Sie heisst die Focalhyperbel und ist als ein zu einer Ebene abgeplattetes Hyperboloid anzusehen. Nimmt ferner λ von $-b^2$ bis $-a^2$ ab, so geht diese Grenzfläche in ein Doppelhyperboloid über, indem zwei Halbaxen imaginär werden. Die Schaar der Doppelhyperboloide schliesst mit der Ebene des Hauptschnittes (bc) und mit ihr schliesst die ganze Schaar confocaler Flächen zweiter Ordnung ab, welche dieselben 6 Brennpunkte F, F'; G, G'; H, H' besitzen.

Die drei Schaaren Ellipsoide, einfacher Hyperboloide und Doppelhyperboloide erfüllen den Raum so, dass durch jeden Punkt desselben je eine Fläche der ersten, zweiten und dritten Schaar hindurchgeht. Denn sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes, so zeigt eine ähnliche Betrachtung, wie oben, dass die Gleichung des dritten Grades in λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0$$

drei reelle Werthe hat, deren Werthe $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ resp. zwischen $-c^2$ und $+\infty$, $-b^2$ und $-c^2$, $-a^2$ und $-b^2$ liegen. Indem wir diese Werthe einsetzen, erhalten wir die Gleichungen der drei Flächen

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'}+\frac{z^2}{c^2+\lambda'}=1, \quad \frac{x^2}{a^2+\lambda''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda''}+\frac{z^2}{c^2+\lambda''}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda''}+\frac{z^2}{c^2+\lambda''}=1,$$

von denen vermöge der Bereiche, in welchen die Werthe $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ fallen, die erste ein Ellipsoid, die zweite ein einfaches Hyperboloid und die dritte ein Doppelhyperboloid darstellt. Löst man diese drei Gleichungen nach x, y, z auf, so erhält man diese Coordinaten durch $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ ausgedrückt, nämlich

$$x=\sqrt{\frac{(a^2+\lambda')(a^2+\lambda'')(a^2+\lambda''')}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},$$
$$y=\sqrt{\frac{(b^2+\lambda')(b^2+\lambda'')(b^2+\lambda''')}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},$$
$$z=\sqrt{\frac{(c^2+\lambda')(c^2+\lambda'')(c^2+\lambda'')}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}.$$

Die drei Schaaren Flächen bilden das elliptische Coordinatensystem im Raume; $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ heissen die elliptischen Coordinaten des Punktes x, y, z.

Es seien nun a, b, c die Trägheitsradien für die Hauptaxen des Massenmittelpunktes S und $a > b > c$. Wir construiren über ihnen als Halbaxen das Grundellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, welches reciprok ist zu der Schaar Cauchy-Poinsot'scher Ellipsoide, sowie die drei Schaaren confocaler Flächen, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$ Ellipsoide, einfache und Doppelhyperboloide darstellt, je nachdem der Parameter λ in den Bereich zwischen $-c^2$ und $+\infty$, $-b^2$ und $-c^2$ oder $-a^2$ und $-b^2$ fällt. An das Grundellipsoid und an irgend eine der ihm confocalen Flächen (λ) legen wir zwei parallele Tangentenebenen und fällen auf sie von S aus die Normale, welche dieselben in Q_0 und Q_λ treffen wird. Dann ist

$$\overline{SQ_0}^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2,$$
$$\overline{SQ_\lambda}^2 = (a^2+\lambda)\alpha^2 + (b^2+\lambda)\beta^2 + (c^2+\lambda)\gamma^2,$$

wenn α, β, γ die Richtungscosinusse der Normalen sind. Die Subtraction beider Gleichungen liefert:

$$\overline{SQ_\lambda}^2 - \overline{SQ_0}^2 = \lambda.$$

Bewegen sich also zwei parallele Ebenen so, dass sie fortwährend das Grundellipsoid und eine ihm confocale Fläche (λ) berühren, so bleibt die Quadratdifferenz ihrer Abstände SQ_0, SQ_λ vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte S constant, nämlich gleich dem Parameter λ der Fläche (λ).

Die Strecke SQ_0 ist der Trägheitsradius für die Axe des Massenmittelpunktes S, auf welcher sie liegt. Geht die Tangentenebene der Fläche (λ) fortwährend durch den Punkt P des Raumes, dessen Abstand von S durch $SP = r$ bezeichnet werden möge, so ist das Quadrat des Trägheitsradius für die durch P gehende, zu SQ_0 parallele Axe $\overline{SQ_0}^2 + \overline{PQ_\lambda}^2$ oder da $\overline{SQ_0}^2 = \overline{SQ_\lambda}^2 - \lambda$ ist, gleich $\overline{SQ_\lambda}^2 + \overline{PQ_\lambda}^2 - \lambda$, oder da

$$\overline{SQ_\lambda}^2 + \overline{PQ_\lambda}^2 = \overline{SP}^2 = r^2,$$

gleich $r^2 - \lambda$, d. h.:

Legt man durch einen Punkt P an eine der Flächen (λ) die Tangentenebene und zieht durch P eine zu ihr senkrechte Axe, so ist das Quadrat des Trägheitsradius für diese Axe gleich der Differenz zwischen dem Quadrate des Abstandes r des Punktes P vom Massenmittelpunkte S und dem Parameter der Fläche (λ).

Diese Grösse $r^2 - \lambda$ bleibt dieselbe für alle Axen, welche man durch P zu den verschiedenen Tangentenebenen senkrecht ziehen kann, die von P aus an die Fläche (λ) gelegt werden können. Alle diese Tangentenebenen umhüllen den Tangentenkegel der Fläche (λ), dessen Mittelpunkt P ist, und alle Axen senkrecht zu ihnen sind die Erzeugungslinien des zu ihm polaren oder supplementaren Kegels. Daher:

Legt man von einem Punkte P aus an eine der confocalen Flächen (λ) den Tangentenkegel und construirt in P dessen Supplementarkegel, so ist der letztere der Ort aller Axen gleichen Trägheitsradius $(r^2 - \lambda)^{\frac{1}{2}}$ des Punktes P.

Indem man λ variiren lässt, erhält man die Schaar aller Kegel von Axen constanten Trägheitsradius für den Punkt P.

Nach §. 7 haben die Kegel der Axen constanten Trägheitsradius eines Punktes mit dem Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoide dieses Punktes oder auch dem diesem reciproken Ellipsoide die Hauptaxen gemein. Da nun zugleich Kegel und Supplementarkegel ebenfalls gemeinschaftliche Hauptaxen besitzen, so folgt:

Die Schaar der Tangentenkegel, welche man von einem Punkte P an die Schaar confocaler Flächen (λ) legen kann, hat gemeinschaftliche Hauptaxen und diese sind die Hauptträgheitsaxen des Punktes P.

Wählen wir zur Fläche (λ), an welche wir den Tangentenkegel von P aus legen, eine der drei confocalen Flächen, welche durch diesen Punkt hindurchgehen, so geht der Tangentenkegel in die Tangentenebene dieser Fläche in P und eine seiner Hauptaxen in die Normale derselben über und fallen die beiden andern Hauptaxen in die Tangentenebenen hinein. Da dasselbe von allen drei Flächen (λ) des Punktes P gilt, so folgt:

Die drei Hauptaxen eines Punktes P sind die Normalen der drei Flächen zweiter Ordnung, welche durch P confocal mit dem Grundellipsoid des Massenmittelpunktes gelegt werden können, das zu der Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoidenschaar reciprok ist.

Da die drei Hauptträgheitsaxen eines Punktes immer ein System rechtwinkliger Geraden bilden, so ergibt sich nebenbei noch der Satz, dass die Normalen und Tangentenebenen der drei Flächen, welche durch einen Punkt des Raumes confocal zu einem Ellipsoid gelegt werden können, zu einander rechtwinklig sind, oder also, dass diese drei Flächen sich rechtwinklig in dem Punkte schneiden.

Sind $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ die Parameter der drei durch P gehenden, zum Grundellipsoide confocalen Flächen zweiter Ordnung, so sind die drei Hauptträgheitsradien dieses Punktes

$$\varkappa' = (\varrho^2 - \lambda')^{\frac{1}{2}},\quad \varkappa'' = (\varrho^2 - \lambda'')^{\frac{1}{2}},\quad \varkappa''' = (\varrho^2 - \lambda''')^{\frac{1}{2}}.$$

Bezieht sich λ' auf das Ellipsoid, λ'' auf das einfache Hyperboloid, λ''' auf das Doppelhyperboloid des Punktes P, so ist $\lambda' > \lambda'' > \lambda'''$ und mithin $(\varrho^2 - \lambda')^{\frac{1}{2}} < (\varrho^2 - \lambda'')^{\frac{1}{2}} < (\varrho^2 - \lambda''')^{\frac{1}{2}}$. Daher gehört der kleinste der drei Hauptträgheitsradien eines Punktes P der Richtung der Normalen des Ellipsoids, der mittlere der Normalen des einfachen, der grösste der Normalen des Doppelhyperboloides an, welche sich in P schneiden.

Es genügt übrigens eine der drei Flächen (λ), welche durch den Punkt P gehen, z. B. das Ellipsoid, um die Hauptaxen von P zu finden. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Fläche (λ) als veränderlich und eben im Begriff stehend in die durch den Punkt P hindurchgelegte überzugehen. Der von P an sie gelegte Tangentenkegel berührt sie längs einer ebenen Curve, nämlich dem Kegelschnitt, in welchem sie von der Polarebene des Punktes P geschnitten wird. Sobald (λ) durch P hindurchgeht, wird diese Curve die Indicatrix der Fläche im Punkte P und degenerirt der Tangentenkegel in die Tangentenebene als Polarebene von P. Legt man durch den Mittelpunkt S einen Schnitt parallel zur Tangentenebene in P, so sind dessen Hauptaxen parallel zu den Hauptaxen der Indicatrix. Jeder Kegel zweiten Grades wird nun von einer Ebene, welche senkrecht zu einer seiner Hauptaxen ist, in einem Kegelschnitte getroffen, dessen Hauptaxen den beiden anderen Hauptaxen desselben parallel laufen. Sobald nun beim Durchgange der Fläche (λ) durch P der Tangentenkegel in die Tangentenebene übergeht, wird die Normale in P eine seiner Hauptaxen und da die Tangentenebene ihn senkrecht zur Normalen in der Indicatrix schneidet, so sind die Hauptaxenrichtungen der Indicatrix die Richtungen der beiden andern Hauptaxen des in die Ebene degenerirenden Kegels und also zusammen mit der Normalen die Hauptträgheitsaxen des Punktes P. Daher also der Satz:

Von den drei Hauptträgheitsaxen eines Punktes P fällt die eine mit der Normalen einer der drei Flächen (λ), welche durch P hindurchgehen, zusammen, während die beiden andern in der Tangentenebene von P in die Richtungen der Hauptaxen der Indicatrix dieses Punktes oder, was dasselbe ist, in die Richtungen der Tangenten an die beiden Krümmungslinien der Fläche (λ) fallen, welche sich in P schneiden.

Man kann die Trägheitsradien für die Hauptaxen des Punktes P, welche in die Tangentenebene des durch P gehenden Ellipsoids (λ) fallen, leicht durch die Halbaxen des Centralschnittes dieser Fläche darstellen, welcher parallel zu dieser Tangentenebene geführt werden kann. Denn es sei PR (Fig. 46) die Richtung einer Hauptaxe der Indicatrix des Punktes P und SQ die ihr parallele Halbaxe des Centralschnittes. Man lege eine Ebene senkrecht zu PR und SQ, welche das Ellipsoid in einem Punkte T berührt und führe durch T einen Schnitt des Ellipsoids parallel zu dem Centralschnitt. Der Mittelpunkt s dieses Schnittes liegt auf dem Diameter PS. Zieht man durch s eine Gerade st parallel SQ, so steht dieselbe senkrecht auf der in T berührenden Ebene und fällt in die Ebene des Parallelschnittes. Sie ist daher auch senkrecht zu der Tangente des

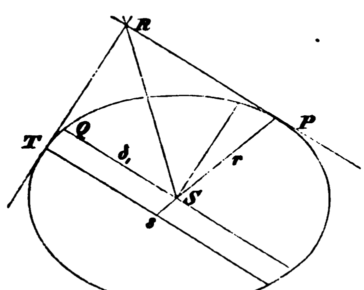

Fig. 46.

Parallelschnittes im Punkte T. Da aber st parallel zu der Hauptaxe SQ des Centralschnittes ist, so ist st selbst Hauptaxe des Parallelschnittes und steht als solche auf der Tangente im Berührungspunkte T senkrecht, oder, was dasselbe ist, es fällt t mit T zusammen. Die Geraden PR, SQ, sT und PS fallen daher mit TR in eine Ebene, nämlich die Ebene des Centralschnittes PQT. In diesem Schnitte liegen zwei zu einander senkrechte Tangenten PR, TR und zwei conjugirte Semidiameter SP, SQ; die Quadratsumme der letzteren ist gleich der Quadratsumme der Halbaxen des Schnittes PQT. Ebenso gross ist aber auch nach einem bekannten Satze die Quadratsumme der Perpendikel, welche man vom Mittelpunkte S auf die zu einander senkrechten Tangenten PR, TR fällen kann und da die Quadratsumme dieser Perpendikel gleich $\overline{SR}^2$ ist, so folgt $\overline{SR}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{SQ}^2$. Nun ist das Quadrat des Trägheitsradius für die Axe PR, weil sie senkrecht zu der durch R gehenden Tangentenebene der Fläche (λ) ist, gleich $\overline{SR}^2 - \lambda$ oder also $\overline{SP}^2 + \overline{SQ}^2 - \lambda$ oder wenn man SP wieder mit r und den zu PR parallelen Semidiameter SQ mit δ_1 bezeichnet, gleich $r^2 + \delta - \lambda_1{}^2$. Dieselben Schlüsse gelten auch für die Richtung der zweiten Axe der Indicatrix in P, so dass, wenn δ_2 der dieser Richtung parallele Semidiameter des Centralschnittes ist, das Quadrat des dieser Hauptaxenrichtung entsprechenden Trägheitsradius $r^2 + \delta^2 - \lambda$ ist.

Da endlich $r^2 - \lambda$ das Quadrat des Trägheitsradius für die Normale des Ellipsoids im Punkte P ist, so folgt der Satz:

Legt man durch einen Punkt P im Abstande r vom Mittelpunkte S das Ellipsoid (λ) confocal zu dem Grundellipsoid und sind δ_1, δ_2 die Halbaxen des zur Tangentenebene von (λ) im Punkte P parallelen Centralschnittes dieser Fläche, so sind

$$r^2 - \lambda,\ r^2 + \delta_1{}^2 - \lambda,\ r^2 + \delta_2{}^2 - \lambda$$

die Quadrate der drei Hauptträgheitsradien im Punkte P und zwar entspricht die erste dieser Grössen der Normalen des Ellipsoids (λ) und entsprechen die beiden andern den Richtungen der Hauptaxen der Indicatrix von (λ) im Punkte P, welche zu δ_1 und δ_2 resp. parallel sind, als Hauptträgheitsaxen.

§. 12. Aus den Sätzen des vorigen Paragraphen ziehen wir nachstehende Folgerungen:

1. Für alle Punkte P einer um den Massenmittelpunkt S beschriebenen Kugel bleibt die Quadratsumme $\varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \varkappa'''^2$ der drei Hauptträgheitsradien constant. Denn es ist

$$\varkappa'^2 = r^2 - \lambda',\ \varkappa''^2 = r^2 - \lambda'',\ \varkappa'''^2 = r^2 - \lambda'''$$

und daher

$$\varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \varkappa'''^2 = 3r^2 - (\lambda' + \lambda'' + \lambda''').$$

Die drei Parameter λ', λ'', λ''' sind aber die Wurzeln der cubischen Gleichung $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$, worin x, y, z die Coordinaten von P in Bezug auf die Hauptaxen von S bedeuten, so dass $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Nun ist $-(\lambda' + \lambda'' + \lambda''')$ der Coefficient von λ^2 in dieser Gleichung und damit

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

und hiemit wird

$$\varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \varkappa'''^2 = 2r^2 + a^2 + b^2 + c^2,$$

also mit r constant.

2. Für alle Punkte P, für welche die Hauptträgheitsradien $\varkappa'$ und $\varkappa''$, welche den Normalen des Ellipsoids und einfachen Hyperboloids des Punktes P entsprechen, gleich werden sollen, müssen λ' und λ'' gleich werden. Da die Bereiche für λ' und λ'' von $-c^2$ bis $+\infty$ und von $-b^2$ bis $-c^2$ sich erstrecken, so kann diese Bedingung nur für $\lambda' = \lambda'' = -c^2$ erfüllt werden. Hiefür reducirt sich das Ellipsoid auf die elliptische Scheibe mit den Halbaxen $(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$, $(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$, 0 und das einfache Hyperboloid auf die Aussenfläche dieser Scheibe. Die fraglichen Punkte P sind gemeinschaftliche Punkte beider und liegen daher auf der Focalellipse in der Ebene (ab), welche durch die Brennpunkte G, G', H, H' hindurchgeht. Für diese Punkte wird das Trägheitsellipsoid, welches den Cauchy-Poinsot'schen reciprok ist, ein Rotationsellipsoid um die längere Axe. Die beiden gleichen Hauptträgheitsradien sind $\varkappa' = \varkappa'' = (r^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$ und der dritte ist

$$\varkappa''' = (r^2 + c^2 + \delta_2{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

wo δ_2 der zu r conjugirte Semidiameter das Focalellipse ist. Da

$$r^2 + \delta_2{}^2 = (a^2 - c^2) + (b^2 - c^2),$$

so wird $\varkappa''' = (a^2 + b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$ und die zugehörige Hauptaxe ist Tangente an die Focalellipse.

Für die Punkte P, für welche der mittlere und grösste Trägheitsradius, nämlich $\varkappa''$ und $\varkappa'''$ gleich werden sollen, muss $\lambda'' = \lambda'''$ und da $-b^2$ der gemeinschaftliche Werth der Gebiete für λ'' und λ''' ist,

$$\lambda'' = \lambda''' = -b^2$$

werden. Hiefür reduciren sich das einfache und das Doppelhyperboloid auf die beiden Räume in der Hauptebene (ac), welche die Focalhyperbel gemein haben. Der Ort der Punkte P ist diese Curve, das Trägheitsellipsoid derselben wird ein Rotationsellipsoid um die kleinere Axe. Die Trägheitsradien werden $\varkappa'' = \varkappa''' = (r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, $\varkappa' = (a^2 + c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$ und die Axe des letzteren berührt die Focalhyperbel.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche zwei Hauptträgheitsradien einander gleich werden, wird daher von den beiden Focalkegelschnitten des Systems confocaler Flächen gebildet.

3. Sollen alle drei Hauptträgheitsradien eines Punktes P einander gleich werden, so muss ein solcher Punkt nach 2. sowohl auf der Focalellipse als auf der Focalhyperbel liegen. Diese Curven, deren Ebenen zu einander senkrecht sind, sich in der grössten Axe des Grundellipsoids schneiden und welche so liegen, dass die Scheitel der einen die Brennpunkte der andern sind, haben im Allgemeinen keine gemeinschaftlichen Punkte. Es ist dies nur möglich, wenn die Punkte F, F' mit G, G' zusammenfallen, d. h. wenn $a^2 - b^2 = a^2 - c^2$, also $b = c$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind die Schnittpunkte einer Kugel vom Radius $\sqrt{a^2 - c^2}$ und S mit der längsten Axe des Grundellipsoids die gesuchten Punkte. Daher:

Punkte, für welche die drei Hauptträgheitsradien einander gleich sind und also das Trägheitsellipsoid in eine Kugel übergeht, existiren nur dann, wenn das Grundellipsoid ein Rotationsellipsoid um die grössere Axe ist; es sind ihrer alsdann zwei, auf der Rotationsaxe dieses Ellipsoids im Abstande $\pm\sqrt{a^2 - c^2}$ diesseits und jenseits vom Massenmittelpunkte gelegen.

4. Nicht jede Gerade des Raumes ist Hauptaxe für irgend einen ihrer Punkte. Damit sie dies sei, muss sie eine Normale einer Fläche aus der Schaar der confocalen Flächen sein, von denen die vorliegende Betrachtung handelt. Sie ist dann Hauptaxe für ihren Fusspunkt auf dieser Fläche. Ist sie eine Hauptaxe in einem ihrer Punkte, so ist sie dies im Allgemeinen nur für diesen Punkt allein. Ist sie aber Hauptaxe für zwei ihrer Punkte, so hat sie diese Eigenschaft für alle ihre Punkte, geht durch den Massenmittelpunkt und ist mithin eine Hauptcentralaxe. Denn soll sie Hauptaxe für zwei ihrer Punkte sein, so muss sie gemeinschaftliche Normale zweier der confocalen Flächen sein, von denen die eine durch den einen, die andere durch den anderen dieser Punkte geht. Zwei solche Flächen haben aber nur die Hauptaxen als Normalen gemein und diese sind Hauptaxen des Massenmittelpunktes.

5. Weitergehende Untersuchungen zeigen, dass die sämmtlichen Hauptaxen, welche durch einen gegebenen Punkt P gehen, eine Kegelfläche zweiten Grades bilden und dass der Ort der Punkte, für welche sie Hauptaxen sind, eine Curve 5. Ordnung wird, von welcher P ein dreifacher Punkt ist. Der Kegel zweiten Grades ist nämlich der Ort aller Normalen, welche sich an die Schaar der confocalen Flächen legen lassen. Die sämmtlichen Normalen dieser Schaar bilden einen Complex zweiten Grades.

Die Untersuchungen der §§. 11. 12. können auch in ähnlicher Weise mit Hülfe des reciproken Binet'schen Ellipsoids geführt werden. S. Reye, Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten, Schlömilch, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik Bd. 10, S. 433 etc. (1865).

§. 13. Um die Fragen der §§. 10. und 11. analytisch zu behandeln, bemerken wir, dass das Quadrat des Trägheitsradius für eine Axe $h\,(\alpha\beta\gamma)$ des Massenmittelpunktes $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$ ist und wenn p der Abstand einer ihr parallelen Axe vom Massenmittelpunkte ist, das Quadrat ihres Trägheitsradius $\varkappa$ den Werth

$$\varkappa^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + p^2$$

hat. Ist nun $O\,(xyz)$ ein Punkt dieser parallelen Axe, bezogen auf das Coordinatensystem der Hauptaxen des Massenmittelpunktes, so wird

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$$

und wenn $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt wird

$$\varkappa^2 = (a^2 + r^2)\,\alpha^2 + (b^2 + r^2)\,\beta^2 + (c^2 + r^2)\,\gamma^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

Soll nun die fragliche Axe eine Hauptaxe des Punktes O werden, so hat man $\varkappa$ in Bezug auf α, β, γ mit Rücksicht auf

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Multiplicirt man daher diese letztere Gleichung mit dem noch unbestimmten Factor $-\lambda$ und addirt sie zu der vorigen, so gibt die Differentation nach α, β, γ als Bedingungen des Maximums oder Minimums:

$$\begin{aligned}
(a^2 + r^2 - \lambda)\,\alpha &= x(\alpha x + \beta y + \gamma z)\\
(b^2 + r^2 - \lambda)\,\beta &= y(\alpha x + \beta y + \gamma z)\\
(c^2 + r^2 - \lambda)\,\gamma &= z(\alpha x + \beta y + \gamma z).
\end{aligned}$$

Indem man diese Gleichungen mit α, β, γ multiplicirt und addirt, ergibt sich $\lambda = \varkappa^2$, d. h. gleich dem gesuchten Maximal- oder Minimalwerthe von $\varkappa^2$; multiplicirt man sie dagegen mit x, y, z und addirt sie nach der Division mit $a^2 + r^2 - \varkappa^2$, $b^2 + r^2 - \varkappa^2$, $c^2 + r^2 - \varkappa^2$, so erhält man zur Bestimmung dieser Maximal- und Minimalwerthe von $\varkappa^2$ die cubische Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + r^2 - \varkappa^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - \varkappa^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - \varkappa^2} = 1.$$

Zugleich findet sich für die Richtung $(\alpha\beta\gamma)$ der Hauptaxen des Punktes $O\,(xyz)$:

$$\frac{\alpha}{x:(a^2 + r^2 - \varkappa^2)} = \frac{\beta}{y:(b^2 + r^2 - \varkappa^2)} = \frac{\gamma}{z:(c^2 + r^2 - \varkappa^2)}$$

Die Wurzeln der cubischen Gleichung in $\varkappa^2$ liegen zwischen $a^2 + r^2$ und $b^2 + r^2$, zwischen $b^2 + r^2$ und $c^2 + r^2$ und zwischen $c^2 + r^2$ und $+\infty$.

Die drei Werthe von $r^2 - \varkappa^2$ sind die Parameter λ', λ'', λ''' dreier Flächen 2. Ordnung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'}+\frac{z^2}{c^2+\lambda'}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda''}+\frac{z^2}{c^2+\lambda''}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\lambda'''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda'''}+\frac{z^2}{c^2+\lambda'''}=1,$$

welche mit dem Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

confocal sind und durch den Punkt $O\,(x\,y\,z)$ hindurchgehen. Diese Flächen sind ein Ellipsoid, ein einfaches Hyperboloid und ein Doppelhyperboloid. Die Proportion für α, β, γ zeigt, dass die Richtungen der Hauptaxen in O die Normalen dieser drei Flächen in O sind.

Da die Werthe von $r^2 - \varkappa^2$ die drei Parameter λ', λ'', λ''' sind, d. h. da

$$r^2-\varkappa^2=\lambda',\ r^2-\varkappa'^2=\lambda'',\ r^2-\varkappa''^2=\lambda'''$$

ist, so folgt

$$\varkappa^2=r^2-\lambda',\ \varkappa'^2=r^2-\lambda'',\ \varkappa''^2=r^2-\lambda''',$$

wie §. 11.

§. 14. Die Punkte, für welche ein Hauptträgheitsradius r constant gleich $\varkappa$ ist, liegen auf der Fläche vierten Grades:

$$\frac{x^2}{a^2-\varkappa^2+x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{b^2-\varkappa^2+x^2+y^2+z^2}$$
$$+\frac{z^2}{c^2-\varkappa^2+x^2+y^2+z^2}=1,$$

wie aus

$$\frac{x^2}{a^2+r^2-\varkappa^2}+\frac{y^2}{b^2+r^2-\varkappa^2}+\frac{z^2}{c^2+r^2-\varkappa^2}=1$$

folgt, indem man $r^2=x^2+y^2+z^2$ setzt. Indem man $\varkappa$ variiren lässt, erhält man die ganze Schaar derartiger Flächen, welche in gewissem Sinne confocal genannt werden können. Sie zerfällt in drei Partialschaaren; für die eine ist $\varkappa^2$ zwischen c^2 und b^2, für die andere zwischen b^2 und a^2, für die dritte zwischen a^2 und ∞ enthalten. Zu der letzteren Gattung gehört die Fresnel'sche Wellenfläche der doppelbrechenden Medien.

§. 15. Die Theorie der Deviationsmomente Σmxy, Σmyz, Σmzx ist in neuerer Zeit Gegenstand einer interessanten Schrift geworden von Haton de la Goupillière: *Mémoire sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses* (*Journ. de l'Ecole polyt.* 37$^{\text{ième}}$ cah. p. 35). Auf einer neuen Grundlage mit Hülfe des „imaginären Bildes des Systems“ behandelt die Theorie der Hauptaxen Hesse in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung“ (25. und 26. Vorlesung).

IX. Capitel.

Methoden und Beispiele für die Bestimmung von Trägheitsmomenten.

§. 1. Die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Systems für alle Axen des Raumes erfordert vor allem die Kenntniss der Hauptaxen des Massenmittelpunktes. Ohne jedoch auf das Centralellipsoid, sei es ein Cauchy-Poinsot'sches oder das ihm reciproke Grundellipsoid oder ein solches für Trägheitsmomente hinsichtlich der Ebene oder das ihm reciproke recurriren zu müssen, kann man die Hauptcentralaxen in vielen Fällen von vornherein finden. Dies ist der Fall, wenn die Massenelemente gegen eine Ebene ε symmetrisch liegen, d. h. wenn sie paarweise gleiche Masse besitzen und jedes Paar auf einem Perpendikel zur Ebene diesseits und jenseits in gleichem Abstande liegt. Dann ist jedes solche Perpendikel eine Hauptaxe für seinen Fusspunkt. Denn wählt man diesen zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z und das Perpendikel zur z-Axe, so entspricht jedem Massenmittelpunkte $m\,(x, y, z)$ ein anderer $m\,(x, y, -z)$ und tilgen sich daher die Elemente der Deviationsmomente Σmyz und Σmzx d. h. es ist $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mzx = 0$. Gibt es noch eine zweite, zur ersten senkrechte Ebene ε', welche die Masse symmetrisch theilt, so sind die in einem beliebigen Punkte ihrer Durchschnittslinie auf die Ebenen ε, ε' errichteten Perpendikel zwei Hauptaxen und ist die Schnittlinie selbst die dritte Hauptaxe; drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen schneiden sich also in drei Hauptaxen und da ihr Schnittpunkt nach Cap. VI, §. 3 der Massenmittelpunkt ist, so sind sie die Hauptcentralaxen.

Es seien für ein homogenes, continuirliches räumliches System die drei Hauptaxen gefunden und zu den Axen der x, y, z gewählt. Man hat dann nur

$$A' = \Sigma x^2 dm, \quad B' = \Sigma y^2 dm, \quad C' = \Sigma z^2 dm$$

zu bilden, wo

$$dm = \varrho dv = \varrho dx\, dy\, dz$$

das Massenelement, dv das ihm entsprechende Volumenelement und ϱ die specifische Masse bedeutet, um die drei Hauptträgheitsmomente des Massenmittelpunktes

$$A = \Sigma(y^2 + z^2)\, dm = B' + C', \quad B = \Sigma(z^2 + x^2)\, dm = C' + A',$$
$$C = \Sigma dm\,(x^2 + y^2) = A' + B'$$

und damit das Trägheitsmoment $H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$ für eine beliebige Axe h von den Richtungscosinussen α, β, γ und damit weiter das Trägheitsmoment für jede ihr parallele Axe im Abstande δ von ihr zu finden. Legt man durch einen Punkt (xyz) drei Ebenen senkrecht zu den Coordinatenaxen und bezeichnet mit Q_x, Q_y, Q_z die drei Querschnitte, welche sie im System senkrecht zu diesen

Axen bestimmen, so haben alle auf einem solchen Querschnitt liegenden Massenelemente resp. gleiche x, y, z und erhält man

$$A' = \int \varrho x^2 Q_x dx, \quad B' = \int \varrho y^2 Q_y dy, \quad C' = \int \varrho z^2 Q_z dz.$$

Wenden wir die vorstehende Formel auf einige Beispiele an.

1. **Das homogene rechtwinkliche Parallelepiped.** Der Mittelpunkt der Figur ist der Massenmittelpunkt und die Geraden, durch ihn senkrecht zu den drei Paar parallelen Seitenflächen sind die Hauptcentralaxen. Sind a, b, c die Kantenlängen, so wird $Q_x = bc$, $Q_y = ca$, $Q_z = ab$; die Masse $m = \varrho abc$,

$$A' = \varrho bc \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} x^2 dx = \tfrac{1}{12} m a^2, \quad B' = \varrho ca \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} y^2 dy = \tfrac{1}{12} m b^2,$$

$$C' = \varrho ab \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} z^2 dz = \tfrac{1}{12} m c^2;$$

$$A = \tfrac{1}{12} m(b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{1}{12} m(c^2 + a^2), \quad C = \tfrac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

Daher ist das Trägheitsmoment H für eine Centralaxe h $(\alpha\beta\gamma)$ und das Quadrat ihres Trägheitsradius $\varkappa$

$$H = \tfrac{1}{12} m \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right],$$
$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{12} \left[(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2\right]$$

und die Gleichung der Schaar Cauchy-Poinsot'scher Centralellipsoide und des ihnen reciproken Grundellipsoids:

$$(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2 = 12 \varepsilon^4,$$
$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{c^2 + a^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} = 12.$$

Das Trägheitsmoment H' für eine Axe $h'(\alpha\beta\gamma)$ im Abstande d vom Massenmittelpunkt ist: $H' = H + md^2$ und das Quadrat ihres Trägheitsradius $\varkappa'^2 = \varkappa^2 + d^2$. Die Trägheitsmomente für die Kanten sind

$$\tfrac{1}{3} m(b^2 + c^2), \quad \tfrac{1}{3} m(c^2 + a^2), \quad \tfrac{1}{3} m(a^2 + b^2).$$

Eben so einfach entwickelt man das Trägheitsmoment des Parallelepipeds in Bezug auf Ebenen, die Gleichungen der zugehörigen Centralellipsoide etc.

Welches ist das Trägheitsmoment eines Würfels für eine Centralaxe, für die Kante etc. etc.?

2. **Das homogene Ellipsoid von den Halbaxen a, b, c.** Aus der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ folgt die Gleichung des Schnittes Q_x, nämlich

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Daher erhält man für die Fläche Q_x und analog für Q_y, Q_z:

$$Q_x = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad Q_y = \pi ca\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad Q_z = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

und hiermit die Momente für die Hauptebenen:

$$A' = \pi\varrho b c \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x^2 dx = \tfrac{4}{15}\pi\varrho a^3 b c = \tfrac{1}{5} m a^2,$$

$$B' = \tfrac{1}{5} m b^2, \quad C' = \tfrac{1}{5} m c^2, \quad \text{da} \quad m = \tfrac{4}{3}\pi a b c,$$

sowie die Hauptaxenmomente des Massenmittelpunktes:

$$A = \tfrac{1}{5} m (b^2 + c^2), \quad B = \tfrac{1}{5} m (c^2 + a^2), \quad C = \tfrac{1}{5} m (a^2 + b^2),$$

und das Moment H für eine Centralaxe h (α, β, γ)

$$H = \tfrac{1}{5} m [(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2],$$

sowie die Gleichung der Cauchy-Poinsot'schen Centralellipsoide und des ihnen reciproken Grundellipsoids:

$$(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2 = 5\varepsilon^4,$$

$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{c^2 + a^2} + \frac{z^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{5}.$$

Für das Rotationsellipsoid $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ist

$$A = B = \tfrac{1}{5} m (a^2 + c^2), \quad C = \tfrac{2}{5} m a^2, \quad H = \tfrac{1}{5} m [a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\gamma^2].$$

Für die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ist $A = B = C = H = \frac{2}{5} m a^2$, $\varkappa^2 = \frac{2}{5} a^2$. Die Cauchy-Poinsot'schen Ellipsoide sind Kugeln: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{2}\frac{\varepsilon^4}{a^2}$, das Grundellipsoid die Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{5} a^2$. Um das Trägheitsmoment H der homogenen Kugel für irgend eine Centralaxe direct zu bestimmen, wähle man diese zur x-Axe, so dass $H = \Sigma(y^2 + z^2) dm = \Sigma y^2 dm + \Sigma z^2 dm$. Nun ist wegen der Symmetrie der Figur

$$\Sigma x^2 dm = \Sigma y^2 dm = \Sigma z^2 dm = \tfrac{1}{3}\Sigma (x^2 + y^2 + z^2) dm = \tfrac{1}{3}\Sigma r^2 dm,$$

wenn r den Radiusvector vom Mittelpunkte nach dem Punkte (x, y, z) bedeutet. Da $dm = 4\pi\varrho r^2 dr$, so wird

$$\tfrac{1}{3}\Sigma r^2 dm = \tfrac{4}{3}\pi\varrho \int_0^a r^4 dr = \tfrac{4}{15}\pi\varrho a^5 \text{ und } H = \tfrac{8}{15}\pi\varrho a^5 = \tfrac{2}{5} m r^2, \text{ da } m = \tfrac{4}{3}\pi\varrho a^3.$$

Nach einer Bemerkung von Hearn (Cambridge and Dublin mathem. Journal, Vol. VIII, p. 37 (1853)) kann man die Aufsuchung des Trägheitsmomentes des Ellipsoids auf die des Trägheitsmomentes der Kugel reduciren. Die Gleichung des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ geht nämlich durch die Substitution

$$x = a x', \; y = b y', \; z = c z'$$

über in $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ und wird

$$dm = \varrho\, dx\, dy\, dz = \varrho\, a b c\, dx'\, dy'\, dz' = a b c\, dm',$$

mithin

$$\Sigma x^2 dm = a b c \cdot a^2 \Sigma x'^2 dm',$$
$$\Sigma y^2 dm = a b c \,.\, b^2 \Sigma y'^2 dm',$$
$$\Sigma z^2 dm = a b c \,.\, c^2 \Sigma z'^2 dm'.$$

Die Gleichung $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ stellt aber eine Kugelfläche vom Radius 1 dar und die Summen $\Sigma x'^2 dm'$, $\Sigma y'^2 dm'$, $\Sigma z'^2 dm'$ beziehen sich auf diese, deren Massenelement dm' ist. Für sie ist aber nach dem Obigen:

$$\Sigma x'^2 dm' = \Sigma y'^2 dm' = \Sigma z'^2 dm' = \tfrac{4}{15}\pi\varrho$$

und daher werden

$$\frac{1}{a^2}\Sigma x^2\,dm = \frac{1}{b^2}\Sigma y^2\,dm = \frac{1}{c^2}\Sigma z^2\,dm = \tfrac{4}{15}\pi\varrho\,abc = \tfrac{1}{5}M,$$

mithin

$$A = \Sigma(y^2+z^2)\,dm = \tfrac{1}{5}M(b^2+c^2),\ B = \tfrac{1}{5}M(c^2+a^2),\ C = \tfrac{1}{5}M(a^2+b^2).$$

Man kann leicht ein homogenes Ellipsoid finden, welches in Bezug auf alle sich im Mittelpunkt schneidenden Axen dieselben Trägheitsmomente besitzt, wie ein gegebenes System welches mit diesem dieselbe Masse m und denselben Massenmittelpunkt hat. Sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Systems für jenen Punkt, so findet man, weil die Centralellipsoide für das System und das Ellipsoid dieselben sein müssen, die Halbaxen a, b, c des Ellipsoids aus den Gleichungen:

$$\tfrac{1}{5}m(b^2+c^2) = A,\ \tfrac{1}{5}m(c^2+a^2) = B,\ \tfrac{1}{5}m(a^2+b^2) = C.$$

Hieraus folgt

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{5}{2m}(A+B+C) = \frac{5}{m}\Sigma(x^2+y^2+z^2)\,dm$$

und folglich durch Subtraction der vorigen Gleichungen einzeln:

$$a^2 = \frac{5}{m}\Sigma x^2\,dm = \frac{5}{m}A',\ b^2 = \frac{5}{m}\Sigma y^2 dm = \frac{5}{m}B',\ c^2 = \frac{5}{m}\Sigma z^2 dm = \frac{5}{m}C'.$$

Das gesuchte Ellipsoid hat demnach die Gleichung:

$$\frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'} = \frac{5}{m};$$

es ist ähnlich dem Centralellipsoid der Trägheitsmomente für Ebenen.

Zwei Systeme, welche für alle Axen gleiche Trägheitsmomente haben, heissen aequivalente Systeme. Reye hat gezeigt, dass man auf unendlich viele Arten ein System von vier Punkten finden kann, welches einem gegebenen System aequivalent ist. (S. Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. und Physik B. X, S. 433).

§. 2. Der homogene Rotationskörper. Jede Ebene durch die Rotationsaxe ist eine Symmetrieebene und mithin die Rotationsaxe eine Hauptaxe und da sie den Massenmittelpunkt enthält, eine Hauptcentralaxe. Die Trägheitsmomente für alle Axen, welche die Rotationsaxe rechtwinklig schneiden, sind einander gleich, daher sind sie alle Hauptaxen und ist das Trägheitsellipsoid für alle Punkte der Rotationsaxe ein Rotationsellipsoid um sie.

Wählen wir den Ursprung in irgend einem Punkte O der Rotationsaxe, diese selbst zur Axe der x und zwei beliebige zu ihr und zu einander senkrechte Axen zu Axen der y und z. Es ist dann

$$A' = \Sigma x^2 dm,\quad B' = \Sigma y^2 dm = C' = \Sigma z^2 dm = \tfrac{1}{2}\Sigma(y^2+z^2)\,dm = \tfrac{1}{2}A,$$
$$B = C'+A' = \Sigma(z^2+x^2)\,dm = C = A'+B' = \Sigma(x^2+y^2)\,dm = A'+\tfrac{1}{2}A,$$

sodass also nur A und A' zur Bestimmung aller Trägheitsmomente erforderlich sind. Man erhält das Volumenelement, indem man den Körper schneidet, 1. mit zwei Meridianebenen, welche durch die x-Axe gehend mit der xy-Ebene die Winkel φ und $d\varphi$ bilden, 2. mit zwei Cylinderflächen um die x-Axe im Abstande r und $r+dr$ gelegt, und 3. zwei Ebenen senkrecht zur x-Axe im Abstande x und $x+dx$ vom Ursprunge geführt. Das hiedurch bestimmte Volumenelement ist $r\,dr\,d\varphi\,dx$ und mithin das Massenelement $dm = \varrho\,r\,dr\,d\varphi\,dx$, wenn ϱ die specifische Masse ist. Da $r^2 = y^2+z^2$, so wird

$$A = \varrho \int_a^b dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r^3 dr, \quad A' = \varrho \int_a^b x^2 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr,$$

$$m = \varrho \int_a^b dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r dr.$$

Die Grenzen der Integration sind für r die Werthe $r = 0$ und $r = f(x)$, wenn $r = \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)$ die Gleichung der Rotationsfläche ist, für φ die Werthe 0 und 2π und für x die Abstände a, b der zur x-Axe senkrechten Grenzebenen. Man erhält daher:

$$A = \tfrac{1}{2}\pi\varrho \int_a^b [f(x)]^4 dx, \quad A' = \pi\varrho \int_a^b x^2 [f(x)]^2 \, dx, \quad m = \pi\varrho \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Diese Werthe sind in die Formel

$$H = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = A\alpha^2 + (A' + \tfrac{1}{2} A)(\beta^2 + \gamma^2)$$
$$= A\alpha^2 + (A' + \tfrac{1}{2} A)(1 - \alpha^2) = (\tfrac{1}{2} A + A') + (\tfrac{1}{2} A - A')\alpha^2$$

einzuführen.

Für einen Rotationscylinder hat man, wenn r den Basisradius und h die Höhe bezeichnet $a = -\tfrac{1}{2} h$, $b = \tfrac{1}{2} h$, $f(x) = r$, $m = \pi\varrho r^2 h$ und folglich

$$A = \tfrac{1}{2}\pi\varrho r^4 h = \tfrac{1}{2} m r^2, \quad A' = \tfrac{1}{12}\pi\varrho r^2 h^3 = \tfrac{1}{12} m h^2, \quad B = C = \tfrac{1}{4} m(r^2 + \tfrac{1}{3} h^2).$$

Für eine cylindrische Röhre von der Wanddicke d und dem inneren Radius r wird $A = \tfrac{1}{2}\pi\varrho h\,[(r + d)^4 - r^4]$, wo $\pi\varrho h\,[(r + d)^2 - r^2] = m$ gesetzt werden kann.

Für einen Rotationskegel von der Höhe h und dem Basisradius r ist, wenn die Spitze zum Coordinatenursprung gewählt wird $f(x) = \frac{r}{h} x$, $a = 0$, $b = h$

$$A = \tfrac{3}{10} m r^2, \quad A' = \tfrac{3}{5} m h^2, \quad B = C = \tfrac{3}{5} m(\tfrac{1}{4} r^2 + h^2).$$

Das Trägheitsmoment für die Hauptcentralaxe senkrecht zur Kegelaxe ist:

$$\tfrac{3}{80} m(4r^2 + h^2).$$

Weitere Beispiele:

Für den homogenen Ovalkörper, welcher durch Rotation der Ovallinie $r = 2a\cos^2\vartheta$ um die Polaraxe entsteht, die Hauptträgheitsmomente und Trägheitsradien des Massenmittelpunktes zu finden.

Das Trägheitsmoment einer Biconvexlinse für einen Durchmesser der gemeinschaftlichen Kreisbasis als Axe zu finden, an welcher die beiden Planconvexlinsen zusammenstossen, welche die Biconvexlinse bilden.

§. 3. Für Trägheitsmomente von homogenen Rotationskörpern kann man einen den Guldin'schen Sätzen über den Massenmittelpunkt nicht unähnlichen Satz aufstellen. Besitzt nämlich eine ebene Figur (Fig. 47) eine Symmetrieaxe a, so ist, wenn $d\alpha$ ein Flächenelement derselben und x seinen Abstand von dieser Axe bedeutet,

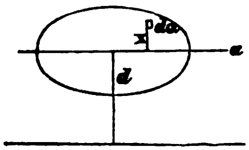

Fig. 47.

$$\Sigma x d\alpha = 0 \text{ und } \Sigma x^3 d\alpha = 0,$$

weil vermöge der Symmetrie der Figur die Flächenelemente, welche paarweise in entgegengesetzt gleichem Abstande x diesseits und jenseits der Axe liegen, sich tilgen. Setzt man weiter $\Sigma x^2 d\alpha = \varkappa^2 \alpha$, wo α den Flächenraum der Figur und $\varkappa$ deren Trägheitsradius für die Axe a darstellt, so wird das Trägheitsmoment des Rotationskörpers, den die Fläche α bei der Drehung um eine mit a im Abstande d parallele Axe h erzeugt:

$$H = 2\pi\varrho\, \Sigma\, (x + d)^3\, d\alpha,$$

indem $2\pi\,(x + d)\, d\alpha \,.\, \varrho$ einen Elementarring der Masse darstellt. Dieser Ausdruck nimmt aber vermöge der vorstehenden Bemerkungen die Form an:

$$H = 2\pi\varrho\, (d^3 \Sigma d\alpha + 3d^2 \Sigma x d\alpha + 3d \Sigma x^2 d\alpha + \Sigma x^3 d\alpha = 2\pi\varrho\alpha d\, (d^2 + 3\varkappa^2).$$

Da nach dem Guldin'schen Satze das Volumen des Rotationskörpers $2\pi\alpha d$ und also $2\pi\varrho\alpha d$ seine Masse M ist, so hat man

$$H = M\, (d^2 + 3\varkappa^2).$$

Es darf hierbei aber die Rotationsaxe h die Fläche α nicht schneiden. Der fragliche Satz lautet demnach:

Besitzt ein geschlossener ebener Flächenraum eine Symmetrieaxe und ist $\varkappa$ sein Trägheitsradius in Bezug auf sie, so ist der Trägheitsradius des homogenen Rotationskörpers, welchen die Figur durch Rotation um eine im Abstande d mit der Symmetrieaxe parallele Axe erzeugt, in Bezug auf diese Axe gleich $d^2 + 3\,\varkappa^2$.

Der Satz ist von Townsend [On the moment of inertia of a ring with respect to its axes of revolution. Cambridge and Dublin Quarterly Journal of pure and appl. Mathem. T. X, p. 203. (1869)].

§. 4. Methode der ähnlichen Figuren. Mit besonderem Erfolge kann man sich in vielen Fällen der geometrischen Verwandtschaften zur Bestimmung von Trägheitsmomenten bedienen; so insbesondere der der Aehnlichkeit. Denkt man sich nämlich zwei homogene ähnliche Systeme in gleichviel ähnliche Massenelemente zerlegt, so stehen die Massen je zwei homologer solcher Elemente in dem constanten Verhältnisse ihrer Raumdimensionen, welches Verhältniss für lineäre Systeme ε, für flächenartige Systeme ε^2 und für räumliche Systeme ε^3 sei; die Abstände dieser Elemente von zwei homolog liegenden Axen stehen im Verhältniss ε der Linien und ihre Quadrate also im Verhältniss ε^2. Demnach stehen die Trägheitsmomente der Elemente im Verhältniss ε^3, ε^4, ε^5 und in demselben Verhältnisse auch die Trägheitsmomente der ähnlichen Systeme bezüglich jener Axen. Daher der Satz:

Ist ε das Aehnlichkeitsverhältniss zweier ähnlicher homogener Systeme, so ist das Verhältniss ihrer Trägheitsmomente H, H' in Bezug auf zwei ähnlich liegende Axen h, h' gleich ε^n, wo $n = 3, 4, 5$, je nachdem die Systeme eine, zwei oder drei Dimensionen besitzen, d. h.:

$$H' = \varepsilon^n \,.\, H, \quad n = 3, 4, 5.$$

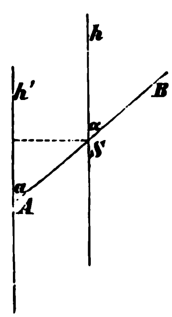

Fig. 48.

Einige Beispiele sollen die Anwendung dieses Satzes erläutern.

1. Trägheitsmoment H einer homogenen Strecke AB (Fig. 48) für eine Axe h des Massenmittelpunktes, welche mit der Strecke den Winkel α bildet. Es ist die Summe der Trägheitsmomente der beiden Hälften AS und SB der Strecke AB für dieselbe Axe und diese haben gleiches Trägheitsmoment $\frac{1}{2} H$ in Bezug auf sie. Ebenso gross ist das Trägheitsmoment der halben Strecke AS in Bezug auf eine durch A

gehende mit h parallele Axe h'; denn AS und SB sind ähnliche Systeme für das Aehnlichkeitsverhältniss $\varepsilon = 1$ in Bezug auf homologe Axen. Da die Länge der ganzen Strecke AB gleich $2 . AS$, so ist ihr Trägheitsmoment H' für die Axe h'

$$H' = 2^3 \cdot \tfrac{1}{2} H = 4H.$$

Nun ist aber nach dem Satze für die Trägheitsmomente der Parallelaxen

$$H' = H + \tfrac{1}{4} m\, l^2 \sin^2 \alpha,$$

wenn l und m die Länge und Masse von AB bedeutet. Indem man beide Ausdrücke einander gleichsetzt, erhält man

$$H = \tfrac{1}{12} m l^2 \sin^2 \alpha.$$

Das Trägheitsmoment ist constant für alle gegen h gleichgeneigten Strecken AB; für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ tritt das Maximum, für $\alpha = 0$ das Minimum ein. Das Centralellipsoid ist ein Kreiscylinder um l als Axe.

2. **Trägheitsmoment H der Fläche eines homogenen Parallelogramms $ABCD$** (Fig. 49) für eine Massenmittelpunktaxe h. Das Trägheitsmoment H ist die Summe der Trägheitsmomente der vier Parallelogramme SA, SB, SC, SD, welche unter sich congruent und dem Ganzen im Verhältniss $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ähnlich sind. Die Parallelogramme SA, SC einerseits und SB, SD andererseits haben gleiches Trägheitsmoment für die Axe h. Sind also H_{SA}, H_{SB} ihre Werthe, so wird

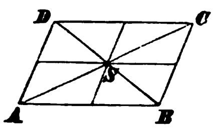

Fig. 49.

$$H = 2\,(H_{SA} + H_{SB}).$$

Das Parallelogramm SA liefert aber für die Axe h und eine durch A gehende, ihr parallele Axe h' denselben Werth $H_{SA} = H'_{SA}$, da SC und AS congruent und gleicher Lage gegen h und h' sind. Ebenso ist $H_{SB} = H''_{SB}$, wenn h'' eine durch B gehende, zu h parallele Axe bedeutet. Daher ist auch

$$H = 2(H'_{SA} + H''_{SB}).$$

Nennen wir jetzt H' und H'' die Trägheitsmomente des Ganzen für h' und h'', so liefert die Aehnlichkeit der Figuren AS und AC, sowie BS, BD die Relationen $H' = 2^4 . H'_{SA}$, $H'' = 2^4 . H''_{SB}$ und zugleich ist

$$H' = H + Mp^2,\ H'' = H + Mq^2,$$

wenn p und q die Abstände des Massenmittelpunktes des Ganzen von den Axen h', h'' ist, welche durch zwei nicht gegenüber liegende Ecken der Figur gehen. Hieraus folgt

$$H' + H'' = 2H + M(p^2 + q^2)$$

und weiter also:

$$16(H'_{SA} + H''_{SB}) = 8H = 2H + M\,(p^2 + q^2),$$

d. h.:

$$H = \tfrac{1}{6} M\,(p^2 + q^2).$$

Die Grössen p und q sind die Abstände zweier nicht gegenüberliegender Ecken des Parallelogramms von der Massenmittelpunktsaxe h. Sie können nicht grösser werden, als die halben Diameter AS und BS des Parallelogramms, deren Projectionen auf eine zur Axe h senkrechte Ebene sie sind. Daher wird H ein Maximum für die Axe h, welche auf der Ebene des Parallelogramms senkrecht steht. Für die mit der Seite BC parallele Massenmittelpunktsaxe wird

$$p = q = \tfrac{1}{2}\overline{AB} . \sin \alpha,$$

wenn α den Winkel des Parallelogramms bezeichnet, mithin

$$H = \tfrac{1}{12} M \,.\, \overline{AB}^2 \sin^2 \alpha \,.$$

Man erhält dies Resultat auch aus Nr. 1, wenn man das Parallelogramm in unendlich schmale Streifen parallel AB zerlegt. Den Maximalwerth

$$H = \tfrac{1}{24} M \,(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2)$$

kann man mit Hülfe der Seiten darstellen, indem

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AB} \,.\, BC \,.\, \cos\alpha,$$
$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \,.\, BC \,.\, \cos\alpha,$$

also

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\,(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$

wird, nämlich:

$$H = \tfrac{1}{12} M \,(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2).$$

3. **Trägheitsmoment der homogenen Dreiecksfläche ABC (Fig. 50) für eine Massenmittelpunktsaxe h.** Ergänzt man das Dreieck zu einem Parallelo-

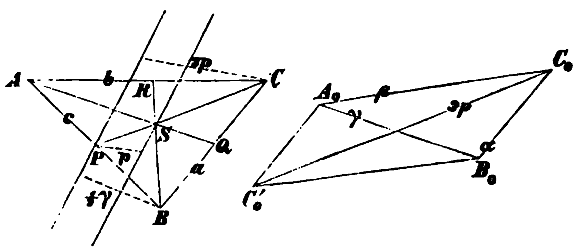

Fig. 50.

gramm, so erhält man für das Trägheitsmoment H' um eine durch die Mitte P der Seite AB gehende, zu h parallele Axe h' das halbe Trägheitsmoment des Parallelogramms (s. Nr. 2), nämlich, wenn m die Masse der Dreiecksfläche und also $2m$ die des Parallelogramms ist:

$$H' = \tfrac{1}{6} m \,[(\tfrac{1}{2}\gamma)^2 + (3p)^2],$$

wo $\frac{1}{2}\gamma$ und $3p$ die Perpendikel bedeuten, welche von B oder A und C auf die Axe h' gefüllt werden können. γ ist die Projection der Seite $AB = c$ und $3p$ die Projection der Mediane CP, also p die des Massenmittelpunktsabstandes SP auf eine zu den Axen h, h' senkrechte Ebene. Um aus H' das Trägheitsmoment H für die Massenmittelpunktsaxe h zu erhalten, hat man $m \,.\, p^2$ abzuziehen; dadurch kommt:

$$H = \tfrac{1}{24} m \,.\, \gamma^2 + \tfrac{1}{2} m \,.\, p^2 .$$

Bezeichnet man nun mit α, β, $3q$, $3r$ die Projectionen der Seiten a, b und der Medianen AQ, BR auf jene Ebene, so erhält man in gleicher Weise

$$H = \tfrac{1}{24} m \,.\, \beta^2 + \tfrac{1}{2} m \,.\, q^2, \quad H = \tfrac{1}{24} m \,.\, \alpha^2 + \tfrac{1}{2} m \,.\, r^2$$

und indem man die Summe der drei Ausdrücke für H durch 3 dividirt:

$$H = \tfrac{1}{72} m \,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \tfrac{1}{6} m \,(p^2 + q^2 + r^2).$$

In der Projection $A_0 B_0 C_0$ des Dreiecks ABC auf die zu h senkrechte Ebene sind

$3p$, $3q$, $3r$ die drei Medianen zu den Seiten γ, β, α und ist $6p$ die Diagonale des Parallelogramms $C_0 C_0'$, zu welchem $A_0 B_0 C_0$ ergänzt werden kann. Man hat daher:

$$(6p)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C_0$$

oder da

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos C_0$$

ist,

$$(6p)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2.$$

In ähnlicher Weise ist

$$(6q)^2 = 2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2, \quad (6r)^2 = 2(\gamma^2 + \alpha^2) - \beta^2.$$

Daher erhält man durch Addition dieser Ausdrücke

$$12(p^2 + q^2 + r^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

und indem man hiermit $p^2 + q^2 + r^2$ aus der Gleichung für H eliminirt:

$$H = \tfrac{1}{36} m (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Steht die Axe h senkrecht auf der Ebene des Dreiecks, so werden α, β, γ gleich den Seiten des Dreiecks selbst. Ist daher H_0 das Trägheitsmoment des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$, und m_0 seine Masse, so wird

$$\frac{H}{H_0} = \frac{m}{m_0}$$

und wenn die specifische Masse für beide dieselbe ist, so ist das Verhältniss $m : m_0$ gleich dem der Flächenräume, also gleich dem Cosinus des Winkels λ, welchen das Dreieck ABC mit der Axe h bildet. Daher $H_0 = H \sin \lambda$.

Eliminirt man nicht $p^2 + q^2 + r^2$, sondern $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, so ergibt sich

$$H = \tfrac{1}{3} m (p^2 + q^2 + r^2);$$

es sind aber $\frac{1}{3} m \cdot p^2$, $\frac{1}{3} m \cdot q^2$, $\frac{1}{3} m \cdot r^2$ die Trägheitsmomente der drei Seitenmitten P, Q, R, wenn in jeder derselben die Masse $\frac{1}{3} m$ concentrirt gedacht wird, d. h.:

Das Trägheitsmoment einer Dreiecksfläche in Bezug auf eine Massenmittelpunktsaxe ist gleich dem Trägheitsmoment der drei Seitenmitten, wenn jede von diesen den dritten Theil der Dreiecksmasse enthält.

Fällt die Axe h in die Ebene des Dreiecks, so fallen die Projectionen α, β, γ der Seiten auf eine zu h senkrechte Ebene in eine Gerade und ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

also das Quadrat jeder von ihnen gleich dem Quadrat der Summe der beiden anderen. Daher wird hierfür $H = \frac{1}{36} m (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{18} m (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

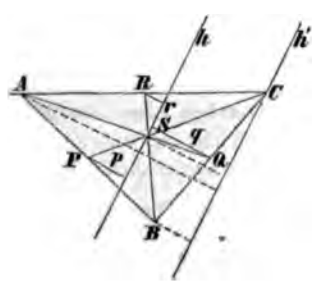

Fig. 51.

Die Gleichung $H = \frac{1}{3} m (p^2 + q^2 + r^2)$ wollen wir noch benutzen, um das Trägheitsmoment für eine in der Ebene des Dreiecks liegende, durch die Ecke C gehende Axe h' zu bestimmen, indem hierfür p, q, r die Perpendikel von den Seitenmitten P, Q, R auf eine mit h' durch den Massenmittelpunkt parallel gelegte Axe h bedeuten (Fig. 51). Ist s der Abstand des Massenmittelpunktes von h', so wird

$$H' = \tfrac{1}{3} m (p^2 + q^2 + r^2) + m \cdot s^2.$$

Bezeichnen wir jetzt mit a, b die Abstände der Ecken A, B von h', so wird

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b) - s, \quad q = \tfrac{1}{2}b - s, \quad r = \tfrac{1}{2}a - s,$$

oder weil $s = \frac{1}{3}(a + b)$ (s. S. 88):

$$p = \tfrac{1}{6}(a + b), \quad q = \tfrac{1}{6}(b - 2a), \quad r = \tfrac{1}{6}(a - 2b),$$

folglich:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \tfrac{1}{6}(a^2 + b^2 - ab),$$

also:

$$H' = \tfrac{1}{6}m\,(a^2 + ab + b^2).$$

4. Das Trägheitsmoment der homogenen Fläche eines regulären Vielecks in Bezug auf die zur Figur senkrechte Massenmittelpunktsaxe zu finden.

5. Die Trägheitsmomente für ein rechtwinkliges Parallelepiped und ein dreiseitiges gerades Prisma zu finden.

§. 5. Die Methode der conjugirten Diameter. Die Aufsuchung der Hauptaxen ist für complicirtere Fälle mit Hülfe eines der Trägheitsellipsoide nach den gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie mühsam. Binet hat zur Erleichterung dieser Operation folgenden Satz bewiesen:

Irgend drei Axen eines Punktes, für welche als Coordinatenaxen die Gleichungen bestehen

$$\Sigma mxy = \Sigma myz = \Sigma mzx = 0$$

sind conjugirte Diameter des reciproken Binet'schen Trägheitsellipsoids für Ebenen dieses Punktes. Ist nämlich P irgend eine Ebene des Schnittpunktes dieser Axen und q der Abstand des Punktes $m(x, y, z)$ von ihr und sind α, β, γ die Richtungscosinusse der Normalen dieser Ebene gegen die Axen, so wird $q = \alpha x + \beta y + \gamma z$ und mithin

$$\Sigma mq^2 = \Sigma m\,.\,\iota^2 = \Sigma m(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \alpha^2\Sigma mx^2 + \beta^2\Sigma my^2 + \gamma^2\Sigma mz^2.$$

Setzt man

$$\Sigma mx^2 = \Sigma m\,.\,a^2,\ \Sigma my^2 = \Sigma m\,.\,b^2,\ \Sigma mz^2 = \Sigma m\,.\,c^2,$$

so geht diese Gleichung über in die folgende, welche den Trägheitsarm ι für P bestimmt:

$$\iota^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2.$$

Die Ebene senkrecht zu ι in dessen Endpunkt umhüllt, wenn die ihr parallele Ebene P variirt, das reciproke Binet'sche Ellipsoid und wenn x_0, y_0, z_0 die Strecken sind, welche sie auf den Coordinatenaxen der x, y, z bestimmt, so ist

$$\alpha x_0 = \beta y_0 = \gamma z_0 = \iota.$$

Damit geht die vorstehende Gleichung über in:

$$1 = \frac{a^2}{x_0{}^2} + \frac{b^2}{y_0{}^2} + \frac{c^2}{z_0{}^2},$$

welche die Bedingung ist, welche zwischen x_0, y_0, z_0 bestehen muss, damit die Ebene Tangentenebene an dies Ellipsoid sei. Man kann leicht x_0, y_0, z_0 in dieser Gleichung durch die Coordinaten des Berührungspunktes ausdrücken. Ist nun irgend ein Ellipsoid $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$ in Bezug auf schiefe Cooordinaten gegeben, wofür wegen des Mangels der Producte xy, yz, zx in der Gleichung $2p$, $2q$, $2r$ conjugirte Diameter sind und soll man die Bedingung angeben, unter welcher die Ebene $\frac{\xi}{x_0} + \frac{\eta}{y_0} + \frac{\zeta}{z_0} = 1$ dies Ellipsoid berührt, so bilde man nach bekannten Sätzen die Gleichung der Tangentenebene $\frac{x\xi}{p^2} + \frac{y\eta}{q^2} + \frac{z\zeta}{r^2} = 1$ und vergleiche die Coefficienten beider. Dies gibt $\frac{x}{p^2} = \frac{1}{x_0}$, $\frac{y}{q^2} = \frac{1}{y_0}$, $\frac{z}{r^2} = \frac{1}{z_0}$ oder $xx_0 = p^2$, $yy_0 = q^2$, $zz_0 = r^2$ für die Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes, und indem man sie in die Gleichung des Ellipsoids einsetzt,

$$\frac{p^2}{x_0{}^2} + \frac{q^2}{y_0{}^2} + \frac{r^2}{z_0{}^2} = 1$$

als Bedingung dafür, dass die Ebene, welche von den Axen die Strecken x_0, y_0, z_0 abschneidet, das Ellipsoid über den conjugirten Diametern $2p$, $2q$, $2r$ im Punkte

$$x = \frac{p^2}{x_0}, \quad y = \frac{q^2}{y_0}, \quad z = \frac{r^2}{z_0}$$

berührt. Die Vergleichung dieser Bedingung mit obiger Gleichung

$$1 = \frac{a^2}{x_0{}^2} + \frac{b^2}{y_0{}^2} + \frac{c^2}{z_0{}^2}$$

zeigt, dass dieselbe die Bedingung ausdrückt, dass die Ebene $(x_0\, y_0\, z_0)$ das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ im Punkte (xyz) berührt und dass $2a$, $2b$, $2c$ conjugirte Diameter sind. Dies Ellipsoid ist also das obenbezeichnete Trägheitsellipsoid bezogen auf conjugirte Diameter.

Sind also Σmxy, Σmyz, Σmzx für drei gegebene Axen der x, y, z Null, so wird man auf ihnen diesseits und jenseits ihres gemeinsamen Schnittpunktes die Grössen a, b, c auftragen, für welche

$$a^2\Sigma m = \Sigma mx^2, \; b^2\Sigma m = \Sigma my^2, \; c^2\Sigma m = \Sigma mz^2;$$

das Ellipsoid über ihnen als conjugirten Diametern construirt, ist das Trägheitsellipsoid und seine Axen sind die Hauptträgheitsaxen. Da ähnliche und ähnlichliegende Ellipsoide das System der conjugirten Diameter, und mithin auch die Hauptaxen gemein haben, so kann man das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

auch durch ein anderes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m$$

ersetzen.

Somoff hat dem Binet'schen Satze noch den folgenden hinzugefügt, aus welchem er letzteren ableitet: Errichtet man auf drei conjugirten Diametralebenen (yz), (zx), (xy) eines Binet'schen reciproken Trägheitsellipsoids drei Diameter ξ, η, ζ senkrecht, so sind sie conjugirte Diameter der Schaar directer Binet'scher Ellipsoide.

Wir fanden oben für den Trägheitsarm der Ebene P:

$$\iota^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2, \; a^2\Sigma m = \Sigma mx^2, \; b^2\Sigma m = \Sigma my^2, \; c^2\Sigma m = \Sigma mz^2.$$

Tragen wir auf deren Normalen ϱ so auf, dass $\varrho\iota = \varepsilon^2$, wo ε eine beliebige Constante ist, so wird durch Multiplication mit ϱ^2

$$\varepsilon^4 = a^2(\varrho\alpha)^2 + b^2(\varrho\beta)^2 + c^2(\varrho\gamma)^2.$$

Sind nun ξ, η, ζ die Coordinaten des Endpunktes von ϱ, so ergibt sich leicht

$$\varrho\alpha = \xi \cos \xi x,\ \varrho\beta = \eta \cos \eta y,\ \varrho\gamma = \zeta \cos \zeta z.$$

Denn da die Axen der ξ, η, ζ auf den Ebenen der yz, zx, xy senkrecht stehen, so stehen umgekehrt auch die Axen der x, y, z auf der Ebene der $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ senkrecht; daher reducirt sich

$$\varrho\alpha = \xi \cos \xi x + \eta \cos \eta x + \zeta \cos \zeta x$$

auf $\varrho\alpha = \xi \cos \xi x$ und ähnlich die anderen Projectionen von ϱ auf die y- und z-Axe auf $\varrho\beta = \eta \cos \eta y$ und $\varrho\gamma = \zeta \cos \zeta z$. Hiermit erhält man also für die Fläche der Endpunkte aller ϱ oder für ein Trägheitsellipsoid aus der Schaar der directen Binet'schen Ellipsoide für Ebenen die Gleichung

$$\varepsilon^4 = a^2\xi^2 \cos^2 \xi x + b^2\eta^2 \cos^2 \eta y + c^2\zeta^2 \cos^2 \zeta z$$

und da dieselbe keine Productglieder enthält, so sind die Axen der ξ, η, ζ ein Tripel conjugirter Durchmesser dieser Fläche. Man bemerkt hiebei, dass in

$$\Sigma m \,.\, a^2 \cos^2 \xi x = \cos^2 \xi x\, \Sigma m x^2 = \Sigma m (x \cos \xi x)^2$$

die Grösse $x \cos \xi x$ den Abstand des Punktes (xyz) oder $(\xi\eta\zeta)$ von der Ebene (yz) und also $\Sigma m (x \cos \xi x)^2$ das Trägheitsmoment und also $a \cos \xi x$ den Trägheitsarm für diese Ebene bedeutet. Aehnliches gilt für $b \cos \eta y$, $c \cos \zeta z$.

Ebenso kann man zeigen, dass auch die Axen der x, y, z conjugirte Diameter für dasselbe Ellipsoid sind.

§. 6. Bestimmung der Hauptcentralaxen einiger homogener Figuren mit Hülfe des Binet'schen Satzes.

1. Das homogene schiefe Parallelepiped. Sind p, q, r die Kanten, S der Mittelpunkt und die Axen Sx, Sy, Sz parallel den Kanten, so sind offenbar

$$\int yz dm = 0,\ \int zx dm = 0,\ \int xy dm = 0$$

und

$$m \,.\, a^2 = \int x^2 dm = \tfrac{1}{12} m p^2,\ m \,.\, b^2 = \tfrac{1}{12} m q^2,\ m \,.\, c^2 = \tfrac{1}{12} m r^2$$

oder

$$a^2 = \tfrac{1}{12} p^2,\quad b^2 = \tfrac{1}{12} q^2,\quad c^2 = \tfrac{1}{12} r^2.$$

Daher sind die Axen von S parallel den Kanten conjugirte Durchmesser des Ellipsoids $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} + \dfrac{z^2}{r^2} = \tfrac{1}{12}$ und die Hauptaxen sind die Axen dieses Ellipsoids oder jedes ihm ähnlichen und mit ihm ähnlich liegenden

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = \sigma^2.$$

Man kann σ so bestimmen, dass das Ellipsoid durch die 8 Ecken des Parallelepipeds geht, d. h. $x = \tfrac{1}{2}p$, $y = \tfrac{1}{2}q$, $z = \tfrac{1}{2}r$ der Gleichung des Ellipsoids genügt. Man findet durch Einsetzung dieser Werthe $\sigma^2 = \tfrac{3}{4}$.

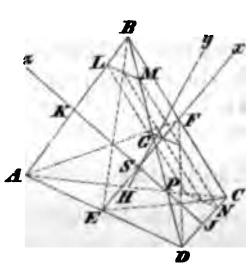

Fig. 52.

2. Das homogene Tetraeder. Es seien (Fig. 52) S der Massenmittelpunkt des Tetraeders, EF, GH, JK die Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten und Sx, Sy, Sz drei Axen in der Richtung dieser Verbindungslinien. Jede Ebene parallel zur yz-Ebene liefert einen Schnitt $LMNP$, welcher ein Parallelogramm ist für welches $\iint y dy dz = 0$ und $\iint z dy dz = 0$

sind, woraus folgt

$$\iiint xy\,dx\,dy\,dz = \int x\,dx \iint y\,dy\,dz = 0$$

und

$$\iiint xz\,dx\,dy\,dz = \int x\,dx \iint z\,dy\,dz = 0.$$

Ebenso ist $\iiint yz\,dx\,dy\,dz = 0$. Indem man diese Ausdrücke mit der specifischen Masse ϱ und der Winkelfunction multiplicirt, welche $dx\,dy\,dz$ in das Volumenelement überführt, erhält man

$$\int xy\,dm = \int yz\,dm = \int zx\,dm = 0\,.$$

Daher sind die Axen Sx, Sy, Sz conjugirte Diameter des Trägheitsellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

wo

$$m\,.\,a^2 = \int x^2 dm, \quad m\,.\,b^2 = \int y^2 dm, \quad m\,.\,c^2 = \int z^2 dm\,.$$

Sind p, p'; q, q'; r, r' die drei Paar Gegenkanten AD, BC; BD, AC; CD, AB und α, β, γ die Strecken EF, GH, JK, so findet sich

$$\begin{array}{ll}
4\alpha^2 = q^2 + q'^2 + r^2 + r'^2 - p^2 - p'^2 & a^2 = \frac{1}{20}\alpha^2 \\
4b^2 = r^2 + r'^2 + p^2 + p'^2 - q^2 - q'^2 & b^2 = \frac{1}{20}\beta^2 \\
4\gamma^2 = p^2 + p'^2 + q^2 + q'^2 - r^2 - r'^2 & c^2 = \frac{1}{20}\gamma.
\end{array}$$

und hiermit das fragliche Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{1}{20}.$$

Seine Axen sind die Hauptaxen. Von den beiden ihm ähnlichen Ellipsoiden

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{3}{4}$$

geht das erstere durch die Kantenmitten, das letztere durch die Ecken des Tetraeders.

3. **Homogene Fläche eines schiefen Parallelogramms.** Für eine ebene Figur sind $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mzx = 0$, $\Sigma mz^2 = 0$, wenn die z-Axe nicht in die Ebene fällt. Ist also für die beiden in die Ebene der Figur fallenden Axen Sx, Sy die Bedingung $\Sigma mxy = 0$ erfüllt, so sind diese Axen conjugirte Diameter der Trägheitsellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, auf welche sich das Trägheitsellipsoid reducirt und für welche $\Sigma mx^2 = \Sigma m\,.\,a^2$, $\Sigma my^2 = \Sigma m\,.\,b^2$. Für das Parallelogramm von den Seiten p, q und dem Winkel α genügen die Axen Sx, Sy parallel zu den Seiten der Bedingung $\int xy\,dm = 0$ und sind dieselben daher conjugirte Diameter der Ellipse $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = \frac{1}{12}$, indem $a = \frac{1}{12}p^2$, $b = \frac{1}{12}q^2$. Dieses Ellipse kann ersetzt werden durch die dem Parallelogramm eingeschriebene $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = \frac{1}{4}$, deren conjugirte Diameter in den Richtungen Sx, Sy gleich p, q sind. Die Hauptaxen dieser Ellipse sind die Hauptcentralträgheitsaxen des Parallelogramms. Ihre Construction ist bekannt; ihre Längen A, B sind bestimmt durch:

$$A^2 = \tfrac{1}{24}\left(p^2 + q^2 + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4\,p^2q^2\cos^2\alpha}\right),$$

$$B^2 = \tfrac{1}{24}\left(p^2 + q^2 - \sqrt{(p^2-q^2)^2+4p^2q^2\cos^2\alpha}\right), \quad A^2 + B^2 = \tfrac{1}{12}(p^2 + q^2).$$

4. Homogene Fläche des Dreiecks. Es seien A, B, C die Ecken, D die Mitte der Seite BC, S der Massenmittelpunkt, auf AD so gelegen, dass $AS = 2 \,.\, SD$. Zwei Axen Sx, Sy, von denen die erste mit der Medianen AD zusammenfällt, während die zweite mit BC parallel läuft, erfüllen die Bedingung $\int xy\,dm = 0$. Daher sind sie conjugirte Diameter der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wo $a^2 = \frac{1}{6}p^2$, $b^2 = \frac{1}{6}q^2$ sich findet, wenn $AS = p$, $DB = q$ gesetzt wird. Die dieser Ellipse $\frac{x^2}{3p^2} + \frac{y^2}{4q^2} = \frac{1}{24}$ ähnliche $\frac{x^2}{3p^2} + \frac{y^2}{4q^2} = \frac{1}{3}$ geht durch die Ecken. Ihre Hauptaxen sind die Hauptcentralaxen.

§. 7. Methode der Differentiation. Die Trägheitsmomente für unendlich dünne Schalen und Flächen kann man durch Differentation aus bekannten Trägheitsmomenten für körperliche Gebilde, die von unendlich dünnen Flächenzonen und Linien auf gleiche Weise aus Trägheitsmomenten für Flächenräume ableiten.

1. Das Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoids (a, b, c) von constanter Dichte ϱ in Bezug auf die Axe a ist $\frac{4}{15}\pi\varrho abc(b^2 + c^2)$. Aendert sich das Ellipsoid, jedoch so, dass seine neue Oberfläche die ursprüngliche Oberfläche nicht schneidet, so ist das Trägheitsmoment der Masse der zwischen beiden Oberflächen enthaltenen elliptischen Schaale in Bezug auf dieselbe Axe die Differenz dieses Ausdrucks und wenn die Schaale unendlich dünn ist, das Differential desselben. Dies Differential ist nach dem Parameter zu nehmen, von welchem die Aenderung der in dem Ausdrucke vorkommenden Grössen a, b, c, ϱ abhängen. Ist z. B. das geänderte Ellipsoid dem ursprünglichen ähnlich und ϱ constant, so seien die Axenverhältnisse $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ d. h. $b = ap$, $c = aq$ und also a der Parameter, durch welchen b und c ausgedrückt sind. Dann ist $\frac{4}{15}\pi\varrho pq(p^2 + q^2)a^5$ das Trägheitsmoment des Ellipsoids und $\frac{4}{3}\pi\varrho pq(p^2 + q^2)a^4 da$ das der unendlich dünnen Schaale. Zugleich ist die Masse des Ellipsoids $\frac{4}{3}\pi\varrho pqa^3$ und die der Schaale $4\pi\varrho pqa^2 da$. Daher geht das Trägheitsmoment der unendlich dünnen Schaale über in $\frac{1}{3}m(b^2 + c^2)$, wenn m die Masse derselben ist. Dieser Ausdruck gilt auch für die ellipsoidische Fläche, wenn die Masse m gleichförmig über sie ausgebreitet ist. Ebenso gross ist das Trägheitsmoment des umschriebenen rechtwinkligen parallelepipedischen Körpers.

2. Wenn das Trägheitsmoment für ein homogenes Ellipsoid von constanter Dichte ϱ wie unter Nr. 1 von einem Parameter a abhängt und mit $\varrho \,.\, \varphi(a)$ bezeichnet wird, so ist $\varrho\varphi'(a)da$ das Trägheitsmoment für die unendlich dünne Schaale. Lässt man nun die Dichte ϱ variiren mit a, so dass sie für jedes von dem speciellen Werthe von a abhängige Ellipsoid constant ist, so stellt $\int_{a_1}^{a_2} \varrho\varphi'(a)da$ das Trägheitsmoment einer elliptischen Schicht dar, welche von zwei Ellipsoiden begrenzt wird, die den Werthen a_1, a_2 des Parameters a entsprechen.

3. Zu finden das Trägheitsmoment eines heterogenen Ellipsoids für eine Axe desselben, wenn die Dichte auf concentrischen ähnlichen Schichten constant ist und dem Abstand des Schnittpunktes der Axe mit der Schicht vom Mittelpunkte proportional variirt.

Einige Literatur über die Trägheitsmomente.

Binet, Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie. Journ. de l'École polytechnique, Cah. XVI.

Thomson, W., On the principal axes of a solid body. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. I, pp. 127, 195 und **Cayley**, Note on a geometrical theorem contained in the prec. paper, Vol. I, p. 207.

Townsend, R., On the principal axes of a body, their moment of inertia and distribution in space. Cambr. and Dublin Math. Journal Vol. I, p. 209; II, pp. 19, 140, 241.

Guilbert, Note sur les axes principaux des corps. Journal de l'École polytechn. Cah. XXV.

Hâton de la Goupillière, Mémoire sur une théorie nouvelle de la geométrie des masses. Journ. de l'École polytechn. Cah. XXXVII.

Moigno, Leçons de Mécanique analytique. Statique. Paris 1868.

Jullien, Problèmes de Mécanique rationelle. 2me édit. Paris 1866.

Reye, Beitrag zur Lehre von den Trägheitsmomenten. Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, X. B., S. 433.

Reye, einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren. Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure B. XIX, S. 401.

Schlömilch, Ueber die Bestimmung der Massen und Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. Abhandlungen der math.-phys. Classe der königl. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. II, S. 377 (1855).

Somoff, theoretische Mechanik (russisch). Vol. II, Einleit. in die Statik und Dynamik, C.

Somoff, Mémoire sur les axes et les moments principaux des corps homogènes. Bullet. de la classe phys.-math. de l'Acad. de St. Pétersbourg T. XII. No. 12. 13. (1857).

Routh, Elementary treatise on the dynamics of a System of rigid bodies. 3. Edit. London 1877.

Zweiter Theil.

Geometrie der Bewegung und Theorie der Bewegungszustände.

(Kinematik.)

I. Capitel.

Uebergang des Systems aus einer Lage in eine andere. Rotation, Translation und Schraubenbewegung des unveränderlichen Systems.

§. 1. Die Geometrie der Bewegung betrachtet die Bewegung eines Punktes oder Systems bloss als eine Aenderung des Ortes und untersucht die Art und Weise, in welcher dieselbe erfolgt oder erfolgen kann.

Die continuirliche Folge aller Lagen, welche ein Punkt während seiner Bewegung einnimmt, bildet seine Bahn; sie ist geradlinig oder krumm. Im ersten Falle nennt man sie zugleich die Richtung der Bewegung und unterscheidet in ihr einen doppelten Sinn, je nachdem der beschreibende Punkt sich nach der einen oder der andern Seite hin bewegt. Ist die Bahn eine Curve, sei es eine ebene oder eine doppelt gekrümmte, so versteht man unter der Richtung der Bewegung in einem bestimmten Punkte der Bahn die Tangente in diesem Punkte. Da nämlich im Berührungspunkte der Tangente zwei aufeinanderfolgende Curvenpunkte zusammenfallen, so gibt sie die Richtung an, welche von dem einen zum anderen hinführt. Die Richtung der Bewegung ändert sich fortwährend bei der krummlinigen Bewegung, sie bleibt immer dieselbe bei der geradlinigen. Eine deutliche Vorstellung von der Erzeugung einer Curve durch Bewegung eines Punktes wird allein durch einen Grenzenübergang erreicht, welcher vom Vieleck durch fortgesetzte Einschaltung von Ecken zur Curve hinführt.

Bei der Bewegung eines Systems beschreiben dessen Punkte Linien; seine Linien erzeugen Flächen und auf diesen, wenn ihre aufeinanderfolgenden Lagen sich schneiden, gewisse Enveloppen, welche sie berühren; die Flächen des Systems umhüllen ebenso im Allgemeinen Enveloppenflächen, und ihre aufeinanderfolgenden Schnittlinien Enveloppenlinien. Die Bewegung des Systems ist bekannt, sobald die Bewegung seiner Elemente, insbesondere die seiner Punkte bekannt ist. In vielen Fällen ergibt sich aber vermöge des geometrischen Zusammenhanges der zum System verbundenen Punkte, Linien und Flächen die Bewegung des ganzen Systems und aller seiner Elemente, sobald die Bewegung einer gewissen Anzahl derselben ermittelt ist.

Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen des beweglichen Systems sind zwei Systeme, welche je nach der Art der Bewegung in einer gewissen geometrischen Verwandtschaft zu einander stehen; zwei Elemente derselben (Punkte, Linien, Flächen etc.), welche Lagen desselben beweglichen Elementes sind, heissen unter sich und diesem beweglichen Elemente homologe Elemente der Systeme. Die Stralen, welche die homologen Punkte beider Systemlagen verbinden, sind die Tangenten der Bahnen der Systempunkte und mithin die Richtungen ihrer Bewegung. Ist das bewegliche System unveränderlich, so ist die geometrische Verwandtschaft, in welcher beide Systemlagen stehen, die Congruenz; ist dasselbe veränderlich, so kann diese Verwandtschaft Aehnlichkeit, Collineation u. s. w. sein.

Die Geometrie der Bewegung des unveränderlichen Systems ist sorgfältig untersucht, die des veränderlichen Systems hat in jüngster Zeit wesentliche Fortschritte gemacht, nämlich in der Richtung, dass man die Bewegung solcher veränderlicher Systeme studirt hat, deren Veränderlichkeit durch eine jener geometrischen Verwandtschaften definirt werden kann, welche die heutige Geometrie bereits ausgebildet hat. Wir werden zunächst die Geometrie der Bewegung des unveränderlichen Systems entwickeln.

§. 2. Der Uebergang eines beweglichen unveränderlichen Systems Σ aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite Σ_2 ist abhängig von der gegenseitigen Lage der beiden einander congruenten Systeme Σ_1, Σ_2. Wir müssen daher vor allem die Lagenbeziehungen zweier congruenter Systeme kennen lernen, um aus ihnen die hier in Frage kommenden kinematischen Folgerungen ziehen zu können.

Jedes Element, Punkt, Gerade oder Ebene des Gesammtraumes, in welchem Σ_1 und Σ_2 vereinigt sich befinden, gehört diesen beiden Systemen zugleich als Element an; in ihm sind zwei Elemente beider Systeme vereinigt, jedoch so, dass diese vereinigten Elemente im Allgemeinen nicht homolog sind. So werden z. B. in einem Punkte P des Gesammtraumes ein Punkt A_1 von Σ_1 und ein Punkt A_2 von Σ_2 sich befinden, so wird in einer Geraden g eine Gerade a_1 von Σ_1 mit einer Geraden b_2 von Σ_2 vereinigt sein und wird eine Ebene ε die Ebenen α_1 und β_2 enthalten. Ein Element des Gesammtraumes aber, in welchem zwei homolge Elemente von Σ_1 und Σ_2 zusammentreffen, wollen wir ein Doppelelement von Σ_1 und Σ_2 nennen. Die Doppelelemente sind Doppelpunkte, Doppelgeraden, Doppelebenen etc. Mit der Bezeichnung „Doppelgerade" und „Doppelebene" ist aber nicht nothwendig ausgesprochen, dass in diesen Doppelgebilden auch

Doppelpunkte oder Doppelgeraden enthalten seien; ob dieselben Doppelgebilde niederer Art enthalten, oder nicht, bedarf einer besonderen Untersuchung.

Die verschiedenen Lagen, welche Σ_1 und Σ_2 gegen einanden haben können, werden durch die Existenz oder den Mangel von Doppelelementen charakterisirt und aus der Existenz gewisser Doppelelemente ergeben sich verschiedene Arten des Ueberganges des beweglichen Systems Σ aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2, nämlich diejenigen, bei welchen während der Bewegung gewisse Elemente von Σ fortwährend mit den Doppelelementen von Σ_1 und Σ_2 vereinigt bleiben. Auf diesem Wege wird die Möglichkeit der Bewegungen dargethan, welche als Rotation, Translation und Schraubenbewegung bezeichnet zu werden pflegen. Wir beginnen mit der Untersuchung der Doppelelemente der congruenten Systeme erster Stufe, der Punktreihen, Stralen- und Ebenenbüschel, um ihnen die der Systeme zweiter Stufe, der ebenen Systeme, der Stralen- und Ebenenbündel, so wie die der Systeme dritter Stufe, der räumlichen Punkt-, Ebenen- und Stralensysteme folgen zu lassen.

§. 3. Zwei congruente gerade Punktreihen $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, D_2 \ldots$ können in einer Geraden als ihrem gemeinsamen Träger auf zwei Arten vereinigt sein, nämlich so, dass sie in demselben, oder in entgegengesetztem Sinne verlaufen. In beiden Fällen sind im unendlichfernen Punkte des Trägers homologe Punkte vereinigt. Ausser diesem Doppelpunkte haben die Reihen bei entgegengesetzter Punktfolge nothwendig noch einen zweiten, im Endlichen gelegenen Doppelpunkt. Denn zwei bewegliche homologe Punkte, welche die Reihen durchlaufen, müssen des entgegengesetzten Sinnes wegen, nothwendig irgendwo zusammenfallen. Verlaufen die Reihen in gleichem Sinne, so existirt im Endlichen nicht nothwendig ein Doppelpunkt; ist ein solcher vorhanden, so sind alle Punkte des Trägers Doppelpunkte. Haben zwei congruente Punktreihen zwei Doppelpunkte im Endlichen, so verlaufen sie in gleichem Sinne und sind alle Punkte Doppelpunkte.

Zwei congruente Stralenbüschel $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$ und $a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots$ können in einer Ebene als ihrem gemeinsamen Träger auf doppelte Art concentrisch vereinigt werden, für entgegengesetzte und für gleiche Folge der homologen Stralen. Im ersten Falle gibt es zwei Doppelstralen. Denn zwei bewegliche homologe Stralen, welche die Büschel durchlaufen, treffen der entgegengesetzten Folge wegen irgendwo einmal und hierauf im weiteren Verlaufe nach einer Drehung um $\frac{1}{2}\pi$ zum zweitenmale zusammen. Die beiden Doppelstralen sind daher rechtwinklig zu einander. Sie halbiren die Winkel aller homologen Stralenpaare. Bei gleicher Stralenfolge gibt es nicht nothwendig Doppelstralen. Existirt aber ein solcher, so sind alle Stralen Doppelstralen. Haben zwei congruente concentrisch vereinigte Stralenbüschel zwei Doppelstralen, welche nicht rechtwinklig zu einander sind, so verlaufen sie in gleichem Sinne und sind alle Stralen Doppelstralen. Die beiden Büschel können in zwei Lagen, die um $\frac{1}{2}\pi$ von einander differiren, dieselben zwei Doppelstralen enthalten.

Aehnliches gilt von zwei congruenten coaxial vereinigten Ebenenbüscheln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \ldots$ Bei entgegengesetzter Folge der homologen Ebenen gibt es zwei zu einander rechtwinklige Doppelebenen, bei gleicher Folge keine oder lauter Doppelebenen. Haben die Büschel zwei nicht zu einander rechtwinklige Doppelebenen, so sind sie gleichen Sinnes und sind alle Ebenen Doppelebenen. Sie können in zwei um $\frac{1}{2}\pi$ von einander differirenden Lagen dieselben Doppelebenen haben.

§. 4. Zwei congruente ebene Systeme Σ_1, Σ_2 können auf zwei Arten in einer Ebene als ihrem gemeinsamen Träger vereinigt werden: gleichartig, wenn je zwei homologe Stralenbüschel dieselbe Stralenfolge zeigen, ungleichartig, wenn die Stralenfolge bei beiden entgegengesetzt ist. Durch Umwenden des einen ebenen Systems geht die eine Lage in die andere über. In beiden Fällen haben sie die unendlichferne Gerade zur Doppellinie; im ersten Falle enthält dieselbe zwei homologe Punktreihen gleichen Sinnes, im zweiten zwei homolge Punktreihen entgegengesetzten Sinnes.

Zwei vereinigte congruente ebene Systeme gleichartiger Lage haben stets mindestens einen Doppelpunkt. Denn irgend zwei homologe Punkte A_1, A_2 sind die Mittelpunkte homologer Stralenbüschel gleichen Sinnes. Dem Strale d_1 von A_1, welcher durch A_2 hindurchgeht (Fig. 53),

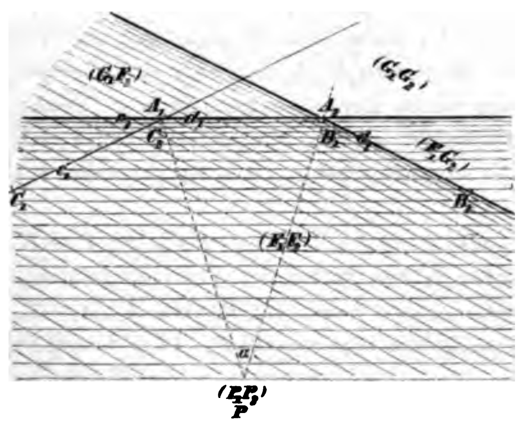

Fig. 53.

entspricht ein gewisser Stral d_2 von A_2. Jeder von diesen Stralen d_1, d_2 zerlegt das System, dem er angehört, in zwei Felder, d_1 nämlich Σ_1 in F_1, G_1 und d_2 das System Σ_2 in die diesen homologen Felder F_2, G_2. Beide

Stralen theilen die Gesammtebene so, dass zwei Paar Scheitelräume entstehen, von denen nur in dem einen homologe Theile der beiden Systeme übereinanderliegen, während das andere Paar nicht homologe Theile enthält. Wenn Doppelpunkte existiren, so können sie nur in dem ersteren Paar Scheitelräume liegen. Mit dem Punkte A_2 von Σ_2 ist ein gewisser Punkt B_1 von Σ_1 vereinigt; ihm entspricht ein gewisser Punkt B_2 auf d_2, da B_1 auf d_1 liegt und vermöge der Congruenz der Systeme ist $A_1 B_1 = A_2 B_2$. Ein Doppelpunkt $P(P_1, P_2)$ muss gleiche Abstände von $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ besitzen, da $\triangle P_1 A_1 B_1 \cong \triangle P_2 A_2 B_2$ sein muss; er muss daher auf derjenigen Halbirungslinie der Winkel von d_1, d_2 liegen, welche in den Scheitelraum fällt, in welchem homologe Systemtheile übereinanderliegen. Mit dem Strale d_1 fällt ein gewisser Stral c_2 von Σ_2 zusammen, ihm entspricht ein gewisser Stral c_1 des Büschels A_1 und mit A_1 ist ein Punkt C_2 vereinigt, dessen homologer C_1 auf c_1 so liegt, dass $A_1 C_1 = A_2 C_2$ ist. Aus denselben Gründen, wie vorher, muss der Doppelpunkt (P_1, P_2) auch auf derjenigen Halbirungslinie der Winkel $(c_1 c_2)$ liegen, welche dem Paar Scheitelräume angehört, welche homologe Punkte beider Systeme enthalten. Demnach muss der Doppelpunkt P der Schnittpunkt beider Halbirungslinien sein. Da zwei Gerade in der Ebene stets einen Punkt gemein haben, der übrigens auch ins Unendliche rücken kann, so folgt, dass die Systeme Σ_1, Σ_2 stets einen Doppelpunkt besitzen. Da $\triangle P A_1 B_1$ gleichschenklig, so kann P nur dann ins Unendliche fallen, wenn die Halbirungslinien der Winkel $(c_1 d_1)$, $(c_2 d_2)$ parallel werden, d. h. wenn d_1 und d_2 zusammenfallen. Die Büschel A_1, A_2 sind dann in Parallellage. Fällt P ins Unendliche, so haben Σ_1, Σ_2 die unendlich ferne Gerade zur Doppellinie voll lauter Doppelpunkten (§. 1.).

Die Punkte A_1, A_2, von welchen wir ausgingen, waren ein beliebiges Paar homologer Punkte, die Stralen d_1, d_2 sind daher ein beliebiges Paar homologer Geraden. Von den beiden Doppelschaaren Gerader, welche die Winkel der homologen Geradenpaare von Σ_1, Σ_2 halbiren, bildet daher die eine ein Paar concentrische Stralenbüschel mit dem Doppelpunkte P als gemeinsamem Mittelpunkt.

Der Doppelpunkt steht gleich weit ab von jedem Paar homologer Punkte. Errichtet man daher in den Mitten der Verbindungslinien (Sehnen) $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ irgend zweier Paare homologer Punkte A_1, A_2; B_1, B_2 Senkrechte, so ist ihr Schnittpunkt der Doppelpunkt P. Diese Construction wird in dem Falle unbrauchbar, dass beide Senkrechte zusammenfallen; sie ist im Uebrigen leicht zu ergänzen. (Siehe Fig. 54.)

Der Doppelpunkt ist der gemeinsame Mittelpunkt zweier concentrischer, congruenter Stralenbüschel gleicher Stralenfolge, deren Stralen ihn mit den homologen Punktepaaren beider Systeme verbinden. Er ist ebenso der gemeinsame Mittelpunkt zweier andrer solcher Büschel, deren Stralen zu den homologen Geradenpaaren senkrecht sind. Daraus folgt, dass alle Paare homologer Geraden der beiden Systeme gleiche Winkel mit einander bilden.

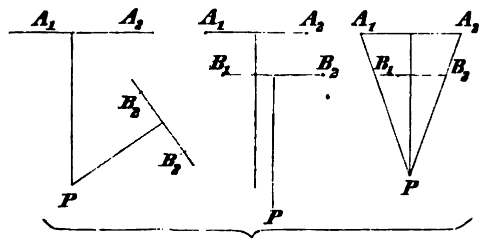

Fig. 54.

§. 5. Zwei homologe Stralen a_1, a_2 der gleichliegenden congruenten Büschel A_1, A_2 (Fig. 55.) bilden mit den Stralen d_1, d_2 gleiche Winkel $(a_1 d_1) = (a_2 d_2)$, in demselben Sinne gegen d_1, d_2 liegend. Ihr Schnittpunkt S bildet mit A_1, A_2 ein Dreieck, dessen Winkel

$$(S) = (a_2 d_1) - (a_1 d_1) = (a_2 d_2) + (d_2 d_1) - (a_1 d_1) = (d_2 d_1),$$

also für alle homologen Stralenpaare a_1, a_2 der Büschel constant ist. Daher ist der Ort der Schnittpunkte S aller solcher Paare ein Kreis, welcher durch A_1 und A_2 geht und den Stral d_2 in A_2 berührt. Dieser Kreis muss den Doppelpunkt $P(P_1 P_2)$ enthalten; denn $A_1 P_1$ und $A_2 P_2$ sind homologe Stralen von A_1, A_2. Aus demselben Grunde muss der Doppelpunkt sich auf einem Kreise finden, der durch B_1, B_2 geht und den Stral d_1 in B_1 berührt. Beide Kreise schneiden sich im Punkte $(A_2 B_1)$, welcher kein Doppelpunkt ist. Ihr zweiter Durchschnitt ist daher der Doppelpunkt P und folglich nur als einziger Punkt vorhanden, da die Kreise sich in keinem weiteren schneiden. Zugleich erhellt, dass die Schnittpunkte der homologen Stralen aller Paare homologer Stralenbüschel beider Systeme Σ_1, Σ_2 auf Kreisen liegen, welche durch den Doppelpunkt P hindurchgehen.

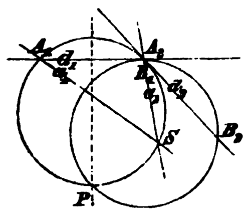

Fig. 55.

§. 6. **Haben die beiden congruenten Systeme Σ_1, Σ_2 gleichartiger Lage zwei Doppelpunkte $(P_1 P_2)$, $(Q_1 Q_2)$ im Endlichen, so sind alle Punkte Doppelpunkte.** Denn die Verbindungslinie derselben ist eine Doppellinie, welche nach §. 3 lauter Doppelpunkte enthält. Sie theilt Σ_1 und Σ_2 in homologe Partialsysteme F_1, G_1; F_2, G_2, so dass wegen der gleichartigen Lage von Σ_1 und Σ_2 die Systeme F_1, F_2 auf die eine, G_1, G_2 auf die andere Seite von ihr fallen. Wegen der Congruenz der Dreiecke $P_1 Q_1 X_1$ und $P_2 Q_2 X_2$, welche irgend zwei homologe Punkte X_1, X_2 mit den Doppelpunkten bilden, fallen alle Paare X_1, X_2 zusammen.

Die gegenseitige Lage der Systeme Σ_1, Σ_2 in der Gesammtebene ist bestimmt, wenn der Doppelpunkt $(P_1 P_2)$ und der Winkel α gegeben ist, den die homologen Geradenpaare mit einander bilden, welcher auch der Winkel ist, um welchen die homologen Stralen der beiden Stralenbüschel von einander abweichen, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Doppelpunkt ist. Indem man diesen Winkel variiren lässt, sieht man, dass es eine continuirliche Schaar mit Σ_1, Σ_2 congruenter Systeme Σ gleichartiger Lage gibt, welche sämmtlich paarweise denselben Doppelpunkt P besitzen und welcher Schaar Σ_1 und Σ_2 selbst angehören. Ein in der Ebene bewegliches, Σ_1 und Σ_2 congruentes System Σ kann daher diese Schaar von Systemen so durchlaufen und dadurch aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 so gelangen, dass sein dem Doppelpunkte homologer Punkt P fortwährend mit diesem vereinigt bleibt. Diese Bewegung heisst die Rotation des ebenen Systems Σ in der Ebene um P als Mittelpunkt; der Winkel α, welchen die Stralen des Punktes P aus der ersten Lage, welche sie in Σ_1 einnehmen, beschreiben, um die zweite Lage, welche sie in Σ_2 einnehmen, zu erlangen, wird die Amplitude der Rotation genannt. Der Uebergang des Systems Σ durch Rotation aus der ersten Lage Σ_1 in die zweite Lage Σ_2 kann in doppeltem Sinne erfolgen; für einen auf die Ebene der Bewegung herabsehenden Punkt im Sinne der Uhrzeigerbewegung oder im umgekehrten Sinne. Die beiden zugehörigen Werthe der Amplitude α beider Rotationsarten ergänzen sich zu 2π. Während der Rotation beschreiben die Punkte und umhüllen die Geraden des beweglichen Systems Σ in der Ebene der Bewegung Kreisbogen um den Mittelpunkt, proportional ihrem Abstande von diesem. Der Punkt P allein ruht und jede seiner Geraden umhüllt ihn. Man bemerke den Unterschied zwischen dem Rotationspunkte P und dem Doppelpunkte $(P_1 P_2)$. Ersterer ist Punkt des beweglichen Systems, letzterer ist ein fester Punkt in der Gesammtebene, mit welchem jener während der Rotation zusammenfällt und in ihm ruht.

Fällt der Doppelpunkt von Σ_1 und Σ_2 ins Unendliche, so sind alle homologen Geradenpaare dieser Systeme parallel und sind alle Abstände homologer Punktpaare gleich. Die continuirliche Schaar congruenter Systeme Σ, welchen derselbe unendlich ferne Doppelpunkt zugehört, und welche auch Σ_1, Σ_2 enthält, ist so gelegen, dass alle ein und demselben Punkte X_1 von Σ_1 homologen Punkte X auf der Geraden $X_1 X_2$ sich finden. Das bewegliche System Σ kann daher aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 dadurch gelangen, dass alle seine Punkte parallele und gleiche Strecken in demselben Sinne beschreiben. Eine solche Bewegung heisst eine Translation. Sie kann als ein specieller Fall der Rotation angesehen werden, nämlich als der Grenzfall, dass der Mittelpunkt der Rotation ins Unendliche rückt und die Amplitude verschwindet, jedoch so, dass das Product aus dem Abstande der Punkte vom Mittelpunkte und dem doppelten Sinus derselben Amplitude sich einem festen Werthe nähert, nämlich der Verbindungsstrecke der homologen Punkte von Σ_1 und Σ_2.

Haben zwei in einer Ebene vereinigte congruente Systeme drei nicht in gerader Linie liegende Doppelpunkte $(P_1 P_2)$, $(Q_1 Q_2)$, $(R_1 R_2)$ in endlichen Abständen von einander, so sind alle Punkte Doppelpunkte und haben die Systeme gleichartige Lage. Denn die Verbindungslinien der drei Doppelpunkte sind Doppellinien, jede mit zwei Doppelpunkten endlichen Abstandes, also lauter Doppelpunkten und jede Gerade der Ebene schneidet sie als Doppellinie mit lauter Doppelpunkten. Jeder der gegebenen Doppelpunkte ist Mittelpunkt zweier concentrischer Stralenbüschel mit zwei Doppelstralen und da im Dreieck wenigstens zwei spitze Winkel sind, so sind sicher an zweien dieser Paare von Stralenbüscheln die Doppelstralen unter spitzen Winkeln gegeneinander geneigt, mithin sind diese Büschelpaare und folglich alle übrigen gleichliegend. (§. 3.)

Aus den Betrachtungen dieses und der beiden vorhergehenden Paragraphen ziehen wir das wichtige kinematische Resultat:

Ein ebenes, in der Ebene bewegliches veränderliches System Σ kann aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite ihr gleichartige Lage Σ_2 durch Rotation um einen bestimmten seiner Punkte übergeführt werden. Die Lage dieses Punktes in der Ebene der Bewegung ist der Schnittpunkt der beiden Perpendikel, welche man in den Mitten der Verbindungslinien $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ von zwei Paar homologen Punkten A_1, A_2; B_1, B_2 von Σ_1, Σ_2 errichtet; die Amplitude α der Rotation ist der Winkel, welchen zwei homologe Gerade von Σ_1 und Σ_2 mit einander bilden. Die Rotation geht in eine Translation über, wenn der Rotationsmittelpunkt ins Unendliche fällt. Das bewegliche System ist aus der ersten in die zweite Lage überhaupt gelangt, sobald zwei seiner Punkte aus ihrer ersten Lage in ihre zweite Lage gelangt sind und es ist insbesondere durch die Rotation (oder Translation) dahin gelangt, sobald dies mit einem seiner Punkte ausser dem Mittelpunkte der Rotation der Fall ist.

§. 7. Zwei vereinigte congruente ebene Systeme Σ_1, Σ_2 ungleichartiger Lage haben immer eine Doppellinie. Zwei homologe Punkte A_1, A_2 sind nämlich die Mittelpunkte congruenter homologer Stralenbüschel entgegengesetzten Sinnes. Denkt man sich einen dritten, ihnen congruenten Stralenbüschel A' concentrisch mit A_1, dessen Stralen den Stralen von A_2 parallel sind, so haben A_1 und A' nach §. 4 zwei zu einander rechtwinklige Doppelstralen, welche die Winkel der homologen Stralenpaare halbiren. Daher haben die Büschel A_1, A_2 zwei Paar homologe Parallelstralen g_1, g_2; h_1, h_2, mit welchen die Halbirungslinien der Winkel $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, ... parallel laufen, welche die homologen Stralen a_1, a_2; b_1, b_2; ...

von A_1 und A_2 mit einander bilden. Man sieht leicht, dass, wenn die homologen Punktreihen, welche auf den Parallelstralen g_1, g_2 liegen, in demselben Sinne verlaufen, die homologen Punktreihen der Parallelstralen h_1, h_2 entgegengesetzten Sinn besitzen und umgekehrt. Wählt man irgend ein Paar andere Büschel B_1, B_2, so gilt dasselbe. Auch sie haben zwei Paar homologe Parallelstralen, welche den Halbirungslinien der Winkel parallel sind, welche die homologen Stralenpaare dieser Büschel mit einander bilden. Nun sind aber die Stralen A_1B_1, A_2B_2 sowohl homologe Stralen der Büschel A_1, A_2, als auch homologe Stralen von B_1, B_2; daher sind die Parallelstralen von B_1, B_2 den Halbirungslinien der Winkel der homologen Stralen von A_1, A_2 und mithin den Parallelstralen von A_1, A_2 selbst parallel. Hieraus ergibt sich, dass es in zwei vereinigten congruenten ebenen Systemen ungleichartiger Lage zwei Paar homologer Parallelstralenbüschel gibt, welche zu einander rechtwinklig sind, d. h. dass es zwei zu einander rechtwinklige Schaaren von Parallellinien in Σ_1 gibt, denen in Σ_2 zwei Schaaren von Parallellinien entsprechen und zwar so, dass jeder Schaar von Σ_1 die ihr homologe Schaar von Σ_2 selbst parallel ist. Die Richtungen dieser beiden Schaaren sind die Richtungen der Halbirungslinien der Winkel aller homologen Paare von Geraden der beiden Systeme. Es leuchtet ein, dass die homologen Parallelstralen von der Richtung der einen Halbirungslinien homologe Punktreihen gleichen Sinnes, die von der Richtung der andern Halbirungslinien homologe Punktreihen entgegengesetzten Sinnes enthalten. Nehmen wir zwei homologe Parallelstralen, deren Punktreihen in entgegengesetztem Sinn verlaufen. Durch die homologen Punkte dieser Reihen gehen homologe Parallelstralen der andern Schaar, für welche die Punktreihen gleichen Sinn besitzen. Daher bilden die homologen Parallelstralen dieser Schaar zwei homologe Parallelstralenbüschel entgegengesetzter Stralenfolge. In dieser Schaar findet sich daher ausser der unendlich fernen Geraden noch eine Doppellinie im Endlichen. Durch die homologen Punkte zweier Parallelstralen dieser Schaar, deren Punktreihen gleichen Sinn besitzen, gehen die homologen Parallelstralen der anderen Schaar hindurch. Diese Schaar besteht daher aus zwei Parallelstralenbüscheln gleicher Stralenfolge und besitzt die unendlich ferne Gerade als Doppellinie, im Allgemeinen aber weiter keine Doppellinie. Hat sie aber noch eine weitere solche, so sind alle ihre Stralen Doppellinien. Wir folgern aus dem Gesagten, dass in zwei ebenen congruenten Systemen ungleichartiger Lage in der Schaar homologer Parallelstralen gleicher Folge der auf ihnen befindlichen Punktreihen stets eine Doppellinie sich findet, w. z. b. w. Diese Doppellinie theilt die Gesammtebene in zwei Felder, deren homologe Punkte auf entgegengesetzten Seiten von ihr liegen. Daher können etwaige Doppelpunkte der Systeme Σ_1, Σ_2 nur in dieser Doppellinie liegen. Da sie aber homologe Punktreihen gleichen Sinnes enthält, so folgt, dass in ihr ausser dem unendlichfernen Punkte nicht nothwendig noch ein Doppelpunkt im Endlichen existirt, dass aber, wenn ein solcher vorhanden ist, alle Punkte der Doppellinie Doppelpunkte sind. Tritt dieser Fall ein, so fallen alle Paare homologer Parallelstralen der Schaar entgegengesetzten Sinnes ihrer Punktfolge zusammen und haben je zwei homologe Punkte beider Systeme symmetrische Lage gegen die Doppellinie, d. h. ihre Verbindungslinie ist senkrecht zur Doppellinie und sie selbst liegen auf entgegengesetzten Seiten in gleichem Abstande von ihr.

Die gegenseitige Lage der Systeme Σ_1, Σ_2 in der Gesammtebene ist bestimmt, sobald die Doppellinie und der Abstand der homologen Punktpaare in ihr gegeben ist. Ein mit den Systemen congruentes bewegliches System Σ kann aus der Lage Σ_1 in die zu Σ_2 symmetrische Lage durch eine Translation gelangen, während welcher die der Doppellinie beider Systeme entsprechende Gerade von Σ stets mit dieser vereinigt bleibt. Das System Σ kann aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 gelangen, wenn es, nachdem es die ebenerwähnte Translation erlitten hat, um die Doppellinie um π umgewendet wird oder erst umgewendet wird und dann die Translation erleidet.

Wendet man Σ in der Lage Σ_1 um irgend eine Gerade um π um, so geht die ungleichartige Lage gegen Σ_2 in die gleichartige über, Σ erlangt mit Σ_2 einen Doppelpunkt und kann durch Rotation um ihn in die Lage Σ_2 übergeführt werden.

§. 8. Zwei congruente concentrische Stralenbündel Σ_1, Σ_2 haben immer mindestens einen Doppelstral und eine zu diesem rechtwinklige Doppelebene. Denn irgend zwei homologe Stralen a_1, a_2 sind die Axen homologer Ebenenbüschel. Der Ebene δ_1 von a_1, welche durch a_2 hindurchgeht, entspricht eine gewisse Ebene δ_2 von a_2. Diese Ebenen zerlegen das Gesammtbündel, in welchem Σ_1, Σ_2 vereinigt sind, in zwei Paar Scheitelräume um a_2 als Axe; nur in einem dieser Paare sind homologe Theile der concentrischen Stralenbündel über einander gelagert und nur in diesem kann es also möglicherweise Doppelstralen geben. Mit dem Strale a_2 fällt ein gewisser Stral b_1 des ersten Bündels zusammen, dessen homologer Stral b_2 auf der Ebene δ_2 so liegt, dass die Winkel $(a_2 b_2) = (a_1 b_1)$ sind. Wenn ein Doppelstral $p(p_1, p_2)$ existirt, so muss er mit a_1, b_1 und mit a_2, b_2 congruente pyramidale Räume bestimmen; er kann daher nur auf derjenigen von den beiden Halbirungsebenen der Flächenwinkel $(\delta_1 \delta_2)$ liegen, welche in die Scheitelräume fällt, in welchen sich homologe Theile überhaupt finden. Mit der Ebene δ_1 fällt eine gewisse Ebene γ_2 von a_2 zusammen, welcher eine Ebene γ_1 von a_1 homolog ist. Aus denselben Gründen muss ein Doppelstral in die eine der Halbirungsebenen der Flächenwinkel $(\gamma_1 \gamma_2)$, an a_1 liegend, fallen. Die beiden Halbirungsebenen von $(\gamma_1 \gamma_2)$ und $(\delta_1 \delta_2)$, welche hier in Frage kommen, haben aber nur einen einzigen Stral gemein. Es muss daher einen Doppelstral geben.

Da im Doppelstrale p zwei homologe Stralen p_1, p_2 zusammenfallen, so fallen vermöge der Congruenz der Stralenbündel in der zu ihm senkrechten Ebene des Gesammtbündels zwei homologe Ebenen von Σ_1, Σ_2 zusammen.

Die Stralen a_1, a_2 waren ein beliebiges Paar homologer Stralen, die Ebenen δ_1, δ_2 sind also auch ein beliebiges Paar homolger Ebenen. Von den beiden Schaaren Ebenen, welche die Winkel der homologen Ebenenpaare beider Bündel halbiren, läuft also die eine durch den Doppelstral der Bündel.

Der Doppelstral bildet gleiche Winkel mit jedem Paare homologer Stralen. Die Ebenen, welche die Winkel der homologen Stralenpaare rechtwinklig halbiren, gehen daher durch den Doppelstral. Zwei solche Halbirungsebenen liefern daher denselben.

Der Doppelstral ist die gemeinsame Axe zweier (congruenter) homologer Ebenenbüschel der beiden Stralenbündel Σ_1, Σ_2. Dieselben haben gleichen Sinn, weil im Gegenfalle die Bündel symmetrisch gleich und nicht congruent sein könnten. Ihre homologen Ebenen bilden gleiche Winkel mit einander.

§. 9. Haben zwei congruente concentrische Stralenbündel Σ_1, Σ_2 zwei nicht zu einander rechtwinklige Doppelstralen, so sind alle Stralen Doppelstralen. Denn die Ebene der Doppelstralen ist eine Doppelebene mit zwei concentrischen Stralenbüscheln, deren sämmtliche Stralen nach §. 3. Doppelstralen sind und welche gleichen Sinn besitzen. Je zwei homologe Stralen der Bündel fallen in einen Doppelstral zusammen, weil sie mit den gegebenen Doppelstralen congruente pyramidale Räume bilden.

Die gegenseitige Lage der Stralenbündel Σ_1, Σ_2 ist bestimmt, sobald der Doppelstral und der Winkel gegeben ist, welchen die homologen Ebenenpaare der beiden Ebenenbüschel mit einander bilden, deren gemeinschaftliche Axe der Doppelstral ist. Lassen wir diesen Winkel variiren, so erhellt, dass es eine continuirliche Schaar congruenter concentrischer Stralenbündel mit gemeinsamem Doppelstrale für alle Paare unter ihnen gibt, welcher Schaar die gegebenen Bündel Σ_1, Σ_2 selbst angehören und dass ein bewegliches ihnen congruentes Stralenbündel Σ aus der ersten Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 übergehen kann, so dass die Gerade, welche dem Doppelstral entspricht, fortwährend mit ihm vereinigt bleibt. Dieser Uebergang des Stralenbündels Σ aus der ersten in die zweite Lage heisst die Rotation desselben und die Gerade, welche dabei mit dem Doppelstral vereinigt bleibt, die Axe derselben, sowie der Winkel, welchen eine beliebige Ebene um diese Axe beschreibt, die Amplitude der Rotation. Die Rotation kann in doppeltem

Sinne erfolgen; die diesem doppelten Sinne entsprechenden Amplituden ergänzen sich zu 2π. Die Ebene welche der Doppelebene von Σ_1, Σ_2 entspricht, rotirt nach §. 6. in der Doppelebene um die gleiche Amplitude und den gemeinsamen Mittelpunkt der beiden Bündel Σ_1, Σ_2 als Mittelpunkt der Rotation.

§. 10. Zwei congruente concentrische Ebenenbündel haben stets mindestens eine Doppelebene und einen zu ihr senkrechten Doppelstral. Der Beweis hiefür ist nicht wesentlich von dem des vorigen Paragraphen verschieden, sowie der Satz selbst nur der reciproke zu dem dortigen Satze und mit ihm im Grunde identisch ist. Es ist nützlich, diese Betrachtungen durchzuführen, die an sich keine Schwierigkeiten bieten und kaum mehr, als die Vertauschung der Worte „Stral" und „Ebene" erfordern.

Der Inhalt von §§. 8. 9. 10. liefert mit den kinematischen Satz:

Ein bewegliches unveränderliches Stralen- oder Ebenenbündel Σ kann aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite Σ_2 durch Rotation um einen bestimmten Stral übergeführt werden. Die Lage dieses Strales im Raume ergibt sich als die Schnittlinie zweier Ebenen, welche die Winkel zweier Paare homologer Stralen von Σ_1 und Σ_2 rechtwinklig halbiren. Sie ist der Doppelstral der beiden congruenten Bündel Σ_1, Σ_2 und die Rotationsaxe ist der diesem in Σ entsprechende Stral. Die Amplitude der Rotation ist der Winkel, welchen die homologen Ebenen der Doppellinie mit einander bilden. Das Stralenbündel Σ ist überhaupt aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 gelangt, sobald zwei seiner Stralen aus ihrer ersten Lage in die zweite gelangt sind; es ist durch Rotation dahin gelangt, sobald dies mit einem seiner Stralen der Fall ist.

Hinsichtlich der Bedeutung der Rotationsaxe gegenüber der Doppellinie der Bündel Σ_1, Σ_2 gilt Aehnliches wie in §. 6. hinsichtlich des Rotationsmittelpunktes.

§. 11. Beschreibt man um den gemeinsamen Mittelpunkt der Bündel Σ_1, Σ_2 eine Kugelfläche, so bestimmen die Bündel auf ihr zwei congruente sphärische Systeme, in welchen jeder Stral eines Bündels durch einen Punkt, jede Ebene durch einen Hauptkreis, jeder Winkel zweier Stralen durch einen Hauptbogen und jeder Winkel zweier Ebenen durch den Winkel zweier Hauptbogen vertreten wird. Der bewegliche Stralenbündel Σ bestimmt ein den beiden ebengenannten congruentes auf der Kugelfläche bewegliches System.

Man kann daher den vorigen Satz auch als einen Satz über sphärische Systeme aussprechen, nämlich:

Ein unveränderliches sphärisches, auf der Kugelfläche bewegliches System Σ kann aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite

Lage Σ_2 stets durch Rotation um einen bestimmten Durchmesser der Kugel gelangen. Dieser Durchmesser trifft die Kugelfläche in den Schnittpunkten zweier Hauptkreise, welche man in den Mitten derjenigen Hauptbogen senkrecht zu ihnen errichten kann, welche zwei Paar homologe Punkte der congruenten sphärischen Systeme Σ_1, Σ_2 verbinden. Das sphärische System Σ ist in seine neue Lage gelangt, sobald zwei seiner Punkte in ihre neuen Lagen gelangt sind; es ist insbesondere durch die Rotation dahin gelangt, sobald dies mit einem seiner Punkte erfolgt ist.

§. 11. Zwei congruente räumliche Systeme Σ_1, Σ_2 besitzen immer eine Doppellinie. Irgend zwei homologe Punkte A_1, A_2 sind nämlich die Mittelpunkte homologer congruenter Stralenbündel. Man denke sich einen dritten, diesen congruenten, mit A_2 concentrischen und zu A_1 parallel liegenden Bündel A_2'. A_2 und A_2' haben nach §. 8. einen Doppelstral $(h_2 h_2')$, sowie eine zu diesen rechtwinklige Doppelebene $(\varepsilon_2 \varepsilon_2')$ und mithin A_1, A_2 ein Paar homologe Parallelstralen h_1, h_2 und ein Paar hiezu rechtwinklige homologe Parallelebenen ε_1, ε_2. Die homologen Punktreihen auf h_1, h_2 verlaufen entweder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne. Nehmen wir zunächst an, sie verlaufen in gleichem Sinne. Die Ebenenpaare, welche in den homologen Punkten dieser Reihen zu den Parallelstralen h_1, h_2 rechtwinklig sind, sind homologe Ebenen und die Geraden, welche in homologen Punkten eines Paares solcher Ebenen zu diesen senkrecht sind, homologe Geraden der Systeme Σ_1, Σ_2. Hieraus erhellt, dass in beiden Systemen ein Paar homologe Parallelstralenbündel, denen die Stralen h_1, h_2 und ein Paar zu ihnen rechtwinkliger Ebenenbüschel existiren, denen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ angehören. Die Parallelstralenbündel haben denselben unendlich fernen Punkt zum gemeinsamen Scheitel, die Parallelebenenbüschel haben eine gemeinschaftliche unendlich ferne Axe, welche senkrecht ist zur Richtung der Parallelstralenbündel. Durch jedes Paar homologer Punkte geht ein Paar homologer Parallelstralen, sowie ein Paar homologer Parallelebenen und die beiden Parallelstralenbündel projiciren die homologen ebenen Systeme der Parallelebenen auf einander rechtwinklig. So sind in der Ebene $(\varepsilon_2 \varepsilon_2')$ zwei congruente ebene Systeme vereinigt, von denen ε_2' die Projection von ε_1 ist und durch die homologen Punkte dieser Systeme gehen homologe Parallelstralen. Die Systeme ε_1, ε_2 und folglich auch ε_2 und ε_2' haben gleichartige Lage. Denn die Punktreihen auf h_1, h_2 und ebenso auf allen übrigen homologen Parallelstralen verlaufen in demselben Sinne und ihre Punkte bilden mit den Punkten von ε_1, ε_2 congruente (nicht symmetrisch gleiche) Figuren. Nun besitzen aber ε_2, ε_2' nach §. 6. einen Doppelpunkt. Durch diesen gehen daher zusammenfallende homologe Stralen der Parallelbündel, d. h. diese Parallelbündel und folglich auch die Systeme Σ_1, Σ_2 haben eine Doppellinie.

In dem zweiten der oben erwähnten Fälle verlaufen die parallelen Punktreihen auf h_1, h_2 in entgegengesetztem Sinne. Die Ebenen senkrecht zu ihnen, in den homologen Punkten errichtet, sind homolog und bilden zwei coaxiale Parallel-Ebenenbüschel entgegengesetzten Sinnes. Dieselben haben daher eine Doppelebene und in dieser sind zwei homologe ebene Systeme ε_1, ε_2 ungleichartiger Lage vereinigt, da homologe Punkte der Punktreihen, auf entgegengesetzten Seiten dieser Doppelebene gelegen, mit ihr congruente Figuren bilden. Nach §. 7. besitzen diese Systeme eine Doppellinie gleichen Sinnes der Folge ihrer Reihen homologer Punkte. Die zu ihr senkrechten Ebenen, welche durch die homologen Punkte gehen, bilden daher zwei homologe coaxiale Parallelebenenbüschel gleichartiger Lage. Daher ist die Doppellinie gemeinsame Axe homologer Ebenenbüschel gleichartiger Lage, denen die Doppelebene angehört und deren homologe Ebenen den Winkel π bilden. Ausser dem eben erwähnten Paar coaxialer Parallelebenenbüschel hat das System noch zwei andere solche, zu ihm und unter sich senkrechte Büschel der Art; sie gehen durch die beiden in §. 7 nachgewiesenen Parallelstralenbüschel der Doppelebene hindurch.

In der unendlich fernen Ebene des Gesammtraumes fallen homologe Ebenen von Σ_1, Σ_2 zusammen, welche einen Doppelpunkt haben. Durch ihn geht die Doppellinie hindurch. Die homologen Punktreihen auf der Doppellinie haben im Allgemeinen, da sie gleichen Sinnes sind, keinen weiteren Doppelpunkt als den unendlich fernen Punkt. Alle homologen Punktpaare derselben haben gleichen Abstand von einander; ebenso ist der Abstand aller Paare homologer Parallelebenen, welche in diesen Punktpaaren auf der Doppellinie senkrecht stehen, derselbe. Je zwei homologe Punkte der Systeme Σ_1, Σ_2 werden durch ein Paar solcher Ebenen auf die Doppellinie projicirt.

Hieraus folgt, dass die Abstände aller homologen Punktpaare der beiden Systeme gleiche Projectionen auf die Doppellinie haben. Ebenso leicht ergibt sich, dass die Doppellinie gleiche Neigung gegen jedes Paar homologer Geraden und gleiche Abstände von diesen hat.

§. 12. Die Doppellinie ist die gemeinsame Axe zweier homologer congruenter Ebenenbüschel gleichartiger Lage, deren homologe Ebenen durch die homologen Punkte und die homologen Parallelstralen der beiden Systeme Σ_1, Σ_2 hindurchgehen. Je zwei homologe Punkte und je zwei homologe Parallelstralen stehen gleichweit von dieser Axe ab; je zwei homologe Ebenen der Ebenenbüschel bilden denselben Winkel mit einander, denselben welchen homologe Stralen des Doppelpunktes der vereinigten Systeme ε_2, ε_2' bilden. Die Doppellinie kann im Unendlichen liegen, in welchem Falle die Ebenenbüschel Parallelebenenbüschel sind.

Die unendlich ferne gemeinsame Axe der beiden vorhin erwähnten Parallelebenenbüschel ist gleichfalls eine Doppellinie von Σ_1, Σ_2. Die Systeme haben also zwei Doppellinien, von denen die eine immer im Unendlichen liegt, während die andere im Allgemeinen dem endlichen Raume angehört, übrigens auch ins Unendliche fallen kann. Beide Doppellinien kreuzen sich rechtwinklig.

Die gegenseitige Lage der beiden Systeme hängt von zwei Elementen ab, nämlich von dem constanten Abstande h der homologen Punkte der Doppellinie, welche im Allgemeinen dem endlichen Raume angehört und dem constanten Winkel α, welche die homologen Ebenen dieser Doppellinie mit einander bilden.

Man kann sich eine continuirliche Schaar mit Σ_1 und Σ_2 congruenter Systeme denken, welche mit diesen die Doppellinie unter gleicher Folge der homologen Punktreihen und mit Σ_1 den Ebenenbüschel um die Doppellinie gemein haben. Für die Systeme dieser Schaar ist der Abstand τ der Punkte auf der Doppellinie von den homologen Punkten von Σ_1 veränderlich. Ebenso kann man sich eine zweite continuirliche Schaar solcher Systeme denken, welche ebenfalls die Doppellinie mit Σ_1 und Σ_2 und mit Σ_2 die Punktreihe der Doppellinie gemein haben. Für die Systeme dieser Schaar ist der Winkel ϑ der Ebenen des Ebenenbüschels um die Doppellinie mit den homologen Ebenen von Σ_2 veränderlich.

Ein bewegliches unveränderliches System, congruent mit Σ_1, Σ_2 kann daher aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 so gelangen, dass seine der Doppellinie von Σ_1, Σ_2 homologe Gerade fortwährend mit dieser Doppellinie vereinigt bleibt. Es erleidet dabei die Folge von zwei Bewegungen, sodass es zuerst eine Schaar Systemlagen durchläuft, für welche sich blos τ von 0 bis h ändert, während ϑ gleich Null bleibt, hierauf aber durch eine andere Schaar Lagen hindurchgeht, für welche $\tau = h$ bleibt, während ϑ von 0 bis α variirt. Die erste Bewegung ist eine Translation, wobei alle Punkte des beweglichen Systems parallele Strecken gleich h beschreiben. Durch dieselbe gelangen alle Ebenen des Parallelebenenbündels senkrecht zur Doppellinie mit ihren homologen Ebenen zur Coincidenz. Die zweite Bewegung ist für alle diese so vereinigten Ebenenpaare eine Rotation um die Punkte, welche auf der Doppellinie liegen, um die Amplitude α. Diese Bewegung, bei welcher alle Punkte einer Geraden ruhen, heisst **Rotation** um diese Gerade als Axe und der Winkel α, um welche sich ihre Ebenen umdrehen, ihre **Amplitude**.

Man sieht sofort, dass die Folge von Translation und Rotation umgekehrt werden kann. Wir erhalten hiermit den nichtigen kinematischen Satz:

Ein unveränderliches bewegliches System Σ kann aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite Σ_2 durch die willkührliche Aufeinanderfolge einer Rotation und einer zur Rotationsaxe paral-

lelen Translation übergehen. Die Axe der Rotation fällt in die Doppellinie von Σ_1, Σ_2 und ihre Amplitude ist gleich dem Winkel α, welchen die Paare homologer Ebenen von Σ_1, Σ_2, welche der Doppellinie parallel sind, mit einander bilden; die Strecke, um welche die Translation erfolgt, ist die gemeinsame Projection h der Abstände aller homologen Punktpaare von Σ_1, Σ_2 auf die Doppellinie. Die Rotation kann in doppeltem Sinne erfolgen und so die Amplitude zwei Werthe haben, welche sich zu 2π ergänzen.

Während der Translation ändert sich der Abstand τ der homologen Punkte von Σ und Σ_1 auf der Doppellinie continuirlich von Null bis h, während der Rotation der Winkel ϑ homologer Ebenen der Doppellinie von Σ und Σ_1 von Null bis α. Das System Σ kann aber auch auf unendlich viele andere Arten aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 übergehen, so dass die der Doppellinie homologe Gerade mit der Doppellinie vereinigt bleibt. Es durchläuft dann eine continuirliche Schaar von Systemen, von denen jedes einem bestimmten Werthsysteme (τ, ϑ) angehört. Alle diese Bewegungen heissen Schraubenbewegungen, weil die Systempunkte schraubenartige Linien um die Doppellinie beschreiben. Von der besonderen Abhängigkeit, welche man zwischen τ und ϑ festsetzt, hängt die individuelle Natur der Schraubenbewegung ab. Für den Fall, dass $\frac{\tau}{\vartheta}$ eine Constante $\frac{h}{\alpha}$ ist, beschreiben die Systempunkte gewöhnliche Cylinderschraubenlinien.

Die Grösse h der Translation und die Amplitude α der Rotation nennt man die Translation und die Amplitude der Schraubenbewegung; die der Doppellinie in Σ entsprechende Gerade, welche mit ihr vereinigt bleibt, die Axe derselben.

Ein unveränderliches bewegliches System Σ kann aus einer Lage Σ_1 in eine Lage Σ_2 durch eine Schraubenbewegung übergehen. Die Axe derselben ist die Gerade von Σ, welche der Doppellinie von Σ_1 und Σ_2 entspricht, die Translation h und die Amplitude α sind der Abstand homologer Punkte und der Winkel homologer Ebenen der Doppellinie.

§. 13. Wir haben im Vorhergehenden die allgemeinste Lage vorausgesetzt, welche die Systeme Σ_1 und Σ_2 gegen einander haben können. Sie hatten kein Paar homologer Elemente gemein. Das bewegliche System Σ hat daher in der Lage Σ_1 auch kein Element mit Σ_2 gemein. Durch die Translation wurden die Punktreihen auf der Doppellinie zur Coincidenz gebracht, durch die Rotation um sie die Punkte der vereinigten Ebenen senkrecht zu ihr und damit die ganzen Systeme Σ und Σ_2. Haben die Systeme Σ_1 und Σ_2 einen Doppelpunkt, so haben sie auch eine Doppellinie und eine zu ihr senkrechte Doppelebene. Daher hat auch das bewegliche System Σ in der Lage Σ_1 mit Σ_1 und Σ_2 einen Doppelpunkt und eine durch diesen gehende Doppellinie (mit lauter Doppelpunkten) und eine gleichfalls durch ihn hindurchgehende Doppelebene gemein. Daher genügt eine Rotation um den Doppelstral, um Σ in die Lage Σ_2 überzuführen. Haben Σ_1 und Σ_2 einen Ebenenbüschel gemein, so genügt eine Translation parallel der Axe desselben, um Σ aus Σ_1 nach Σ_2 gelangen zu lassen. Hieraus sieht man, dass es auf unendlich vielen Arten möglich ist, Σ durch eine Folge von Translation und Rotation aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 zu bringen.

Denn ertheilt man Σ aus der Lage Σ_1 eine Translation gleich und parallel dem Abstande $A_1 A_2$ zweier homologer Punkte A_1, A_2 von Σ_1 und Σ_2, so gelangt dadurch der Punkt A von A_1 nach A_2 und hat das System Σ in der so erreichten Lage mit Σ_2 den Doppelpunkt $(A_1 A_2)$. Beide haben in derselben einen Doppelstral und eine Rotation um diesen genügt, um Σ in die Lage Σ_2 zu bringen. Da A_1, A_2 willkührlich wählbare homologe Punkte sind, so ist diese Ueberführung von Σ aus Σ_1 nach Σ_2 auf unendlich viele Arten möglich. Aus den Betrachtungen des §. 11 erhellt, dass die Folge der Translation und Rotation umkehrbar ist, dass die Amplitude aller dieser Rotationen dieselbe Grösse α hat und die Axen aller einander parallel sind. Die oben behandelte Folge von Translation und Rotation ist in der unendlichen Mannigfaltigkeit aller durch den Parallelismus der Translation mit der Rotationsaxe ausgezeichnet. Ihre Translation ist die kleinste von allen.

Weiter folgt, dass, wenn Σ_1, Σ_2 zwei Doppelpunkte besitzen, eine Rotation um die der Verbindungslinie der Doppelpunkte homologe Gerade genügt, um Σ von Σ_1 nach Σ_2 zu führen. Ebenso eine Translation, wenn Σ_1, Σ_2 zwei nicht zu einander rechtwinklige Doppelebenen haben.

Endlich fügen wir noch für zwei congruente räumliche Systeme mit drei gleichartigen Doppelelementen die beiden Sätze hinzu:

Haben zwei congruente Systeme Σ_1, Σ_2 drei nicht in gerader Linie liegende Doppelpunkte $(P_1 P_2)$, $(Q_1 Q_2)$, $(R_1 R_2)$ in endlichen Abständen von einander, so sind alle Punkte derselben Doppelpunkte. Denn zunächst sind die Verbindungslinien der drei Doppelpunkte drei Doppellinien und ist ihre Ebene eine Doppelebene gleichartiger Lage mit lauter Doppelpunkten (§. 6., S. 151). Homologe Punkte S_1, S_2 liegen auf derselben Seite der Doppelebene, weil sie mit den Doppelpunkten congruente (nicht symmetrisch gleiche) Tetraeder $P_1 Q_1 R_1 S_1$, $P_2 Q_2 R_2 S_2$ bilden; sie fallen zusammen, weil es auf ein und derselben Seite der Doppelebene nur einen Punkt gibt, welcher gegebene Abstände $P_1 S_1$, $Q_1 S_1$, $R_1 S_1$ von den drei Doppelpunkten hat. — Liegen die drei Doppelpunkte in gerader Linie, so sind alle Punkte dieser Linie Doppelpunkte, aber unter ihren Ebenenpaaren ist nicht nothwendig eine Doppelebene. Ist unter den Doppelpunkten ein unendlich ferner, so kann die Doppelebene derselben ungleichartiger Lage sein.

Haben zwei congruente Systeme Σ_1, Σ_2 drei nicht durch dieselbe Gerade gehende Doppelebenen $(\pi_1 \pi_2)$, $(\varkappa_1 \varkappa_2)$, $(\varrho_1 \varrho_2)$ welche sich in einem Punkte im Endlichen schneiden und nicht zu einander rechtwinklig sind, so sind alle Ebenen derselben Doppelebenen.

Jede der drei Doppellinien ist gemeinschaftliche Axe zweier congruenter homolger Ebenenbüschel mit zwei Doppelebenen, welche nicht zu einander senkrecht sind. Daher sind alle Ebenen dieser Ebenenbüschel Doppelebenen. Hieraus folgt, dass jede Gerade des Doppelpunktes, in welchem sich die Doppelebenen schneiden, Doppelstralen und alle Ebenen, die durch ihn hindurchgehen, Doppelebenen sind. Er ist daher der gemeinsame Mittelpunkt zweier concentrischer Stralen- oder Ebenenbündel, welche mit allen Elementenpaaren zusammenfallen. Zwei homologe Ebenen der räumlichen Systeme müssen mit diesem Punkte congruente homologe Figuren bilden, daher kann er nicht zwischen ihnen liegen, sondern sie fallen beide auf dieselbe Seite von ihm, weil diese Figuren sonst symmetrisch gleich und nicht congruent würden. Wegen der durch die Congruenz bedingten Gleichheit der Dimensionen fallen sie daher zusammen. Da dies von allen homologen Ebenenpaaren gilt, so fallen die Systeme überhaupt mit allen homologen Elementenpaaren zusammen.

Schneiden sich die drei Doppelebenen in einer Geraden, so ist sie zwar eine Doppellinie, sie enthält aber nicht nothwendig Doppelpunkte. Sind die Doppelebenen zu einander senkrecht, so ist jede Schnittlinie zweier zwar eine Doppellinie, aber die Ebenenbüschel, deren gemeinsame Axe sie ist, können entgegengesetzte Lage haben, also nicht coincidiren.

Aus den beiden vorstehenden Sätzen folgt:

Ein bewegliches unveränderliches System Σ ist in eine bestimmte Lage Σ_2 gelangt, sobald drei seiner Punkte mit ihren homologen Punkten oder drei Ebenen mit ihren homologen Ebenen von Σ_2 vereinigt sind, vorausgesetzt dass die drei Punkte endliche Abstände haben und nicht in gerader Linie liegen und die drei Ebenen nicht zu einander rechtwinklig sind und nicht durch dieselbe Gerade hindurchgehen.

§. 14. Um die Axe der Schraubenbewegung zu finden, suchen wir zunächst ihre Richtung und Lage in dem Raume, in welchem sich Σ_1, Σ_2 befinden; ihre Lage im beweglichen Systeme ergibt sich dann unmittelbar vermöge des Entsprechens der Elemente von Σ mit denen von Σ_1 oder Σ_2. Von irgend einem Punkte O aus ziehen wir (Fig. 56) drei Strecken $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ geometrisch gleich den Abständen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ dreier Paare homologer Punkte A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 von Σ_1 und Σ_2, verbinden ihre

Endpunkte α, β, γ durch eine Ebene E und fällen auf diese die Normale OP. Die Richtung von OP ist die Richtung der Schraubenaxe, da $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ gleiche Projectionen OP in Bezug auf sie besitzen. Um ihre Lage als Doppellinie von Σ_1, Σ_2 zu finden, projicire man zwei der drei Abstände, z. B. A_1A_2, B_1B_2 auf eine zu der Richtung OP senkrechte Ebene, z. B. auf die Ebene E. Sind $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ die Projectionen derselben, so liefern die Perpendikel mp, np, welche man in ihren Mitten m, n auf sie in der Ebene errichten kann durch ihren Durchschnitt p einen Punkt der Schraubenaxe.

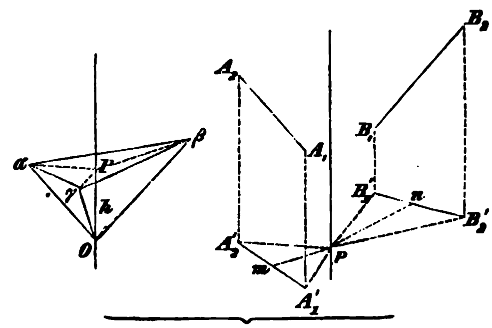

Fig. 56.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften derselben, nämlich dass alle Abstände homologer Punkte für sie gleiche Projectionen haben und die Axe alle Doppelpunkte der auf einander projicirten ebenen Systeme enthält, deren Ebenen zu ihr senkrecht sind. Die Strecke $OP = h$ ist die Translationsstrecke und der Winkel $A_1'pA_2' = \alpha$ ist die Amplitude der Schraubenbewegung.

Zur Bestimmung der Richtung der Axe sind drei Paar Elemente der beiden Systemlagen Σ_1, Σ_2, zur Bestimmung der Lage derselben von diesen, nachdem die Richtung gefunden, nur zwei erforderlich. Die vorstehende Construction rührt von Chasles her.

Wir haben hiebei, wie bisher überhaupt, das räumliche System vorzugsweise als Punktsystem angesehen und mit Punkten als gegebenen Elementen und deren Abständen operirt; man kann aber auch homologe Ebenenpaare oder homologe Stralenpaare verwenden, d. h. das räumliche System als Ebenensystem oder Stralensystem ansehen und dem entsprechend die Betrachtungen, insbesondere die Bestimmung der Schraubenaxe durchführen. Wir unterlassen dies, um nicht zu breit zu werden.

II. Capitel.

Aequivalenz der Bewegungen des unveränderlichen Systems.

§. 1. Zwei Bewegungen eines Systems heissen aequivalent, wenn beide das System aus einer gegebenen ersten Lage in dieselbe zweite Lage überzuführen vermögen. Mit Hülfe des Begriffs der Aequivalenz der Bewegungen kann der kinematische Inhalt des I. Cap. so ausgesprochen werden:

Alle Bewegungen eines unveränderlichen Systems Σ, welche dasselbe aus einer ersten Lage Σ_1 in eine zweite Lage Σ_2 überzuführen vermögen, sind aequivalent einer Schraubenbewegung, welche sich in besonderen Fällen auf eine Rotation oder eine Translation reduciren kann.

Eine Folge von zwei oder mehreren Bewegungen kann einer einzelnen Bewegung oder einer anderen Folge von Bewegungen aequivalent sein. Ist eine Folge von Bewegungen von bestimmter Ordnung derselben Folge in umgekehrter Ordnung aequivalent, so heissen die beiden Folgen vertauschbar. Auch kann die Folge zweier oder mehrerer Bewegungen aequivalent der Ruhe sein. So ist die Folge zweier Translationen entgegengesetzt gleicher Grösse oder zweier Rotationen um dieselbe Axe von entgegengesetzt gleicher Amplitude oder zweier Schraubenbewegungen um dieselbe Axe bei entgegengesetzt gleicher Amplitude und Translationsgrösse aequivalent der Ruhe. Ohne den Effect einer Bewegung zu ändern, kann man dem beweglichen System irgend welche andere Bewegungen ertheilen, welche der Ruhe aequivalent sind.

Eine Bewegung, welche einer Folge zweier oder mehrerer anderer Bewegungen aequivalent ist, heisst deren Resultante und sie selbst die Componenten dieser letzteren. Die Auffindung der Resultanten mit Hülfe der Componenten wird die Zusammensetzung und die Auffindung von Bewegungen, aus welchen eine gegebene Bewegung zusammengesetzt gedacht werden kann, die Zerlegung der Bewegung genannt. Die Zerlegung einer Bewegung ist im Allgemeinen eine unbestimmte Aufgabe, so lange nicht noch weitere Bestimmungen hinzutreten.

§. 2. Wir wollen die hauptsächlichsten Sätze über die Aequivalenz zweier Bewegungen eines unveränderlichen Systems mit einer dritten aufstellen, indem wir mit den einfachen Combinationen beginnen und successive zu complicirteren fortschreiten. Zugleich werden wir dabei die nothwendigsten Andeutungen über die gleichzeitige Verbindung mehrerer Bewegungen geben. Wir werden unsere Sätze zunächst für endliche Bewegungen aussprechen und später für unendlich kleine Bewegungen reduciren.

Eine Folge zweier Translationen eines Systems Σ ist aequi valent einer einzigen Translation, deren Grösse die geometrisch Summe dieser beiden ist. Die Ordnung der Translationsfolg ist willkührlich.

Gelangt nämlich Σ durch die Translationsfolge aus der Lage Σ_1 i die Lagen Σ_2 und Σ_3, so beschreibt ein beliebiger seiner Punkte, A (Fig. 57.) aufeinanderfolgend die Strecken $[A_1 A_2]$ und $[A_2 A_3]$ und jede andere Punkt beschreibt Strecken parallel, gleich und von gleichem Sinn mit diesen. Das System Σ bleibt während der ersten un zweiten Translation in Parallelstellung und ist daher die Lag Σ_3 parallel mit der Lage Σ_1. Daher kann Σ aus der Lage Σ direct nach Σ_3 durch eine Translation gelangen, deren Grösse $[A_1 A_3] = [A_1 A_2] + [A_2 A_3]$. Da die Summanden der geome trischen Summen vertauschbar sind, so ist es auch die Trans lationsfolge.

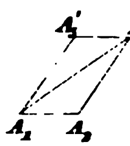

Fig. 57.

Sind die Richtungen der Translationen dieselben oder entgegengesetz gleich, so fällt die Richtung der resultirenden Translation mit ihrer ge meinschaftlichen Richtung zusammen und ihre Streckengrösse und ihr Sin wird durch die Summe oder Differenz $A_1 A_2 + A_2 A_3$ oder $A_1 A_2 - A_2 A$ und deren Zeichen bestimmt. Entgegengesetzt gleiche Translationen könne sonstigen Bewegungen des Systems zugefügt oder entzogen werden, d sie aequivalent der Ruhe sind. Die Translationsfolge

$$[A_1 A_2] + [A_2 A_3] + [A_3 A_1] = 0$$

ist aequivalent der Ruhe.

Eine Translation $A_1 A_3$ kann auf unzählige Arten in zwei andere ih aequivalente Translationen zerlegt werden, da zur Bestimmung des Drei ecks $A_1 A_2 A_3$ ausser $A_1 A_3$ noch zwei andere Bestimmungsstücke erforder lich sind.

Die Translation $[A_1 A_3]$ ist auch der gleichzeitigen Verbindung vo $[A_1 A_2]$ und $[A_2 A_3]$ aequivalent. Denkt man sich nämlich, das System erleide die Translation $[A_1 A_2]$ in einem Raume oder System σ, welche System selbst in Translation gleich $[A_2 A_3]$ begriffen ist, oder ertheilt ma ihm in einem Systeme τ, welches die Translation $[A_1 A_2]$ ausführt, di Translation $[A_2 A_3]$, so gelangt es in jedem Falle in die Lage Σ_3.

Der Satz kann auf beliebig viele Translationen ausgedehnt werden Sind $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots \Sigma_n$ die Lagen, durch welche Σ mit Hülfe einer Trans lationsfolge $[A_1 A_2], [A_2 A_3], \ldots [A_{n-1} A_n]$ hindurchgeführt werden soll so ist die Translation $[A_1 A_n]$ aequivalent der geometrischen Summe

$$[A_1 A_2] + [A_2 A_3] + \cdots + [A_{n-1} A_n].$$

Da die Glieder dieser Summe vertauschbar sind, so ist die Ordnung der Translationen willkührlich.

Eine Translationsfolge, welche durch die Seiten eines geschlossenen Polygons bestimmt ist, deren Sinn mit dem Sinne eines beweglichen, den Umfang ohne Umkehr beschreibenden Punktes übereinstimmt, ist aequivalent der Ruhe.

§. 3. Die Folge zweier Rotationen eines unveränderlichen Systems Σ in einem Raume S um zwei verschiedene parallele Axen a, b endlichen Abstandes von den Amplituden ϑ, ϑ' ist aequivalent einer einzigen Rotation um eine dritte, mit a, b parallele Axe c, welche im beweglichen System mit den Axen a, b ein prismatisches Dreikant abc bildet, in welchem die Ebenen (ca), (cb), welche durch sie hindurchgehen, mit der Ebene (ab) der gegebenen Axen an den Kanten a, b Winkel bilden, gleich den halben Amplituden $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{2}\vartheta'$ um diese Axen und zwar so, dass diese Winkel in Bezug auf die Ebene (ab) bei der Axe, um welche die erste Rotation erfolgt, auf derselben, bei der anderen auf der entgegengesetzten Seite von derjenigen liegen, nach welcher hin die Rotation erfolgt. Ebenso bilden die Geraden A, B, C des Raumes S, mit welchen die Rotationsaxen a, b, c während der Rotation vereinigt bleiben, ein prismatisches Dreikant, welches mit abc symmetrisch ist, so dass in ihm die Ebene CA, CB mit AB an den Axen A, B die Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{2}\vartheta'$ bilden, jedoch so, dass der Winkel an der ersten Axe auf die entgegengesetzte, der an der zweiten Axe auf dieselbe Seite von AB fällt, nach welcher hin die Rotation erfolgt. Die Amplitude Θ der resultirenden Rotation ist die Summe oder Differenz der Amplituden ϑ, ϑ', je nachdem beide gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind; der Sinn der Resultanten stimmt im ersten Falle mit dem gemeinsamen Sinne von ϑ, ϑ' im letzteren Falle mit dem Sinne der grösseren von diesen Amplituden überein. Die Rotationsfolge ist nicht vertauschbar. Im Falle entgegengesetzt gleicher Amplituden ϑ, ϑ' geht die resultirende Rotation in eine Translation über.

Sind nämlich Σ_1, Σ_2, Σ_3 die Lagen, welche das bewegliche System Σ in S einnimmt zu Anfang der Rotation ϑ, zu Anfang der Rotation ϑ' und am Ende derselben, so ist die Gerade A von S, mit welcher die Axe a während der ersten Rotation ϑ vereinigt bleibt, eine Doppellinie $(a_1 a_2)$ der congruenten Systeme Σ_1, Σ_2 und eine beliebige zu ihr senkrechte Ebene E von S eine Doppelebene $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$ gleichartiger Lage derselben. Durch die

Rotation ϑ um a gelangt die Axe b aus der Lage b_1, welche sie anfangs in Σ_1 einnimmt, in die homologe Lage b_2 in Σ_2. Mit dieser Geraden, die wir als Ort in S mit B bezeichnen, fällt die Axe b während der zweiten Rotation ϑ' zusammen. Daher ist B eine Doppellinie $(b_2 b_3)$ der congruenten Systeme Σ_2, Σ_3 und die Ebene E eine Doppelebene $(\varepsilon_2\, \varepsilon_3)$ gleichartiger Lage von Σ_2 und Σ_3. In der Ebene E sind daher drei homologe Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 gleichartiger Lage von Σ_1, Σ_2, Σ_3 vereinigt. E ist daher insbesondere auch eine Doppelebene gleichartiger Lage $(\varepsilon_1\, \varepsilon_3)$ der Systeme Σ_1, Σ_3. Nach Cap. I, §. 4 besitzen ε_1, ε_3 einen Doppelpunkt und Σ_1, Σ_3 eine durch ihn hindurchgehende Doppellinie C $(c_1\, c_3)$ senkrecht zu E und gibt es folglich im beweglichen System Σ eine ihr homologe Axe c, durch Rotation um welche Σ aus der Lage Σ_1 unmittelbar in die Lage Σ_3 gelangen kann. Während dieser Rotation von Σ um die noch unbekannte Amplitude Θ um c bleibt c fortwährend mit C vereinigt. Da die Axe C senkrecht zur Ebene E ist, so genügt es, ihren Schnittpunkt mit E zu finden. Bezeichnen wir in Kürze die Schnittpunkte aller Axen mit dieser Ebene (Fig. 58.) durch die Buchstaben der Axen selbst, so ergibt sich der Doppelpunkt C $(c_1 c_3)$ von ε_1, ε_3 als der Durchschnitt der in den Mitten m, n der Abstände $b_1 b_3$ und $a_1 a_3$ errichteten Perpendikel, wo a_3 die Lage ist, in welche die Axe a durch die Rotation ϑ' und b gelangt. Das Perpendikel mC geht durch A und halbirt den Winkel $b_1 A b_2 = \vartheta$; ebenso geht das Perpendikel nC durch B und halbirt den Winkel $a_1 B a_3 = \vartheta'$. Daher bilden A, B, C ein Dreieck (resp. Dreikant), dessen Winkel $A = \frac{1}{2}\vartheta$, $B = \frac{1}{2}\vartheta'$ und dessen Aussenwinkel $mCB = \frac{1}{2}(\vartheta + \vartheta')$ ist, wenn die Amplituden den durch den Pfeil angedeuteten gleichen Sinn haben und zwar ist, von AB aus gerechnet, der Sinn des Winkels A der Amplitude ϑ entgegengesetzt, der des Winkels B harmonirend mit der Amplitude ϑ'. Hiemit ist die sich auf die Orte A, B, C der Axen beziehende Behauptung des Satzes erwiesen. Symmetrisch zu dem Dreikant ABC ist das Dreikant $a_1 b_1 c_1$ welches mit dem Dreikant abc der Axen im beweglichen System congruent ist, dessen Lage vor aller Rotation es bezeichnet. In ihm liegen bei a_1 und b_1 dieselben Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{2}\vartheta'$, jedoch so, dass der Winkel bei a_1 mit der Amplitude ϑ gleichen, der andere mit ϑ' entgegengesetzten Sinn hat. Die Amplitude Θ der resultirenden Rotation ist der Winkel

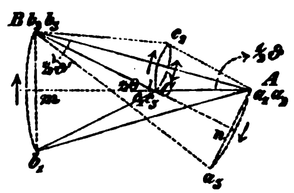

Fig. 58.

$$b_1 c b_3 = 2 \,.\, mCB, \text{ d. h. } \Theta = \vartheta + \vartheta'.$$

Sind die Amplituden ϑ, ϑ' entgegengesetzt (Fig. 59.), so ist der Winkel $b_1 c b_3$ nicht der doppelte Aussenwinkel von ABC, sondern doppelter Innenwinkel und hiermit wird $\Theta = \vartheta - \vartheta'$ oder $\Theta = \vartheta' - \vartheta$, je nachdem $\vartheta \gtrless \vartheta'$ ist. Indem wir also entgegengesetzte Amplituden als Grössen entgegengesetzten Zeichens behandeln, umfasst eine dieser Formeln alle Fälle und bestimmt das Zeichen der rechten Seite den Sinn der resultirenden Amplitude Θ.

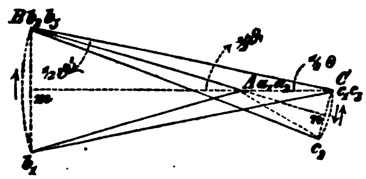

Fig. 59.

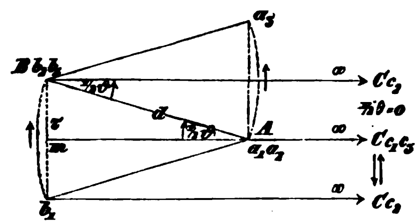

Fig. 60.

Zwischen den Abständen der resultirenden Axe c von den beiden Axen a, b, sowie den drei Amplituden Θ, ϑ, ϑ' besteht die Relation:

$$\frac{ac}{\sin\frac{1}{2}\vartheta'} = \frac{bc}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{ab}{\sin\frac{1}{2}\Theta}, \text{ wo } \Theta = \vartheta + \vartheta' \text{ oder } \Theta = \pm(\vartheta - \vartheta').$$

Für den Fall, dass ϑ' und ϑ entgegengesetzt gleich werden (Fig. 60.) verschwindet die resultirende Amplitude und rückt die Axe c ins Unendliche. In diesem Falle ist die Folge der beiden Rotationen einer Translation $b_1 b_3$ aequivalent. Ihre Grösse τ ist, wenn d den Abstand ab der Axen bezeichnet,

$$\tau = 2d \, . \sin\tfrac{1}{2}\vartheta$$

und ihre Neigung λ gegen die Ebene (ab):

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\pi - \vartheta).$$

Die Rotationsfolge ist nicht vertauschbar. Denn rotirt das System Σ zuerst um a, welche Axe ursprünglich mit a_1 vereinigt ist, so gelangt b von b_1 nach b_2 und ruht alsdann in b_2; rotirt aber Σ zuerst um b, welches ursprünglich in b_1 sich befindet, so rückt a aus a_1 heraus und kann also b durch die nachfolgende Rotation um a nicht nach b_1 gelangen.

Dagegen können beide Rotationen zugleich stattfinden, nämlich so, dass Σ um die zweite Axe b rotirt und diese Rotation in einem System a erfolgt, welchem die Axe b angehört und dies System durch die Rotation um die erste Axe a aus der Lage Σ_1 nach Σ_2 gelangt. Die Bewegung eines tanzenden Paares kann den ersten Fall einigermassen veranschaulichen.

Von der Richtigkeit obiger Sätze kann man sich leicht auch auf andere Art überzeugen. Im ersten und zweiten Falle nämlich gelangt die Axe c durch die erste Rotation ϑ um a aus der Lage c_1 in Σ_1 in die homologe Lage c_2 in Σ_2, welche zu AB symmetrisch ist; durch die zweite Rotation ϑ' um b aber geht sie von c_2 nach c_3 in Σ_3 über. Vermöge der

Congruenz der symmetrisch liegenden Dreiecke ABc_2 und ABc_1, wodurch $\sphericalangle\, c_2Bc_1 = \vartheta'$ wird, fällt c_3 mit c_1 zusammen, d. h. es kehrt c durch die zweite Rotation nach c_1 zurück. Es befand sich daher die Axe c bereits vor aller Rotation in ihrer definitiven Lage. Daher muss das System Σ durch Rotation um sie in seine definitive Lage Σ_3 gelangen können. Im dritten Falle gelangt b durch die Rotation ϑ um a aus der Lage b_1 nach (b_2b_3) und a hierauf durch die zweite Rotation $-\vartheta$ um b aus der Lage (a_1a_2) nach a_3. Da nun die Figur $a_1b_1b_2a_3$ ein Parallelogramm ist, so folgt, dass ab aus der Lage a_1b_1 in die Parallellage a_3b_3 durch die Translation $b_1b_3 = a_1a_3$ und damit Σ aus der Lage Σ_1 nach Σ_3 übergeführt werden kann.

§. 4. Die Folge zweier entgegengesetzt gleicher Rotationen um zwei parallele Axen heisst ein Rotationspaar. Dasselbe ist einer Translation aequivalent, deren Grösse, Richtung und Sinn durch die Sehne des Kreisbogens angegeben wird, den ein beliebiger einer der beiden Axen angehörender Systempunkt in Folge der Rotation um die andere Axe beschreibt. Die Grösse dieser Translation, welche gleich dem Produkte aus dem Abstande der Axen und dem doppelten Sinus der halben Amplitude der Rotationen angegeben wird, heisst das Moment des Rotationspaares. Die Richtung der Translation ist senkrecht zur Halbirungslinie der Amplitude und senkrecht zu den Axen. Bezeichnet man den Sinn einer Rotation dadurch dass man auf der Axe eine Strecke mit Pfeilspitze aufträgt (Fig. 61.) nach der Seite des Raumes gerichtet, von wo aus ein stehender Punkt die Rotation mit der Uhrzeigerbewegung harmonirend erblickt, so gibt die Figur das Bild eines Rotationspaares. Man überzeugt sich leicht, dass der Sinn der dem Paare aequivalenten Translation nach derjenigen Seite der Axenebenen hinzeigt, von welcher aus die Figur der Pfeilspitzen dem Uhrzeigersinne entspricht.

Fig. 61.

§. 5. Mit Hülfe des Satzes §. 3. kann umgekehrt eine Rotation Θ um eine Axe c auf unendlich viele Arten in zwei Rotationen um zwei Axen a, b, welche mit c parallel sind, aufgelöst werden. Dabei kann eine der Axen und eine Amplitude willkührlich angenommen werden.

Aus §. 4. erhellt, dass eine Translation unzählig vielen Rotationspaaren aequivalent ist, welche sämmtlich dasselbe Moment besitzen. Von den beiden Elementen, von welchen das Moment abhängt, Amplitude und Axenabstand, kann eines beliebig angenommen werden. Sobald dies geschehen, ist das andere bestimmt und damit das Axenpaar auf eine Schaar Parallelebenen beschränkt, in welchen die Axenrichtung und Lage des Axenpaares noch willkührlich bleibt.

§. 6. Der Satz des §. 3. umfasst noch einige bemerkenswerthe Specialfälle:

Fallen die Axen a, b zusammen, so fällt auch die Axe c der resultirenden Rotation mit ihnen zusammen. **Die Folge zweier Rotationen um dieselbe Axe ist daher aequivalent einer einzigen Rotation um dieselbe Axe; ihre Amplitude ist die Summe oder Differenz der Amplituden jener, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind. Die Rotationsfolge ist vertauschbar; die Rotationen können zugleich erfolgen. Bei entgegengesetzt gleichen Amplituden ist die Folge oder gleichzeitige Verbindung aequivalent der Ruhe.**

Man kann einem beweglichen System ohne Störung seiner Bewegung entgegengesetzt gleiche Rotationen um dieselbe Axe ertheilen oder entziehen.

Fällt von den beiden Axen a, b die Axe a der ersten Rotation in's Unendliche (Fig. 62.), so geht diese Rotation in die Translation

$$b_1 b_2 = \lim (a b_1 \, 2 \sin \tfrac{1}{2} \vartheta)$$

für $\vartheta = 0$ über, senkrecht zur Axe b. Die resultirende Amplitude wird $\Theta = \vartheta'$. Die Translation führt die Axe c von c_1 nach c_2, die Rotation ϑ' um b bringt sie nach $(c_1 c_3)$ zurück. Die Ordnung der Folge von Translation und Rotation ist vertauschbar. Denn rotirt das System zuerst um b, so gelangt die c in die Lage c_2' und von da durch die nachfolgende Translation nach c_1 zurück. Aehnliches findet statt, wenn die Axe b der zweiten Rotation ins Unendliche rückt. Wir erhalten damit die Sätze:

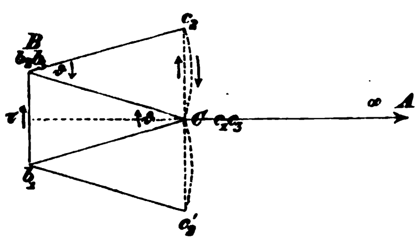

Fig. 62.

Die Folge einer Translatinn τ und einer Rotation von der Amplitude ϑ um eine zur Richtung der Translation senkrechte Axe b ist unabhängig von der Ordnung der Folge aequivalent einer Rotation um eine zu b parallele Axe c von gleicher Amplitude und gleichem Sinne. Die Axe c bildet mit der anfänglichen und definitiven Lage b_1, b_3 der Axe b ein gleichschenkliges prismatisches Dreikant, dessen Schenkelebenen an der Kante c den Winkel ϑ einschliessen. Das Dreikant fällt auf diejenige Seite der Ebene $b_1 b_3$, von welcher aus einem sehenden Punkte die Translationsbewegung von links nach rechts erfolgend erscheint.

Umgekehrt ist jede Rotation um eine Axe c aequivalent einer

Rotation von derselben Amplitude und gleichem Sinne um eine beliebig wählbare parallele Axe b und eine zu ihr senkrechte Translation. Die Translation ist nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmt durch die Sehne des Kreisbogens, welchen ein beliebiger Punkt der Axe b in Folge der Rotation um die Axe c beschreiben würde.

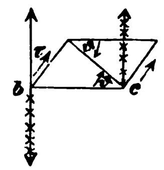

Fig. 63.

Man sieht diesen Satz auch unmittelbar ein, wenn man dem System um die Axe b zwei entgegengesetzt gleiche Rotationen von derselben Amplitude ertheilt, welche die Rotation um c besitzt. Die Rotation um c bildet mit der ihr entgegengesetzten Rotation um b ein Rotationspaar, welches der im Satze erwähnten Translation aequivalent ist. (Fig. 63).

§. 7. Eine Folge von Rotationen eines unveränderlichen Systems Σ um die parallelen Axen a, b, c .... mit den Amplituden ϑ, ϑ', ϑ'', ... ist aequivalent einer einzigen Rotation um eine jenen Axen gleichfalls parallele Axe oder einem Rotationspaare.

Man ersetze nach §. 6 jede Rotation durch eine ihr gleiche um eine parallele Axe ξ in Verbindung mit der zugehörigen Translation. Da die Folge von Rotation und Translation vertauschbar ist, so kann das System erst alle Rotationen und hierauf alle durch die Rotationspaare dargestellten Translationen ausführen. Die sämmtlichen Rotationen um die gemeinschaftliche Axe ξ geben eine resultirende Rotation mit der Amplitude $\Theta = \Sigma\vartheta$ um ξ, die sämmtlichen Translationen, welche alle zur Axe ξ senkrecht sind, eine zu dieser Axe gleichfalls senkrechte resultirende Translation T. Ist Θ nicht Null, so lassen sich diese beiden Bewegungen zu einer Rotation von derselben Amplitude Θ um eine parallele Axe zusammensetzen (§. 6.); ist aber Θ gleich Null, so resultirt die Translation T.

§. 8. Von den vorstehenden Sätzen werden wir vorzugsweise in dem Falle Gebrauch machen, dass die Rotationsamplituden und Translationen verschwindend klein werden. Hiefür reduciren sich dieselben bedeutend.

Das System besitze zwei unendlich kleine Rotationen von den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um die Axen a, b. Nach §. 3. sind sie zusammen aequivalent einer Rotation $d\Theta = d\vartheta \pm d\vartheta'$, deren Axe c nach der dortigen Construction leicht gefunden wird. Da die Amplituden unendlich klein sind, so fällt c in die Ebene (ab) und sieht man ein, sowohl dass die Aufeinanderfolge keinen Einfluss auf die Lage von c hat als auch, dass die Rotationen gleichzeitig erfolgen können. Vermöge der Rotation um a ist b im Begriff aus seiner Lage in S unendlich wenig herausgehoben zu werden, während durch die Rotation um b dasselbe für a gilt. Die §. 3. aufgestellte Proportion geht über in

$$\frac{ac}{d\vartheta'} = \frac{cb}{d\vartheta} = \frac{ab}{d\Theta},\ d\Theta = d\vartheta \pm d\vartheta'$$

und zeigt, dass die resultirende Axe c den Parallelstreifen (ab) oder jede Transversale desselben im umgekehrten Verhältniss der Amplituden theilt, nämlich so, dass $ac : cb = d\vartheta' : d\vartheta$ wird. Im Falle übereinstimmenden Sinnes von $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ ist das Theilungsverhältniss positiv und fällt c in den Parallstreifen (ab) selbst; bei entgegengesetztem Sinne wird es negativ und rückt c in denjenigen Aussenraum, welcher der Axe der grösseren Amplitude anliegt. Für $d\vartheta = \pm d\vartheta'$ tritt c in die Mitte zwischen ab, oder rückt ins Unendliche. In diesem letzteren Falle sind beide Rotationen einer unendlich kleinen Translation senkrecht zur Ebene (ab) aequivalent.

Alles dies erkennt man leicht auch unmittelbar auf folgende Weise. Es seien zunächst $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ von gleichem Sinne. Die Axe a (Fig. 64.) theilt die Ebene ab in zwei Felder, deren Punkte in Folge der Rotation um a nach entgegengesetzten Seiten dieser Ebene und senkrecht zu ihr um unendlich kleine ihren Abständen von a proportionale Strecken herausgeschleudert werden. Dasselbe gilt von der Axe b und da beide Rotationen gleichen Sinn besitzen, so folgt, dass blos die Punkte des Parallelstreifens ab entgegengesetzte Bewegungen durch die beiden Rotationen erlangen, während die Punkte eines jeden der beiden Aussenräume aus doppeltem Grunde nach der einen oder der andern Seite der Axenebene getrieben werden. Daher kann es nur innerhalb des Streifens Punkte c geben, deren Bewegung aequivalent der Ruhe ist. Für solche Punkte muss die Bedingung $ac.d\vartheta = bc.d\vartheta'$ erfüllt sein, d. h. sie liegen auf einer zu den Axen parallelen Geraden c, welche den Streifen im umgekehrten Verhältniss der Amplituden theilt. Es gibt nur eine solche Gerade, weil diese Theilung nur auf eine Weise möglich ist, sie existirt aber immer, welchen Werth das Amplitudenverhältniss auch haben mag. Die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation um die Axe c ergibt sich, indem man die Bewegung der Systempunkte als Rotation um c auffasst. Am einfachsten wählt man hiezu die Punkte der Axen a, b, da sie ihre Bewegung nur einer einzigen der beiden Rotationen verdanken. Ein Punkt der Axe b z. B. erlangt vermöge der Rotation um b keine Bewegung, die Rotation a führt ihn aber um die Strecke $ab\,.\,d\vartheta$ senkrecht zur Axenebene fort. Daher besteht die Gleichung $cb\,.\,d\Theta = ab\,.\,d\vartheta$. Ebenso erlangt ein Punkt der Axe a blos durch die Rotation um b seine Bewegung und wird

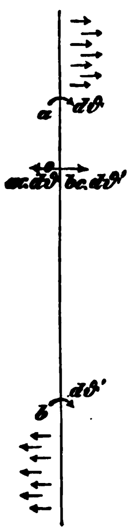

Fig. 64.

$$ac\,.\,d\Theta = ab\,.\,d\vartheta'.$$

Addirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$(ac + cb)\, d\Theta = ab\, (d\vartheta + d\vartheta'),$$

d. h. $d\Theta = d\vartheta + d\vartheta'$. Der Sinn von $d\Theta$ stimmt mit dem gemeinschaftlichen Sinne von $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ überein.

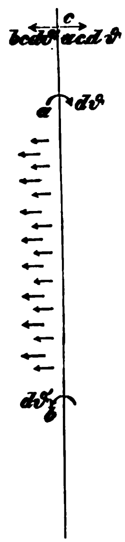

Fig. 65.

Bei entgegengesetztem Sinne der Amplituden $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ (Fig. 65.) ergibt sich in ähnlicher Weise, dass die Punkte des Streifens ab aus doppeltem Grunde aus der Axenebene herausgeschleudert werden, während die Punkte der beiden Aussenräume entgegengesetzte Bewegungen annehmen. Daher können nur in ihnen Punkte liegen, deren Bewegung aequivalent der Ruhe ist. Ist nun $d\vartheta > d\vartheta'$, so folgt, dass ein Punkt c in dem der Axe a anliegenden Aussenraume um die entgegengesetzten Strecken $ac \,.\, d\vartheta$ und $cb \,.\, d\vartheta'$ aus der Axenebene herausgetrieben wird und da für diesen Raum $ac < cb$, so kann sehr wohl das kleinere ac mit dem grösseren $d\vartheta$ ein Produkt bilden, gleich dem Produkte des grösseren cb mit dem kleineren $d\vartheta'$. Für Punkte c des andern Aussenraumes ist dies nicht möglich, da für sie $ac > cb$ und wegen $d\vartheta > d\vartheta'$ auch

$$ac \,.\, d\vartheta > cb \,.\, d\vartheta'$$

ist. Die Gleichung $ac \,.\, d\vartheta = cb \,.\, d\vartheta'$ sagt aber wieder aus, dass die gesuchten Punkte auf einer Geraden c liegen, welche den Streifen ab als Aussenlinie im umgekehrten Amplitudenverhältniss theilt. Man findet die Amplitude um diese Gerade c, indem man wieder die Bewegung der Punkte a und b als Rotation um sie auffasst. Es bestehen nämlich für sie die Gleichungen

$$cb \,.\, d\Theta = ab \,.\, d\vartheta$$
$$ca \,.\, d\Theta = ab \,.\, d\vartheta',$$

also ist, wenn man sie subtrahirt

$$ab \,.\, d\Theta = ab\, (d\vartheta - d\vartheta')$$

oder

$$d\Theta = d\vartheta - d\vartheta'.$$

Sind endlich die Amplituden $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ entgegengesetzt gleich, so erlangt ein Punkt des Streifens die Bewegung um die Strecke

$$ac \,.\, d\vartheta + cb \,.\, d\vartheta = (ac + cb)\, d\vartheta = ab \,.\, d\vartheta$$

und ebenso ein Punkt der Aussenräume die Bewegung

$$cb \,.\, d\vartheta - ac \,.\, d\vartheta = (cb - ac)\, d\vartheta = ab \,.\, d\vartheta.$$

Da diese Grösse von der Lage des Punktes unabhängig ist, so haben alle Punkte dieselbe Bewegung und das ganze System die Translation $ab \,.\, d\vartheta$ senkrecht zur Ebene (ab).

Rückt die eine der Axen, z. B. b ins Unendliche (vgl. Fig. 60.), so geht die Rotation um sie in eine Translation $d\tau$ über. Vermöge dieser erleiden alle Punkte der Ebene ab und mit ihnen alle Punkte des Systems eine gemeinsame unendlich kleine Verschiebung $d\tau$ senkrecht zu ab; vermöge der Rotation um a aber erlangen die Punkte der beiden Felder, in welche die Ebene ab durch diese Axe zerlegt wird, entgegengesetzte Bewegungen senkrecht zu ab und proportional ihrem Abstande von a. Die Punkte des einen Feldes, in welchem die aus der Translation und der Rotation entspringenden Verschiebungen gleichen Sinnes sind, werden aus doppeltem Grunde senkrecht zu ab hinausgeschleudert, während in dem andern Felde die beiden Bewegungen sich tilgen können. Da die der Rotation entspringende Verschiebung eines Punktes c, nämlich $ac\,.\,d\vartheta$ mit der Entfernung ac wächst, während die Translationsverschiebung $d\tau$ für alle dieselbe ist, so gibt es eine Axe c parallel a, deren Punkte in Ruhe bleiben. Sie genügen der Bedingung $ac\,.\,d\vartheta = d\tau$, welche den Abstand ac dieser Axe bestimmt. Die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation um diese Axe erhält man, indem man die Bewegung eines Punktes der Axe a als Rotation um c auffasst. Hiedurch wird $ac\,.\,d\Theta = d\tau$ und diese Gleichung liefert mit der vorigen verglichen $d\Theta = d\vartheta$.

Der Wichtigkeit der Sätze für unendlich kleine Bewegungen wegen sprechen wir sie im Zusammenhange folgendermassen aus:

Zwei unendlich kleine Rotationen verschiedener Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei parallele Axen a, b sind aequivalent einer einzigen Rotation um eine dritte mit a, b parallele Axe c, welche in die Ebene (ab) fällt. Sie theilt den Parallelstreifen (ab) im umgekehrten Verhältniss der Amplituden, nämlich so, dass

$$ac : cb = d\vartheta' : d\vartheta$$

ist, und zwar bei gleichem Sinne der Amplituden als innere Theilungslinie, bei entgegengetztem Sinne derselben als äussere Theilungslinie, welche dem an die Axe der grösseren Amplitude anliegenden Aussenraume des Parallelstreifens angehört. Die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation ist im ersten Falle die Summe, im zweiten die Differenz der Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ und ihr Sinn stimmt in diesem mit dem gemeinsamen Sinne von $d\vartheta$ und $d\vartheta'$, in jenem mit dem Sinne der grösseren dieser Amplituden überein.

Zwei entgegengesetzt gleiche unendlich kleine Rotationen um parallele Axen a, b, welche ein Rotationspaar von unendlich kleiner gemeinschaftlicher Amplitude $d\vartheta$ bilden, sind aequivalent einer unendlich kleinen Translation senkrecht zur Axenebene ab, deren Grösse gleich dem Producte des Axenabstandes und der Amplitude $d\vartheta$ ist, und deren Sinn nach derjenigen Seite der Axenebene hinzeigt, von welcher aus die Pfeilspitzen des Paares mit der Uhrzeigerbewegung harmonirend erscheinen.

Eine unendlich kleine Rotation von der Amplitude $d\vartheta$ um eine Axe a und eine unendlich kleine Translation $d\tau$ senkrecht zu dieser Axe sind zusammen aequivalent, einer Rotation von derselben Amplitude und demselben Sinne um eine zu a parallele Axe c, welche in die zur Translationsrichtung senkrechte Ebene der Axe a fällt, und im Abstande $d\tau : d\vartheta$ von ihr in demjenigen Felde liegt, dessen Punkte durch die Rotation und Translation entgegengesetzte Bewegungen annehmen.

§. 9. Die bisher behandelten Sätze über die Aequivalenz der Rotationen um parallele Axen sind specielle Fälle allgemeinerer Sätze über die Aequivalenz von Rotationen um Axen, welche einen Punkt gemein haben, zu denen wir jetzt übergehen.

Die Folge zweier Rotationen eines unveränderlichen Systems Σ um zwei durch denselben Punkt O hindurchgehende Axen a, b von den Amplituden ϑ, ϑ' ist aequivalent einer einzigen Rotation um eine dritte, gleichfalls durch O hindurchgehende Axe c. Die drei Axen a, b, c sind die Kanten eines pyramidalen Dreikants, in welchem die beiden durch die Axe c gehenden Seitenebenen ca, cb mit der dritten Seitenebene ab Winkel bilden gleich den halben Amplituden der Rotationen um diese Axen, und zwar liegen diese Winkel bei der Axe a, um welche die erste Rotation erfolgt, auf derselben, bei der Axe b der nachfolgenden Rotation auf der entgegengesetzten Seite der Ebene (ab) von derjenigen Seite, nach welcher hin die Rotation erfolgt. Die Lagen A, B, C der drei Axen in dem Raume, in welchem die Rotationen stattfinden, bilden ein dem vorigen symmetrisches Dreikant. Die halbe Amplitude $\frac{1}{2}\Theta$ der resultirenden Rotation um die Axe c ist gleich dem an der Axe c liegenden Aussenwinkel des Dreikants abc oder ABC. Die Ordnung der Rotationsfolge ist nicht vertauschbar.

Sind nämlich Σ_1, Σ_2, Σ_3 die drei Lagen des beweglichen Systems Σ, welche dasselbe vor der Rotation ϑ um die Axe a einnahm, in die es durch die Rotation ϑ um a und die, in welche es durch die Rotation ϑ' um b gelangt (Fig. 66), so ist die Linie A, mit welcher a während der ersten Rotation vereinigt bleibt, eine Doppellinie $(a_1 a_2)$ und insbesondere der Punkt O auf ihr ein Doppelpunkt $(O_1 O_2)$ der congruenten Systeme Σ_1, Σ_2. Ebenso ist die Linie B, mit welcher die Axe b während der nachfolgenden Rotation zusammenfällt und in welche b durch die Rotation um a aus der ursprünglichen Lage b_1 gelangt, eine Doppellinie $(b_2 b_3)$ und auf ihr O ein Doppelpunkt $(O_2 O_3)$ der Systeme Σ_2, Σ_3. Im Punkte O fallen also drei homologe Punkte O_1, O_2, O_3 zusammen und ist derselbe insbesondere auch ein Doppelpunkt $(O_1 O_3)$ von Σ_1, Σ_3. Diese Systeme haben daher eine durch ihn hindurchgehende Doppellinie $(c_1 c_3)$ und kann Σ durch Rotation um die dieser Doppellinie homologe mit $(c_1 c_3)$ zusammenfallende Linie c aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_3 unmittelbar übergeführt werden. Eine Ebene μ, welche den Winkel $(b_1 b_2)$, den die Axe b während der Rotation ϑ um a beschreibt, rechtwinklig zu seiner Ebene halbirt, und eine Ebene ν, welche den Winkel $(a_2 a_3)$, den die Axe a während der Rotation ϑ' um b beschreibt, gleichfalls rechtwinklig halbirt, liefern durch ihren Durchschnitt die Doppellinie $(c_1 c_3)$. Diese Halbirungsebenen gehen aber durch die Axen a, b und es bilden daher a, b, c ein Dreikant abc, in welchem an ab bei a und b die Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$, $\frac{1}{2}\vartheta'$ und zwar $\frac{1}{2}\vartheta$ an a dem Sinne nach mit der Rotation um a überstimmend, $\frac{1}{2}\vartheta'$ an b dem Sinne nach mit der Rotation entgegengesetzt in Bezug auf die Ebene (ab) liegen. Das Dreikant ABC ist dem Dreikant abc symmetrisch gleich. Da die Axe b durch Rotation um c um den Winkel $b_1 c_1 b_2$ aus ihrer ersten Lage b_1 in die definitive Lage (b_3) gelangt, so stellt dieser Winkel die resultirende Rotation Θ dar und mithin ist der Aussenwinkel $\mu c_1 b_2$ des Dreiecks $\frac{1}{2}\Theta$.

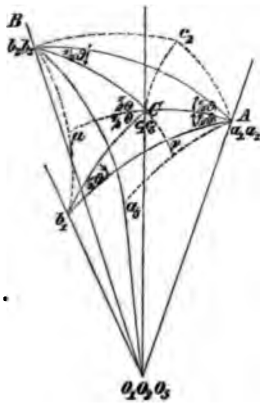
Fig. 66.

Von der Richtigkeit des Satzes kann man sich auch folgendermassen überzeugen. Die Axe c gelangt durch die Rotation ϑ um a aus der Lage c_1, welche sie in Σ_1 hat, nach c_2 und geht, da c_2 gegen (AB) symmetrisch zu c liegt, durch die Rotation ϑ' um b in die Lage c_1 als ihre definitive Lage zu c_3 zurück. Sie ist daher eine Linie, welche vor Beginn aller Rotation sich in ihrer definitiven Lage bereits befand.

Auf einer um O mit der Einheit als Radius beschriebenen Kugelfläche bestimmen die Axen a, b, c, auf denen wir den Sinn der Rotationen durch Pfeilspitzen andeuten, ein sphärisches Dreieck abc, aus welchem man für die Amplitude Θ der resultirenden Rotation und die Winkelabstände ca, cb, ab der Axen von einander die Relationen zieht:

$$\cos \tfrac{1}{2}\Theta = \cos \tfrac{1}{2}\vartheta \cos \tfrac{1}{2}\vartheta' - \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \cos (ab)$$

$$\frac{\sin ca}{\sin \frac{1}{2}\vartheta'} = \frac{\sin cb}{\sin \frac{1}{2}\vartheta} = \frac{\sin ab}{\sin \frac{1}{2}\Theta}.$$

Für die Neigung p der resultirenden Axe c gegen die Ebene (ab) der gegebenen Axen erhält man weiter (Fig. 67.):

$$\sin p \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\Theta = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \sin (ab),$$

indem man die Gleichungen

$$\sin p = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \,.\, \sin (bc)$$
$$\sin (bc) \sin \tfrac{1}{2}\Theta = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \,.\, \sin (ab)$$

durch Multiplication mit einander verbindet.

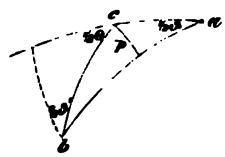
Fig. 67.

Die Rotationsfolge ist nicht umkehrbar. Denn es gelangt b durch die Rotation um a von b_1 nach b_2 und kann dahin nur durch Rotationen um Axen der Ebene μ gelangen. Rotirt nun das System zuerst um $b(b_1)$, so tritt a aus der Ebene μ heraus und kann daher b durch die nachfolgende Rotation um a nicht nach b_2 gelangen. Gleichzeitig können beide Rotationen erfolgen, indem Σ um b in einem System rotirt, welches selbst die Rotation um a im Gesammtraume ausführt.

Rückt der Schnittpunkt O ins Unendliche, so werden die Axen a, b, c parallel, die sphärische Figur geht in eine ebene Figur über und wir erhalten den Satz §. 3. wieder.

Der obige Satz lässt sich auf eine Folge von beliebig vielen Rotationen ausdehnen. Er kann benutzt werden, um eine Rotation in zwei und mehrere andere aufzulösen.

§. 10. Werden die Amplituden der beiden Rotationen unendlich kleine Grössen $d\vartheta$, $d\vartheta'$ (Fig. 68), so wird die Amplitude der resultirenden Rotation ebenfalls eine unendlich kleine Grösse $d\Theta$ und fällt die Axe c in die Ebene der Axen a, b. Die Relationen, welche die Grösse $d\Theta$ und die Lage von c bestimmen, sind dann:

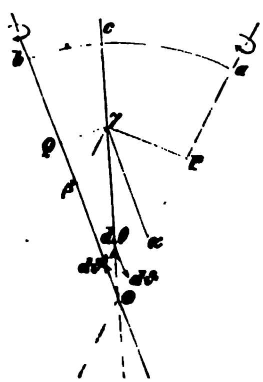
Fig. 68.

$$\frac{\sin ac}{d\vartheta'} = \frac{\sin cb}{d\vartheta} = \frac{\sin ab}{d\Theta},$$

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\,d\vartheta\, d\vartheta' \cos (ab).$$

Hienach theilt die Axe c den Winkel ab nach dem Sinusverhältniss

$$\sin ac : \sin cb,$$

dessen Werth durch das reciproke Verhältniss $d\vartheta' : d\vartheta$ der Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ angegeben wird. Denkt man $d\vartheta$, $d\vartheta'$ selbst oder ihnen proportionale Grössen als Längen $O\alpha$, $O\beta$ auf den Axen a, b von ihrem Schnittpunkte aus im Sinne der Pfeilspitzen der Rotationen aufgetragen, so liefert die Diagonale $O\gamma$ des über $O\alpha$ und $O\beta$ construirten Parallelogramms $O\alpha\beta\gamma$, welche durch O hindurchgeht, Richtung und Sinn der resultirenden Axe c und ist ihre Länge der resultirenden Amplitude $d\Theta$ proportional. Diese Betrachtung führt zu dem folgenden Satze, der unter dem Namen des Satzes vom Parallelogramm unendlich kleiner Rotationen bekannt ist:

Die Folge oder auch die gleichzeitige Verbindung zweier unendlich kleiner Rotationen von den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um zwei sich in einem Punkte O schneidende Axen a, b ist aequivalent einer einzigen unendlich kleinen Rotation von der Amplitude $d\Theta$ um eine Axe c, welche durch O hindurchgeht und in die Ebene der beiden Axen hineinfällt. Man erhält die Axe dieser resultirenden Rotation nach Richtung und Sinn durch die den Punkt O enthaltende Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten zwei den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ proportionale, auf den Axen a, b von deren Schnittpunkte O aus übereinstimmend mit dem Sinn der Rotationen aufzutragende Strecken sind. Die Amplitude $d\Theta$ der resultirenden Rotation ist der Länge dieser Diagonale in demselben Verhältnisse proportional, wie $d\vartheta$, $d\vartheta'$ den Seiten.

Da die Amplituden der Rotationen unendlich klein sind, so liegt b seiner definitiven Lage b_3 unendlich nah und tritt a nur unendlich wenig aus seiner ursprünglichen Lage a_1 heraus; es können daher die Lagen a_1, b_1 als mit a_3, b_3 zusammenfallend angesehen werden. Der Unterschied der Aufeinanderfolge der Rotationen fällt hier weg und können beide als zusammen erfolgend angesehen werden; auch ist es gleichgültig, ob man das System Σ die Rotation $d\vartheta'$ um b in einem Systeme ausführend denkt, welches um die Axe a mit der Amplitude $d\vartheta$ rotirt, oder das System Σ um a rotirend denkt in einem Systeme, welches die Rotation $d\vartheta'$ um die Axe b besitzt.

Man kann die Richtigkeit des vorstehenden Satzes auf folgende Art auch unmittelbar einsehen. Die Axe a theilt die Ebene ab in zwei Felder; durch die Rotation um sie werden die Punkte des einen Feldes nach der einen, die des andern nach der andern Seite der Ebene ab geschleudert, während die Punkte der Axe a hierbei keine Bewegung annehmen. Ebenso theilt die Axe b die Ebene ab in zwei andere Felder, für welche in Bezug auf die Rotation um b Aehnliches gilt. Beide Axen zusammen theilen die Ebene in zwei Paar Scheitelräume und das Zusammenwirken beider Rotationen ertheilt den Punkten des einen Paares gleichartige, denen des andern Paares entgegengesetzte Bewegungen. Blos in dem letzten Paare können Punkte liegen, welche in Ruhe bleiben. Ist γ ein Punkt dieses Scheitelpaares und fällt man von ihm auf a und b die Perpendikel γP, γQ, so sind die beiden unendlich kleinen Wege, um welche er senkrecht

zur Ebene ab nach der einen und der andern Seite hin geschleudert wir[d]
$\gamma P \, . \, d\vartheta$ und $\gamma Q \, . \, d\vartheta'$; dieselben werden gleich, sobald

$$\gamma P : \gamma Q = d\vartheta' : d\vartheta$$

ist und liegen daher die Punkte γ in einer durch den Schnittpunkt O de[r] Axen gehenden Geraden c, welche den Winkel des Scheitelraumes nac[h] einem Sinusverhältniss theilt, welches den Werth $d\vartheta : d\vartheta'$ besitzt. Da dies[e] Theilung für alle Werthe des Verhältnisses immer durch eine einzige Ge- rade möglich ist, so folgt, dass es in dem fraglichen Paar Scheitelräum[e] eine Gerade gibt, welche durch die beiden Rotationen nicht in Bewegun[g] geräth, um welche das System sich folglich dreht. Da

$$\gamma P : \gamma Q = \sin(ac) : \sin(cb)$$

ist, so folgt

$$\frac{d\vartheta}{\sin(cb)} = \frac{d\vartheta'}{\sin(ac)}$$

und indem man bedenkt, dass der Punkt P seine Bewegung der Rotatio[n] um die Axe b allein verdankt, diese aber als Rotation um die Axe c mi[t] der Amplitude $d\Theta$ aufzufassen ist und Aehnliches für den Punkt Q in Be- zug auf die Axe a gilt, so hat man

$$d\Theta \, . \, PO \, . \sin(ac) = d\vartheta' \, . \, PO \, . \sin(ab),$$
$$d\Theta \, . \, QO \, . \sin(cb) = d\vartheta \, . \, QO \, . \sin(ab),$$

weil $PO \, . \sin ac$, $PO \, . \sin ab$ die Abstände des Punktes P von c, b un[d] ebenso $QO \, . \sin cb$, $QO \, . \sin ab$ die Abstände des Punktes Q von c und a sind, woraus mit Rücksicht auf obige Proportion folgt:

$$\frac{d\Theta}{\sin(ab)} = \frac{d\vartheta}{\sin(cb)} = \frac{d\vartheta'}{\sin(ac)}.$$

Zieht man nun durch γ die Linien $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ parallel zu den Axen b, a, so wird

$$\frac{O\gamma}{\sin(ab)} = \frac{O\beta}{\sin(cb)} = \frac{O\alpha}{\sin(ac)}$$

und folglich

$$\frac{d\Theta}{O\gamma} = \frac{d\vartheta}{O\beta} = \frac{d\vartheta'}{O\alpha},$$

womit die Parallelogrammconstruction erwiesen ist. Da

$$\overline{O\gamma}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{O\beta}^2 + 2\,O\alpha \, . \, O\beta \, . \cos(ab)$$

ist, so ergibt sich hiermit auch

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\,d\vartheta\,d\vartheta' \cos(ab).$$

Der Satz vom Parallelogramm der Rotationen erweitert sich nach I. Th., Cap. I, §§. 4. 5. leicht zu einem Satze vom Parallelepiped und Poly- gon der Rotationen. Derselbe Satz dient zur Zerlegung einer unendlich kleinen Rotation in mehrere solche um Axen, die sich schneiden. Bildet z. B. die Axe der Rotation $d\Theta$ mit drei rechtwinkligen Axen, welche jene in einem Punkte O schneiden, die Winkel α, β, γ, so sind die Amplituden dreier Rotationen um diese Axen, welche $d\Theta$ aequivalent sind: $d\Theta \cos\alpha$, $d\Theta \cos\beta$, $d\Theta \cos\gamma$.

§. 11. Die Folge oder auch die gleichzeitige Verbindung einer Rotation von der Amplitude ϑ und einer zur Rotationsaxe a geneigten Translation τ ist aequivalent einer Schraubenbewegung; die Axe der Schraubenbewegung ist parallel der Axe a und die Amplitude derselben stimmt mit ϑ nach Grösse und Sinn überein, die Translationscomponente ist die Projection von τ auf die Richtung der Axe a.

Zerlegt man nämlich τ in eine Componente τ_1 senkrecht und eine andere τ_2 parallel zur Rotationsaxe, so ist (Fig. 69.) die Verbindung der Rotation ϑ um a und der zu a senkrechten Translation τ_1 aequivalent der Rotation ϑ um eine zu a parallele Axe b (§. 6.). Die Axe b hat den Abstand $d = \frac{\tau_1}{2 \, . \sin \frac{1}{2}\vartheta}$ von a. Die Rotation ϑ um b in Verbindung mit der zu dieser Axe parallelen Translationscomponente τ_2 ist aber aequivalent einer Schraubenbewegung (Cap. I, §. 11).

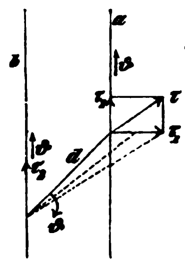

Fig. 69.

Nähert sich die Neigung von τ gegen die Axe a dem Winkel $\frac{1}{2}\pi$, so verschwindet τ_2 und erhält man den Satz §. 8., a. E.

Werden beide Grössen, Amplitude und Translation, unendlich kleine Grössen $d\vartheta$ und $d\tau$ und sind $d\tau_1$, $d\tau_2$ die Componenten von $d\tau$ senkrecht und parallel zu a, so erhält man für den Abstand der Axe b von a die Formel $d = \frac{d\tau_1}{d\vartheta}$. Um die Lage der Axe b zu finden, hat man in diesem Falle durch a eine Ebene parallel zur Translationsrichtung und eine andere zu dieser senkrechte Ebene zu legen; letztere wird durch die Axe a in zwei Felder zertheilt; in dem Felde, dessen Punkte vermöge der Rotation und der Translation entgegengesetzte Bewegungen annehmen, findet sich die Axe b da, wo $d \, . \, d\vartheta = d\tau_1$ ist, d. h. wo die entgegengesetzten Bewegungen $d \, . \, d\vartheta$ und $d\tau_1$ sich tilgen.

Umgekehrt ist jede Schraubenbewegung aequivalent einer Rotation um eine zur Schraubenaxe parallele Axe beliebiger Lage von derselben Amplitude, wie die Rotationscomponente der Schraubenbewegung und einer gegen die Axe geneigten Translation. Denn indem man die Schraubenbewegung in ihre Rotations- und Translationscomponente ϑ, τ zerlegt, kann man ϑ nach §. 6. in eine beliebige parallele Axe verlegen und die erforderliche zu dieser Axe senkrechte Translation τ_1 hinzufügen. τ und τ_1 aber sind zusammen aequivalent einer einzigen Translation $[\tau] + [\tau_1]$, welche schräg geneigt ist gegen die Axe, da τ ihr parallel, τ_1 zu ihr senkrecht ist.

§. 12. Die Folge zweier Rotationen eines unveränderlichen Systems Σ von den Amplituden ϑ, ϑ' um zwei gekreuzte Axen a, b ist aequivalent einer Schraubenbewegung. Es seien Σ_1, Σ_2, Σ_3 die Lagen von Σ vor der Rotation um a, nach dieser und nach der Rotation um b. Während der ersten Rotation ist die Axe a mit der Doppellinie $(a_1 a_2)$ (Fig. 70.) von Σ_1, Σ_2 vereinigt und gelangt die Axe b aus der Lage b_1 nach b_2; während der zweiten Rotation ruht b in der Doppellinie $(b_2 b_3)$ von Σ_2, Σ_3 und tritt a aus $(a_1 a_2)$ heraus, um in seine definitive Lage a_3 überzugehen. Um zunächst die Richtung der Axe der Schraubenbewegung zu finden, welche die Doppellinie der Systeme Σ_1, Σ_3 ist, construiren wir von irgend einem Punkte O des Raumes aus drei Hülfssysteme Σ_1', Σ_2', Σ_3', congruent mit Σ_1, Σ_2, Σ_3 so, dass Σ_1' mit Σ_1, Σ_2' mit Σ_2, Σ_3' mit Σ_3 sich in Parallellage befinden und Σ_1' und Σ_2' in O einen Doppelpunkt $(O_1' O_2')$ um Σ_2', Σ_3' in demselben Punkte einen Doppelpunkt $(O_2' O_3')$ besitzen. Dann ist der dreifache Punkt O $(O_1' O_2' O_3')$ auch ein Doppelpunkt $(O_1' O_3')$ für Σ_1', Σ_3'. Nach Cap. I, §. 11. besitzen

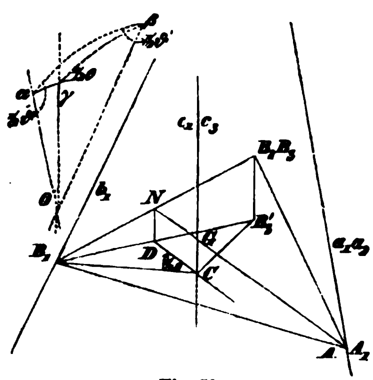

Fig. 70.

Σ_1', Σ_2' eine durch O gehende Doppellinie α, welche parallel der Doppellinie $(a_1 a_2)$ von Σ_1, Σ_2 ist und um welche das bewegliche System Σ rotirend um die Amplitude ϑ aus der Lage Σ_1' nach Σ_2' gelangen könnte. Ebenso besitzen Σ_2', Σ_3' eine durch O gehende Doppellinie β, parallel zur Doppellinie $(b_2 b_3)$ von Σ_2, Σ_3, um welche Σ um die Amplitude ϑ' rotiren könnte, um aus der Lage Σ_2' in die Lage Σ_3' überzugehen. Die Doppellinie γ der Systeme Σ_1', Σ_3' würde das System Σ aus der Lage Σ_1' unmittelbar nach Σ_3' gelangen lassen und müsste der Doppellinie $(c_1 c_3)$ von Σ_1, Σ_3 parallel sein und mithin die Richtung der Schraubenaxe haben. Diese Richtung ergibt sich also, wenn wir nach §. 9. die resultirende Axe für die Rotationen ϑ, ϑ' um α, β suchen, d. h. an $(\alpha\beta)$ in α den Winkel $\frac{1}{2}\vartheta$ im Sinne von ϑ, in β aber $\frac{1}{2}\vartheta'$ im entgegengesetzten Sinne von ϑ' antragen und die dritte Kante γ des Dreikants suchen, in welchem diese Winkel an $(\alpha\beta)$ als Basisebene liegen. Zugleich ergibt sich hiemit die Amplitude Θ der Schraubenbewegung als der doppelte Aussenwinkel des Dreikants an der Kante γ. Denn durch Rotation um γ um diese Amplitude kann Σ in Parallelstellung mit Σ_3 aus der Parallelstellung mit Σ_1 gelangen. **Die Richtung und die Amplitude Θ der Schraubenaxe sind daher die Richtung und Amplitude der aus den Rotationen ϑ, ϑ' um zwei sich schneidende, mit a, b parallele Axen α, β resultirenden Axe.**

Die Lage der Schraubenaxe im Raume der Bewegung und ihre Translation ergibt sich, indem wir die Systeme Σ_1, Σ_3 auf eine zur Richtung der Schraubenaxe senkrechte Ebene E projiciren und den Doppelpunkt die in ihr vereinigten homologen ebenen Systeme suchen. Denn nach Cap. I, §. 11. geht die Doppellinie von Σ_1, Σ_3 durch ihn hindurch. Es seien A, B die Fusspunkte des kürzesten Abstandes der Axen a, b und A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3 deren verschiedene Lagen. Zwei Perpendikel, das eine in der Mitte der Projection von B_1B_3, das andere in der Mitte der Projection von A_1A_3 auf die Ebene E, die wir durch B legen wollen, errichtet, schneiden sich in einem Punkte C, welcher ein Doppelpunkt der beiden congruenten Systeme ist, welche in E liegen und die Projectionen von Σ_1 und Σ_3 auf E sind. Durch diesen Punkt muss die gesuchte Schraubenaxe c gehen und ist also ihre Lage im Raume bestimmt. Die Winkel, welche die Stralen von C nach B_1 und der Projection B_3' von B_3 sowie die Stralen von C nach den Projectionen von A_1 und A_3 mit einander bilden, sind gleich der Amplitude Θ. Da die Amplitude bereits bekannt ist, so genügt eines der Perpendikel, wenn man die Seite, nach welcher es errichtet werden muss, mit Hülfe des Sinnes von Θ bestimmt. Die Translation τ der Schraubenbewegung ist die Projection des Abstandes homologer Punkte von Σ_1 und Σ_3 auf die Richtung der Axe. Sie ist daher gleich B_2B_3', der Projection von B_1B_3 auf diese Richtung; ebenso gleich der von A_1A_3.

Sowohl durch die Rotation ϑ um die Axe a, als auch durch die Schraubenbewegung wird die Axe b aus ihrer Anfangslage b_1 in ihre definitive Lage b_3 übergeführt; durch die Rotation direkt, durch die Schraubenbewegung so, dass sie durch deren Rotationscomponente Θ in Parallellage zu b_3 gebracht wird, wobei der Punkt B, welcher B_1 homolog ist von B_1 nach B_3' gelangt, um hierauf durch die Translationscomponente τ in die Lage b_3 parallel mit sich verschoben zu werden, wobei B nach B_3 kommt. Sowohl das Dreieck $B_1A_1B_3$, als B_1CB_3' ist gleichschenklig und ist CD die Projection von der zu B_1B_3 normalen Linie AN auf die Ebene E. Daher schneidet die Schraubenaxe die Linie AN in einem Punkte G rechtwinklig.

Diese Linie halbirt den Winkel $B_1A_1B_3$, welchen die kürzesten Abstände A_1B_1 und A_1B_3 der Axe a_1 von b_1 und b_3 mit einander bilden. Aehnliches gilt von der Linie, welche den Winkel $A_1B_3A_3$ der kürzesten Abstände B_3A_1, B_3A_3 der Axe (b_2b_3) von a_1 und a_3 bilden; auch sie wird von der Schraubenaxe rechtwinklig geschnitten. **Daher ist die Schrauben-**

axe die Linie des kürzesten Abstands der beiden Geraden, welch die Winkel halbiren, welche die kürzesten Abstände der Anfangslage a_1 der Axe a mit der Anfangs- und Endlage b_1, b_3 de: Axe b einerseits und der Lage b_1 der Axe b, in welche sie durcl die Rotation um a übergeführt worden ist, mit der Anfangs- un(Endlage a_1, a_3 der Axe a andererseits bilden.

Da die Linie A_1G auf a_1 und der Schraubenaxe senkrecht steht, s(ist sie kürzester Abstand dieser beiden von einander; ebenso ist B_1C der kürzeste Abstand von b_1 und der Schraubenaxe. Da beide Linien A_1G und B_1C die Linie A_1B_1, den kürzesten Abstand der Rotationsaxen a, b auf die Schraubenaxe projiciren und $CG = DN = \frac{1}{2}\tau$ ist, so folgt, dass die Translation der Schraubenbewegung die doppelte Projection des kürzesten Abstandes der Axen a und b auf die Schraubenaxe ist.

§. 13. Wir fanden §. 9. für die Neigung p der resultirenden Axe zweier Rotationen ϑ, ϑ' um zwei Axen a, b gegen die Ebene (ab) dieser Axen

$$\sin p \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\Theta = \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \,.\, \sin (ab).$$

Nun ist p das Complement des Winkels, welchen die Normale der Ebene (ab) mit der Schraubenaxe c bildet, d. h. des Winkels zwischen der Richtung des kürzesten Abstands d der Axen a, b und der Schraubenaxe Daher ist $d \sin p$ die Projection von d auf diese Axe oder also $\frac{1}{2}\tau$. Hiemit erhält man den von Rodrigues*) zuerst bewiesenen Satz:

$$\tfrac{1}{2}\tau \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\Theta = d \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \,.\, \sin (ab)$$

d. h. das Product aus der halben Translation und dem Sinus der halben Amplitude der aus zwei Rotationen um gekreuzte Axen resultirenden Schraubenbewegung ist gleich dem Producte aus dem kürzesten Abstande dieser Axen, dem Sinus ihrer Neigung gegen einander und den Sinussen ihrer halben Amplituden.

§. 14. Umgekehrt ist jede Schraubenbewegung (Θ, τ) eines unveränderlichen Systems Σ aequivalent der Folge zweier Rotationen um gekreuzte Axen und zwar auf unendlich viele Arten so dass man die eine der beiden Axen willkührlich annehmen kann. Ist die zweite Axe b gegeben, so kennt man vermöge der gegebenen Schraubenbewegung die Lagen b_1, b_3. Durch Rotation um die unbekannte erste Axe muss b aus der Lage b_1 in die definitive Lage b_3 und jeder ihrer Punkte, wie z. B. B aus der Lage B_1 nach B_3 gelangen. Eine Ebene senkrecht auf der Verbindungslinie B_1B_3 in deren Mitte errichtet

*) Rodrigues, Des lois géométriques qui régissent le déplacement d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements. Journal de math. pures et appl. p. Liouville, T. V, p. 390.

enthält daher die Lage a_1 der ersten Axe a. Dieselbe Construction mit der Verbindungslinie $E_1 E_3$ der beiden Lagen E_1, E_3 eines andern Punktes E von b liefert ebenso eine zweite Ebene und damit die Axe selbst als Schnittlinie beider Perpendikularebenen. Ist die erste Axe a bekannt, so kennt man ebenso a_1, a_3 und da a durch Rotation um die zweite Axe b aus der Lage a_1 nach a_3 gelangen muss, so ist b_1 die Schnittlinie der Normalebenen in den Mitten der Verbindungslinien homologer Punkte von a_1, a_3.

Zwei Axen a, b, für welche die Rotationsfolge einer gegebenen Schraubenbewegung (Θ, τ) aequivalent ist, heissen nach Chasles conjugirte Axen. Für alle solche Paare von Axen, ihre Amplituden ϑ, ϑ' und ihren kürzesten Abstand d gilt der obige Satz von Rodrigues

$$\tfrac{1}{2}\tau \sin \tfrac{1}{2}\Theta = d \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\vartheta \sin \tfrac{1}{2}\vartheta' \,.\, \sin (ab)\,.$$

Trägt man daher auf conjugirten Axen Längen auf, proportional den Sinussen der halben Amplituden $\sin \frac{1}{2}\vartheta$ und $\sin \frac{1}{2}\vartheta'$ um sie und construirt mit ihnen als Gegenkanten ein Tetraeder, so bleibt dessen Volumen constant, auf welche Weise auch immer man die Schraubenbewegung in eine Rotationsfolge um zwei conjugirte Axen auflösen möge. Sind nämlich AB, CD zwei Gegenkanten eines Tetraeders $ABCD$, zieht man von A eine Strecke AD' geometrisch gleich CD und von C eine Strecke CB' geometrisch gleich AB und construirt über AB, AD' und CD, CB' Parallelogramme, so liegen dieselben in den Grenzflächen der durch AB und CD bestimmten Parallelschicht und sind Gegenflächen eines Parallelepipeds, dessen Volumen das sechsfache Volumen des Tetraeders ist, welches AB, CD zu Gegenkanten hat. Der Abstand der beiden Parallelogramme ist der kürzeste Abstand dieser Gegenkanten AB, CD und die Fläche eines Parallelogramms ist das Product $AB \,.\, CD$ derselben, multiplicirt mit dem Sinus ihrer Neigung. Daher ist Tetr. $ABCD = \frac{1}{6} d \,.\, AB \,.\, CD \,.\, \sin (AB, CD)$, wenn d jenen kürzesten Abstand bezeichnet.

§. 15. Die Folge von beliebig vielen Rotationen, sowie auch von Rotationen, gemischt mit Translationen, ist immer einer Schraubenbewegung aequivalent. Da die Folge einer Rotation und einer Translation willkührlich ist, so kann man alle Rotationen in der gegebenen Folge zusammensetzen; ebenso die Translationen und hierauf die resultirende Rotation mit der resultirenden Translation zu einer Schraubenbewegung verbinden.

Die Folge zweier Schraubenbewegungen ist einer einzigen Schraubenbewegung aequivalent; die Ordnung der Folge ist nicht vertauschbar. Man erhält dieselbe, indem man jede Schraubenbewegung in ihre Rotations- und Translationscomponente zerlegt, alle Rotationen und Translationen für sich zu einer Rotation und Translation vereinigt und schliesslich diese beiden Bewegungen zur Schraubenbewegung verbindet.

§. 16. Werden die Amplituden der Rotationen um die Axen a, b unendlich kleine Grössen $d\vartheta$, $d\vartheta'$, so werden Amplitude und Translation der aus ihnen resultirenden Schraubenbewegung gleichfalls unendlich kleine Grössen $d\Theta$, $d\tau$, und reduciren sich die zwischen ihnen bestehenden Gleichungen auf die folgenden:

$$\frac{\sin(ca)}{d\vartheta'} = \frac{\sin(cb)}{d\vartheta} = \frac{\sin(ab)}{d\Theta},\ d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\,d\vartheta\,d\vartheta' \cos(ab)$$

$$d\tau\, d\Theta = d\,.\,d\vartheta\, d\vartheta' \sin(ab).$$

Die Axen a, b, c werden einer Ebene parallel; die Schraubenaxe c schneidet den kürzesten Abstand der Axen a, b rechtwinklig. Die Rotation $d\vartheta$ um a hebt die Axe b unendlich wenig aus der Lage b_1, die Rotation $d\vartheta'$ um b die Axe a unendlich wenig aus der Lage a_1 heraus. Der Unterschied der Folge der Rotation verschwindet wegen der unendlichen Kleinheit der Bewegungen. Es ist lehrreich den vorliegenden Fall direct zu behandeln, was wir thun wollen.

Es sei (Fig. 71.) AB der kürzeste Abstand der Axen a, b, um welche das System die unendlich kleinen Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ besitzt, deren Sinn durch die Pfeilspitzen bezeichnet ist. Durch irgend einen Punkt C auf AB ziehen wir a' parallel a und ertheilen dem System um diese Axe zwei entgegengesetzt gleiche Rotationen: $d\vartheta$, $-d\vartheta$; ebenso ziehen wir durch denselben Punkt b' parallel b und fügen die entgegengesetzten Rotationen $d\vartheta'$, $-d\vartheta'$ um b' zu. Das System besitzt dann um die beiden sich in C schneidenden Axen a', b' die Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ in Verbindung mit zwei Rotationspaaren $(d\vartheta, -d\vartheta)$, $(d\vartheta', -d\vartheta')$, welche Translationen $d\tau$, $d\tau'$ aequivalent sind, senkrecht zu den Ebenen (aa'), (bb'). Die Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um a', b' sind aequivalent einer resultirenden Amplitude $d\Theta$ um die Diagonale c des über $d\vartheta$, $d\vartheta'$ oder ihnen proportionalen Längen construirten Parallelogramms, wenn diese auf den Axen a', b' aufgetragen werden. Legen wir durch C in der Ebene des Parallelogramms eine zur Axe c senkrechte Gerade und zerlegen jede der Translationen $d\tau$, $d\tau'$ in zwei Componenten, die eine parallel c, die andere senkrecht zu ihr. Suchen wir sodann die Lage des Punktes C so zu bestimmen, dass diese letzteren Componenten von $d\tau$, $d\tau'$ entgegengesetzt gleich werden, so wird die Axe c die Axe der gesuchten Schraubenbewegung, $d\Theta$ ihre Amplitude und die Summe der Componenten von $d\tau$, $d\tau'$ parallel zu c die Translation dT derselben sein.

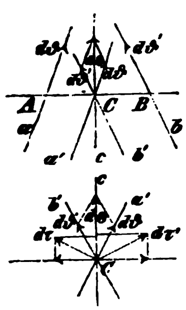
Fig. 71.

Nun hat man für $d\tau$, $d\tau'$ als die Momente der Rotationspaare:

$$d\tau = AC \,.\, d\vartheta\,, \quad d\tau' = CB \,.\, d\vartheta'$$

und für ihre Componenten senkrecht zu c:

$$d\tau \cos(ac) = AC \,.\, d\vartheta \cos(ac)\,, \quad d\tau' \cos(cb) = CB \,.\, d\vartheta' \cos(cb)$$

und da letztere sich tilgen sollen, so muss

$$AC \,.\, d\vartheta \cos(ac) - CB \,.\, d\vartheta' \cos(cb) = 0$$

sein.

Zu dieser Bedingung tritt noch hinzu:

$$AC + CB = AB.$$

Aus beiden folgt

$$AC = \frac{AB \,.\, d\vartheta' \cos(cb)}{d\vartheta \,.\, \cos(ac) + d\vartheta' \,.\, \cos(cb)}, \quad CB = \frac{AB \,.\, d\vartheta \cos(ac)}{d\vartheta \,.\, \cos(ac) + d\vartheta' \,.\, \cos(cb)}.$$

Nun ist aber $d\vartheta \,.\, \cos(ca) + d\vartheta' \,.\, \cos(cb) = d\Theta$, nämlich gleich der aus $d\vartheta$, $d\vartheta'$ resultirenden Amplitude $d\Theta$, welche die Amplitude der Schraubenbewegung wird; denn die Diagonale eines Parallelogramms ist stets gleich der Summe der Projectionen der Seiten auf ihre Richtung. Daher wird

$$AC = AB \cdot \frac{d\vartheta'}{d\Theta} \cos(cb)\,, \quad CB = AB \cdot \frac{d\vartheta}{d\Theta} \cos(ca),$$

oder, wenn man hiermit die Projectionen

$$\frac{\sin(ac)}{d\vartheta'} = \frac{\sin(cb)}{d\vartheta} = \frac{\sin(ab)}{d\Theta}$$

combinirt, um die Verhältnisse $\frac{d\vartheta'}{d\Theta}$ und $\frac{d\vartheta}{d\Theta}$ zu eliminiren:

$$AC = AB \cdot \frac{\sin(ac)\cos(cb)}{\sin(ab)}\,, \quad CB = AB \cdot \frac{\sin(cb) \,.\, \cos(ac)}{\sin(ab)}.$$

Hieraus ergibt sich für das Theilungsverhältniss der Strecke AB durch die Axe der resultirenden Schraubenbewegung

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\operatorname{tg}(ac)}{\operatorname{tg}(cb)}.$$

Die Axe c der aus zwei unendlichkleinen Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$ um gekreuzte Axen a, b resultirenden Schraubenbewegung theilt den kürzesten Abstand dieser Axen im Verhältniss der Tangenten der Winkel, welche die Schraubenaxe mit den Axen a, b bilden.

Die Summe der beiden Translationscomponenten parallel der Axe c bilden die Translation dT der Schraubenbewegung, nämlich

$$dT = d\tau \,.\, \sin(ac) + d\tau' \,.\, \sin(cb).$$

Aus den Proportionen zwischen $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\Theta$, sin ac, sin cb, sin ab folgt aber

$$\sin(ac) = \frac{d\vartheta'}{d\Theta}\sin(ab),\ \sin(cb) = \frac{d\vartheta}{d\Theta}\sin(ab)$$

und hiemit wird mit Rücksicht auf die obigen Formeln $d\tau = AC\,.\,d\vartheta$, $d\tau' = CB\,.\,d\vartheta'$:

$$dT = (AC + CB)\frac{d\vartheta d\vartheta'}{d\Theta}\sin(ab) = AB\,\frac{d\vartheta d\vartheta'}{d\Theta}\sin(ab).$$

welche Gleichung nichts anderes, als die auf unendlich kleine Grössen reducirte Rodrigues'sche Gleichung ist.

Für die Amplitude $d\Theta$ der Schraubenbewegung ist

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\,d\vartheta d\vartheta'\cos(ab).$$

Für die Bestimmung der Lage der Axe c ist das Vorzeichen des Theilungsverhältnisses $AC:CB$ sorgfältig zu berücksichtigen.

Wir wollen das Theilungsverhältniss des kürzesten Abstandes der Axen durch das Verhältniss der unendlich kleinen Amplituden und den Winkel (ab) der Axen darstellen.

Man hat hiezu:

$$\cos^2(ac) = 1 - \sin^2(ac) = 1 - \left(\frac{d\vartheta'}{d\Theta}\right)^2\sin^2(ab)$$

$$= [d\vartheta^2 + d\vartheta'^2\cos^2(ab) + 2\,d\vartheta d\vartheta'\cos(ab)]^2 : d\Theta^2 = [d\vartheta + d\vartheta'\cos(ab)]^2 : d\Theta^2;$$

daher

$$\cos(ac) = \frac{d\vartheta + d\vartheta'\cos(ab)}{d\Theta} \quad \text{und ebenso} \quad \cos(cb) = \frac{d\vartheta' + d\vartheta\cos(ab)}{d\Theta}$$

und da

$$\sin(ac) = \frac{d\vartheta'}{d\Theta}\sin(ab),\qquad \sin(cb) = \frac{d\vartheta}{d\Theta}\sin(ab)$$

ist, so wird

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\operatorname{tg}(ac)}{\operatorname{tg}(cb)} = \frac{d\vartheta'}{d\vartheta}\cdot\frac{d\vartheta' + d\vartheta\cos(ab)}{d\vartheta + d\vartheta'\cos(ab)}.$$

Für $(ab) = 0$ erhält man

$$AC:CB = d\vartheta' : d\vartheta,\quad d\Theta = d\vartheta + d\vartheta',\quad dT = 0$$

und kommt auf den Fall §. 8 paralleler Axen und Amplituden gleichen Sinnes zurück. Für $(ab) = \frac{1}{2}\pi$ folgt

$$AC:CB = (d\vartheta' : d\vartheta)^2,\ d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2,\ dT = \frac{AB\,.\,d\vartheta d\vartheta'}{\sqrt{d\vartheta^2 + d\vartheta'^2}}.$$

Für $(ab) = \pi$ tritt der Fall paralleler Axen mit entgegengesetzten Amplituden ein und wird $AC:CB = -\frac{d\vartheta'}{d\vartheta}$, die Axe c fällt ausserhalb der Schicht (ab), $T = 0$ u. s. w. — Rückt b ins Unendliche, sodass

$$\lim (AB \,.\, d\vartheta') = \text{const.}$$

wird, so erhält man den Fall einer Rotation und einer Translation, schräg geneigt gegen die Rotationsaxe.

III. Capitel.

Geschwindigkeit eines Punktes; Projectionen und Componenten derselben auf Axen und Ebenen. Roberval's Methode der Tangenten. Aequivalenz der Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten.

§. 1. Die Lehren der beiden vorigen Capitel dieses Theilen bilden die Grundlage für das Studium der Bewegung des unveränderlichen Systems. Bei dem Uebergange desselben aus einer Lage in die unmittelbar folgende beschreiben seine Punkte unendlich kleine Wegstrecken, welche in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen, die von der besonderen Art der Bewegung abhängen. Wegen der möglichen Verschiedenheit dieser unendlich kleinen Wege ist die Bewegung im Allgemeinen in verschiedenen Punkten des Systems von verschiedener Intensität und sagt man, dass Punkte, deren Wege grösser, als die andrer Punkte sind, sich rascher bewegen, als diese. Auch kann das ganze System in allen seinen Punkten dieselbe geometrische Bewegung verschiedene Male mit verschiedener Intensität ausführen.

Um die innere Natur der Bewegung eines Punktes oder eines Systems, die wir als Intensität der Bewegung bezeichnen, zu erkennen, vergleicht man die Bewegung mit andern bereits bekannten Bewegungen mit Hülfe des Begriffs der Geschwindigkeit. Derselbe basirt auf der Vorstellung der Zeit. Die Zeit wird als continuirlich, unbegrenzt, aber beliebig begrenzbar, mithin als messbar gedacht; die Einheit derselben ist an sich willkührlich, gewöhnlich wählt man aber dazu die Secunde mittlerer Zeit, wie sie die Uhren angeben. Die Astronomie unterscheidet nämlich drei Arten der Zeiteintheilung: die Sternzeit, die wahre Sonnenzeit und die mittlere Sonnenzeit. Der Sterntag ist die constante Umdrehungszeit der Erde; der wahre Sonnentag ist die Zeit des scheinbaren Umlaufs der Sonne um die Erde und ist veränderlich im Laufe des Jahres, der mittlere Sonnentag aber ist die mittlere Dauer des wahren Sonnentages. Der mittlere Sonnentag hat 86400, der Sterntag nur 86164,09 Secunden mittlerer Zeit; letzterer ist also etwa um 4 Minuten kürzer als ersterer.

In allen Untersuchungen der Mechanik, wobei es sich um Bewegung handelt, tritt die Zeit als unabhängige Variabele auf und pflegt als solche mit dem Buchstaben t bezeichnet zu werden; für bestimmte constante Zeiten reservirt man sich gern die gleichlautenden T, τ.

§. 2. Wir beginnen mit der Geschwindigkeit des Punktes und werden erst später von der Geschwindigkeit im Systeme reden. Die Bewegung eines Punktes heisst gleichförmig, wenn derselbe in gleichen, übrigens beliebigen Zeiten gleiche Längen seiner Bahn durchläuft; sie heisst veränderlich in jedem andern Falle. Zwei gleichförmige Bewegungen besitzen gleiche Geschwindigkeit, wenn der bewegliche Punkt bei beiden gleiche Längen in derselben Zeit durchläuft; ist die Weglänge bei der einen das Doppelte, Dreifache, Vierfache etc. der Weglänge bei der andern, so heisst die Geschwindigkeit derselben doppelt so gross, dreimal so gross, viermal so gross etc., als die der anderen. Sind daher V, V' die Geschwindigkeiten zweier gleichförmigen Bewegungen, a, a' die Längen, welche die beweglichen Punkte in der Zeiteinheit zurücklegen, so besteht die Proportion $V : V' = a : a'$. Wählt man nun zur Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit durchlaufen wird, so wird diese Proportion, wenn V' die Einheit der Geschwindigkeit bedeutet und mithin $a' = 1$ gesetzt, die Masszahl $V : V'$ aber mit v bezeichnet wird, übergehen in $v = a$, d. h. bei der gleichförmigen Bewegung ist die Masszahl der Geschwindigkeit die Masszahl der Länge, welche in der Secunde durchlaufen wird. Kürzer, wenn auch weniger genau, sagt man gewöhnlich: Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit der Weg des Punktes in der Zeiteinheit. — Beschreibt der bewegliche Punkt in der Zeit t den Weg w gleichförmig mit der Geschwindigkeit a, so ist $\frac{w}{t}$ der Weg, welchen er in der Zeiteinheit zurücklegt, also $\frac{w}{t} = a$ oder $w = at$, d. h.: Bei der gleichförmigen Bewegung ist der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg gleich dem Producte aus der Geschwindigkeit und der Zeit.

Ein Punkt bewege sich in der Linie OS gleichförmig mit der Geschwindigkeit a, befinde sich zu den Zeiten t_0 und t respective in M_0 und M und seien von dem beliebigen Anfangspunkte O ab gerechnet $OM_0 = s_0$, $OM = s$, diese Abstände positiv genommen im Sinne der Bewegung, negativ im entgegengesetzten; dann ist $M_0M = s - s_0$ der in der Zeit $t - t_0$ zurückgelegte Weg und folglich

Fig. 72.

$$s - s_0 = a(t - t_0).$$

Für $t_0 = 0$, d. h. wenn man die Zeit von dem Momente an zählt, wo der bewegliche Punkt den Punkt M_0 verlässt, wird diese Gleichung etwas einfacher, nämlich

$$s = s_0 + at.$$

Sie, sowie die vorige etwas allgemeinere heisst die **Gleichung der gleichförmigen Bewegung.** Sie ist linear und bestimmt den Abstand s des beweglichen Punktes M von einem beliebigen Anfangspunkte O seiner Bahn als Function der Zeit. Erfolgt die Bewegung im entgegengesetzten Sinne, so ist $s_0 - s$ oder $-(s - s_0)$ der in der Zeit t durchlaufene Weg und folglich $-(s - s_0) = at$ oder $s - s_0 = (-a)t$ die Gleichung der Bewegung. Um dieselbe mit der vorigen in Harmonie zu bringen, muss also die Geschwindigkeit das Zeichen wechseln. Ebenso überzeugt man sich leicht, dass dieselbe Gleichung für positive, wie für negative Werthe von t gilt und dass überhaupt sämmtliche darin vorkommende Grössen s_0, t_0, s, t, a beliebige positive oder negative Werthe haben können, ohne die Gültigkeit der Gleichung zu beeinträchtigen.

Man kann die Gleichung der gleichförmigen Bewegung geometrisch construiren, indem man die Zeiten t als Abscissen, die Abstände s als Ordinaten eines Parallelcoordinatensystems aufträgt, wobei man die Einheit der Zeit gewöhnlich durch dieselbe Länge darstellt, wie die des Raumes. Die Gleichung stellt alsdann eine gerade Linie dar, welche durch den Punkt (s_0, t_0) geht, und wenn das Coordinatensystem rechtwinklig ist, so drückt die Geschwindigkeit a die Tangente der Neigung dieser Geraden gegen die Axe der t aus.

§. 3. Bei der veränderlichen Bewegung legt der bewegliche Punkt in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurück. Man kann daher nicht von der Geschwindigkeit einer solchen Bewegung im Allgemeinen, sondern nur von der Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit oder an einer bestimmten Stelle der Bahn reden. Um die Geschwindigkeit einer solchen Bewegung am Ende der Zeit t zu erkennen, denken wir in diesem Momente alles hinweg, was die Veränderlichkeit derselben bestimmt, sodass die Bewegung in eine gleichförmige übergeht und definiren, wie folgt. **Die Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung am Ende der Zeit t ist die Geschwindigkeit derjenigen unveränderlichen Bewegung, in welche die veränderliche Bewegung in diesem Momente übergeht, wenn plötzlich alles hinwegfällt, was die Veränderlichkeit bestimmt; sie ist demnach der Weg, welchen der Punkt in der nächsten Secunde zurücklegen würde, wenn die Bewegung gleichförmig würde.**

Um den analytischen Ausdruck dieser Geschwindigkeit, welche im Allgemeinen mit der Zeit und der Stelle der Bahn variiren wird, zu finden, seien (Fig. 72) $OM = s$ und $OM' = s + \Delta s$ die Abstände des beweglichen Punktes zu den Zeiten t und $t + \Delta t$ von irgend einem festen Punkte O

der Bahn, sodass $MM' = \Delta s$ den in der Zeit Δt durchlaufenen Weg darstellt; es seien ferner v und $v + \Delta v$ die Werthe der Geschwindigkeit, welche der Punkt zu denselben Zeiten besitzt und schliesslich werde Δt bereits so klein gedacht, dass innerhalb dieses Zeitintervalls die Aenderung Δv der Geschwindigkeit das Zeichen nicht wechselt, d. h. v selbst während dieses Intervalles nicht vom Abnehmen zum Wachsen oder von diesem zu jenem übergeht. Würde nun der bewegliche Punkt während der Zeit Δt das einemal mit der Geschwindigkeit v, das anderemal mit der Geschwindigkeit $v + \Delta v$ in der Richtung von M nach M' sich gleichförmig bewegen, so wären $v \,.\, \Delta t$ und $(v + \Delta v) \,.\, \Delta t$ seine Wege, aber keiner von ihnen würde die mit der veränderlichen Geschwindigkeit durchlaufene Strecke Δs darstellen, vielmehr würde Δs zwischen beide fallen, sodass mit Rücksicht auf das Vorzeichen von Δv die Ungleichung

$$v \,.\, \Delta t \lesseqgtr \Delta s \lesseqgtr (v + \Delta v) \Delta t$$

besteht, aus welcher durch Division mit Δt die folgende entsteht:

$$v \lesseqgtr \frac{\Delta s}{\Delta t} \lesseqgtr v + \Delta v.$$

Lässt man nun Δt ohne Ende abnehmen, welches unmittelbar auch die unendliche Abnahme von Δs und Δv nach sich zieht, so fallen die Grenzwerthe v und $v + \Delta v$ zusammen und mit ihnen folglich auch der Grenzwerth $\frac{ds}{dt}$ von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Es ergibt sich daher durch diesen Grenzübergang die Gleichung

$$v = \frac{ds}{dt},$$

d. h. die Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung am Ende der Zeit t ist die Derivirte des von dem beweglichen Punkte durchlaufenen Raumes nach der Zeit, d. h. das Element dieses Raumes, dividirt durch das Zeitelement, in welchem es durchlaufen wird.

Die gleichförmige Bewegung ist ein specieller Fall veränderlicher Bewegung; für sie reducirt sich die Geschwindigkeit auf eine Constante. Die Gleichung für die gleichförmige Bewegung, nämlich $s = s_0 + at$ liefert übereinstimmend hiemit $v = \frac{ds}{dt} = a$. — Aus der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ folgt $ds = v dt$, d. h. das während des Zeitelementes dt beschriebene Bahnelement ds wird erhalten, indem man die Geschwindigkeit v mit dem Zeitelemente multiplicirt. Nun galt für die gleichförmige Bewegung der Satz, dass der Weg gleich dem Producte der Geschwindigkeit und der Zeit ist, für beliebige endliche Zeiten. Man sieht daher, dass bei einer beliebigen Bewegung derselbe Satz für die Bewegung während des Zeitelementes gilt und man während desselben jede Bewegung als eine gleichförmige behandeln darf.

§. 4. Ist v als Function der Zeit bekannt, so liefert die Gleichung $ds = v dt$ durch Integration die Gleichung der Bewegung, nämlich:

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} v dt,$$

worin t_0, s_0 zwei zusammengehörige Specialwerthe von t und s sind. Ist v als Function von s gegeben, so erhält man die Gleichung der Bewegung unter der Form:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}.$$

Die Gleichung der Bewegung $s = f(t)$ kann analog, wie in §. 2. geometrisch construirt werden. Sie stellt eine Curve dar, die Tangente der Neigung derselben gegen die Axe der t ist die Geschwindigkeit und es gibt mithin das Steigen und Fallen der Tangente das Wachsen und Abnehmen der Geschwindigkeit an. Die Tangente an die Curve ist aber selbst die Linie, welche eine gleichförmige Bewegung darstellt; man sieht daher, wie die Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung übereinkommt mit der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, mit welcher sie während des Zeitelementes zusammenfällt.

Ist die Geschwindigkeit als Function der Zeit bekannt, so kann man dieselbe als Ordinate einer Curve construiren für die Zeit als Abscisse. Diese Curve heisst die Geschwindigkeitscurve. Für die gleichförmige Bewegung ist sie eine mit der Abscissenaxe parallel laufende Gerade. Der Flächenraum dieser Curve, begrenzt von zwei Ordinaten, dem zwischenliegenden Bogen und der Abscissenaxe, nämlich das Integral $\int_{t_0}^{t} v\, dt$ stellt die Differenz $s - s_0$, d. h. den in der Zeit $t - t_0$ durchlaufenen Weg dar.

§. 5. Bisher war nur von der Grösse der Geschwindigkeit die Rede; man spricht aber auch von ihrer Richtung. Unter der Richtung der Geschwindigkeit versteht man die Richtung der Bewegung, nämlich die Tangente der Bahn des beweglichen Punktes. Bei der geradlinigen Bewegung bleibt mithin die Richtung derselben fortwährend die nämliche, bei der krummlinigen wechselt sie von Punkt zu Punkt. Würde bei der krummlinigen Bewegung alles plötzlich hinwegfallen, was die Bahn krümmt, so würde der bewegliche Punkt in der Richtung seiner Bewegung, d. h. in der Tangente der Bahn seine Bewegung fortsetzen und dieselbe würde fortan geradlinig sein; würden zugleich auch alle Umstände hinwegfallen, welche die Bewegung veränderlich machen, so würde die Bewegung gleichförmig werden. Der Punkt würde alsdann in der Richtung der Tangente mit der zuletzt erlangten Geschwindigkeit sich gleichförmig bewegen. Man pflegt auf der Tangente vom Berührungspunkte aus im Sinne der Bewegung die Geschwindigkeit als Länge aufzutragen. Von den beiden die Geschwindigkeit bestimmenden Merkmalen, Grösse und Richtung, kann jedes für sich und können auch beide zusammen unveränderlich werden.

Die Veränderung, welche die Geschwindigkeit eines Punktes im Laufe der Bewegung nach Grösse und Richtung erleidet, kann man zweckmässig durch eine Curve darstellen, welche von Hamilton, ihrem Erfinder, der Hodograph*) genannt wird. Zieht man nämlich von irgend einem Punkte O aus Radienvectoren, geometrisch gleich den Geschwindigkeiten des beweglichen Punktes, so bilden ihre Endpunkte diese Curve. Die Richtungslinien der Radienvectoren bilden eine Kegelfläche, deren Tangentenebenen den Schmiegungsebenen der Bahn des Punktes parallel sind. Ist die Bahn eine ebene Curve, so ist auch der Hodograph eben; ist die Bewegung des Punktes gleichförmig, so schneidet der Hodograph seine Radienvectoren rechtwinklig und geht durch die Abwickelung der Kegelfläche in einen Kreis über. In der Lehre von der Beschleunigung werden wir den Hodographen ausführlicher besprechen.

§. 6. Als Beispiel wählen wir die Bewegung, deren Gleichung

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

ist. Für sie ist $v = \dfrac{ds}{dt} = v_0 + \alpha t$, mithin ändert sich die Geschwindigkeit der Zeit proportional und stellt der Coefficient α die nach jeder Zeiteinheit erfolgte Aenderung derselben dar. Die Geschwindigkeitscurve ist eine Gerade, welche gegen die Axe der t unter einem Winkel λ geneigt ist, für welchen $\tang \lambda = \alpha$ ist. Die Bewegung heisst die gleichförmig veränderliche und zwar je nach der positiven oder negativen Beschaffenheit von α gleichförmig beschleunigt oder gleichförmig verzögert; α selbst wird die Beschleunigung genannt. Der in der Zeit t durchlaufene Weg ist $s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} t (v_0 + v)$. Er wird durch den Inhalt des Trapezes der Geschwindigkeitslinie dargestellt. Wir werden später auf diese Bewegung zurückkommen.

§. 7. Da jede Bewegung eine Gleichung hat zwischen s und t, so können einige Sätze der analytischen Geometrie der Ebene unmittelbar in die Mechanik übersetzt werden, sobald man voraussetzt, dass zwei oder mehrere Bewegungen zugleich auf derselben Bahn erfolgen. So hat die Aufsuchung der Coordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden die Lösung der mechanischen Aufgabe zur Folge: „Zwei Punkte bewegen sich in derselben Bahn, die Gleichungen ihrer gleichförmigen Bewegungen sind $s = s_0 + at$ und $s = \sigma_0 + \alpha t$, wann und wo werden

*) Vgl. Hamilton, Elements of Quaternions, London 1866, pp. 100 u. 718.

sich die Punkte begegnen?" Ist die Bahn eine in sich zurückkehrende Linie, so ergeben sich viele Lösungen. An die Stelle der gleichförmigen Bewegungen können hiebei andere treten, etc. Die Bedingung, dass drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, liefert mechanisch gedeutet die Lösung der Aufgabe: „Drei Punkte bewegen sich gleichförmig auf derselben Bahn, werden sie überhaupt einmal alle drei zusammentreffen und wann und wo wird dies geschehen?" u. s. w.

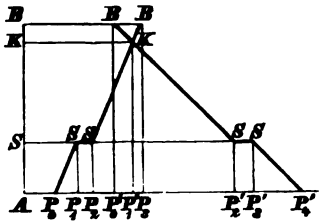

Fig. 73.

Die Technik macht hiervon nützlichen Gebrauch. Hierher gehört z. B. die für die graphischen Eisenbahnfahrpläne übliche Construction. Es sei (Fig. 73) $P_0 SSKB$ die Linie, deren Ordinaten die von einem beweglichen Punkte in den durch die Abscissen angegebenen Zeiten durchlaufenen Strecken darstellen. Die Figur zeigt, dass der Punkt zur Zeit $t_0 = AP_0$ von A abgeht, zur Zeit $t_1 = AP_1$ in S ankommt und wenn $P_0 S$ eine Gerade ist, sich gleichförmig dorthin bewegt hat. Ist SS parallel der Axe der t, so drückt dies aus, dass der Punkt bis zur Zeit $t_2 = AP_2$ in S verweilt und wenn SB geradlinig und parallel $P_0 S$ ist, mit derselben Geschwindigkeit, wie vorher, sich von S nach B bewegt und an letzterem Orte zur Zeit $t_3 = AP_3$ ankommt. Grösserer Uebersichtlichkeit wegen kann man sich auf der Ordinatenaxe die den verschiedenen Zeiten entsprechenden Entfernungen von A aus abtragen, sodass diese Axe die geradlinig ausgestreckte Bahn des Punktes darstellt. Die Figur zeigt weiter, dass ein anderer Punkt zur Zeit $t_0' = AP_0'$ den Ort B verlässt und nach A zurückkehrt, zur Zeit $t_1' = AP_1'$ dem ersteren Punkte in K begegnet, hierauf zur Zeit $t_2' = AP_2'$ in S eintrifft, um nach einem Verweilen von $t_3' - t_2' = P_2' P_3'$ in S zur Zeit $t_4' = AP_4'$ in A anzulangen. Die Neigung der Strecken BS, SP_4' gegen die Axe der t gibt die Geschwindigkeit der Bewegung des zweiten Punktes an. Zugleich lehrt die Figur die Orte zu bestimmen, an welchen beide Punkte zu derselben Zeit sich befinden.

§. 8. Unter der mittleren Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung eines Punktes während der Zeit $t - t_0$, während welcher er den Raum $s - s_0$ durchläuft, versteht man die constante Geschwindigkeit, mit welcher er in derselben Zeit denselben Raum durchlaufen würde. Ist daher $\overset{*}{v}$ diese mittlere Geschwindigkeit, so besteht die Gleichung:

$$\overset{*}{v}(t - t_0) = s - s_0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe für $s - s_0$ aus §. 4. ein, so erhält man, falls v als Function von t oder s bekannt ist, die Formeln:

$$\overset{*}{v} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v\,dt, \quad \overset{*}{v} = \frac{s - s_0}{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{v}}.$$

Stellt (Fig. 74) die Geschwindigkeitscurve dar, so drückt der Flächenraum derselben, welcher über der Basis $t - t_0$ steht, den Weg $s - s_0$ aus und ist folglich die mittlere Geschwindigkeit die Höhe eines Rechtecks von derselben Basis, dessen Fläche gleich diesem Flächenraume ist. —

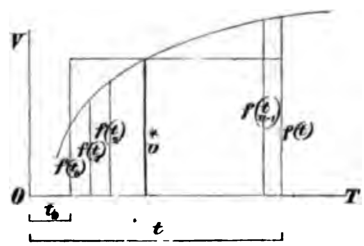

Fig. 74.

Ist $v = f(t)$, schaltet man zwischen t_0 und t in gleichen Intervallen aufeinanderfolgend die Werthe $t_1, t_2, t_3, \ldots t_{n-1}$ ein und bildet das arithmetische Mittel aus den den Zeitwerthen $t_0, t_1 \ldots t_{n-1}$ entsprechenden Werthen $f(t_0), f(t_1), f(t_2) \ldots f(t_{n-1})$ der Geschwindigkeit, nämlich die Grösse

$$\frac{1}{n}[f(t_0) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1})],$$

so geht dieselbe in der Grenze für wachsende n und abnehmende Zeitintervalle in die mittlere Geschwindigkeit über. Denn aus den Gleichungen

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \cdots = t - t_{n-1} = \delta,$$

welche die Gleichheit der Zeitintervalle ausdrücken, folgt,

$$t - t_0 = n\delta,$$

und indem man hieraus den Werth für n entnimmt und in den Ausdruck des arithmetischen Mittels einführt, nimmt dies die Gestalt

$$\frac{\delta}{t - t_0}[f(t_0) + f(t_1) + \cdots + f(t_{n-1})]$$

an und sein Grenzwerth ist daher nach der Definition des bestimmten Integrales

$$\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} f(t)\, dt,$$

wie oben.

§. 9. Projicirt man einen in Bewegung begriffenen Punkt M durch einen Stral oder auch durch eine Ebene nach irgend einem bestimmten Gesetze jeden Augenblick auf eine feste Gerade als Axe, so besitzt die Projection m desselben eine Bewegung, deren Natur von der Bewegung jenes, der Lage der Axe und dem Gesetze, welchem die Projection unterworfen ist, abhängt. Die Bewegung der Projection eines Punktes auf eine Axe wird auch die Projection der Bewegung desselben auf diese Axe genannt; ihr gegenüber mag die projicirte Bewegung die Hauptbewegung heissen.

Ist $MM' = ds$ (Fig. 75) das im Zeitelemente dt von M beschriebene Wegelement, so ist seine Projection $mm' = dx$ das in demselben Zeitelemente von m auf der Axe durchlaufene Element; es sind mithin nach §. 3.

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$

die Geschwindigkeiten der Hauptbewegung und der Projectionsbewegung zur Zeit t. Zwischen den Elementen ds und dx besteht aber vermöge des Gesetzes der Projection eine Abhängigkeit und in Folge dieser wird auch v_x von v abhängig. Für rechtwinklige Projectionen ist, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente der Hauptbahn im Sinne der Geschwindigkeit v genommen mit der Axe im Sinne von v_x bildet:

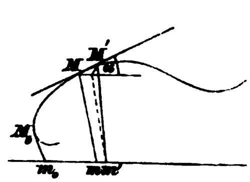

Fig. 75.

$$dx = ds \,.\, \cos \alpha \,.$$

Hierdurch wird

$$v_x = \frac{ds}{dt} \cos \alpha = v \cos \alpha \,.$$

Für schiefwinklige Projectionen wird $\cos \alpha$ durch eine andere Winkelfunction vertreten, welche, wie der Cosinus für die rechtwinklige, das Gesetz des schiefen Projicirens darstellt. In beiden Fällen aber ergibt sich, wenn man die Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf der Tangente der Hauptbahn vom Berührungspunkte aus aufträgt, dass die Geschwindigkeit der Projectionsbewegung gleich der Projection der Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf die Axe ist. Auch kann man folgendermassen schliessen, um zu diesem Satze zu gelangen. Die Abstände s und x der Punkte M und m von beliebigen Anfangspunkten M_0, m_0 auf der Hauptbahn und der Projectionsbahn sind Functionen der Zeit t. Statt x als unmittelbare Function von t anzusehen, kann man diese Grösse zunächst als Function von s und durch dieses mittelbar als Function von t betrachten. Dadurch erhält man $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ und folglich $v_x = v \frac{dx}{ds}$.

§. 10. Projiciren wir die Bewegung des Punktes M auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen, so stellen die Coordinaten x, y, z des Punktes M die Abstände seiner Projectionen m_x, m_y, m_z auf diese Axen vom Ursprunge O dar und sind ebenso, wie der Abstand s des Punktes M auf seiner Bahn von irgend einem Anfangspunkt auf derselben gerechnet, Functionen der Zeit. Dann bestehen, wenn die Winkel α, β, γ die Neigungen der Tangente der Hauptbahn gegen die Axen bezeichnen, für die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z der drei Projectionsbewegungen auf den Axen die Gleichungen

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

und

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \cos \beta, \quad v_z = v \cos \gamma \,.$$

Es stellen mithin die ersten Derivirten der Coordinaten des beweglichen Punktes in Bezug auf die Zeit die Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen auf den Coordinatenaxen dar und sind gleich den Projectionen der Geschwindigkeit der Hauptbewegung auf diese Axen.

Da die Quadratsumme der drei Projectionen einer Strecke auf drei rechtwinklige Axen gleich dem Quadrate der Strecke selbst ist, so folgt

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Es ist daher die Geschwindigkeit der Hauptbewegung die Diagonale des über den Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen auf drei rechtwinklige Axen construirten Parallelepipeds d. h. die geometrische Summe derselben.

Endlich erhält man noch für die Richtung der Geschwindigkeit

$$\frac{\cos\alpha}{v_x} = \frac{\cos\beta}{v_y} = \frac{\cos\gamma}{v_z} = \frac{1}{v}.$$

An diese Formeln schliessen sich die folgenden Hauptaufgaben über die Geschwindigkeit an, welche mit Hülfe derselben zu lösen sind:

1. Wenn die Coordinaten des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit gegeben sind, die Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen, die Geschwindigkeit der Hauptbewegung, ihre Richtung und die Beschaffenheit der Hauptbahn zu finden.

2. Wenn die Geschwindigkeiten der drei Projectionsbewegungen als Functionen der Zeit gegeben sind, die Coordinaten des beweglichen Punktes und dessen Bahn zu finden.

3. Wenn der Bogen s der Hauptbahn als Function der Zeit gegeben und die geometrische Beschaffenheit der Bahn bekannt ist, die drei Projectionsbewegungen zu bestimmen.

Ist die Bahn der Hauptbewegung eine ebene Curve, so vereinfachen sich die Formeln. Nimmt man nämlich die Ebene derselben zu einer der Coordinatenebenen, z. B. zur xy-Ebene, so erhält man

$$z = 0,\ \frac{dz}{dt} = 0,\ \cos\gamma = 0,\ \cos\beta = \sin\alpha,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,\ tg\alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

§. 11. Projicirt man einen beweglichen Punkt M durch einen Stral auf eine Ebene ε, so wird die Bewegung seiner Projection μ die Projection seiner Bewegung auf diese Ebene genannt. Sind die Projectionen rechtwinklig, so besteht zwischen den Geschwindigkeiten v und v_ε der Hauptbewegung und der Projectionsbewegung die Gleichung $v_\varepsilon = v\cos\gamma$, wenn der Winkel γ die Neigung der Bogenelemente ds und $d\sigma$ beider Bahnen, oder also die Neigung der Tangente der Hauptbahn gegen die Projectionsebene darstellt.

Projicirt man die Bewegung auf die Coordinatenebenen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z und bezeichnen α, β, γ die Neigungen der Tangente der Hauptbahn gegen die Coordinatenaxen, so sind deren Neigungen gegen die Ebenen der yz, zx, xy die Complemente zu α, β, γ und folglich die Geschwindigkeiten v_{yz}, v_{zx}, v_{xy} der drei Projectionsbewegungen

$$v_{yz} = v \sin\alpha, \quad v_{zx} = v \sin\beta, \quad v_{xy} = v \sin\gamma.$$

Zwei der Projectionsbewegungen genügen, um die Hauptbewegung zu bestimmen. Sind die Projectionsbewegungen für die drei Axen gegeben, so können die Projectionsbewegungen für die Ebenen gefunden werden und umgekehrt kann man aus jeder Projectionsbewegung für eine Ebene die beiden Projectionsbewegungen für die beiden in dieser Ebene liegenden Axen finden. Das Detail dieser Betrachtungen ergibt sich leicht aus Fig. 76.

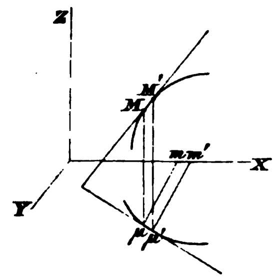

Fig. 76.

§. 12. Als Beispiel zu den vorstehenden Lehren wählen wir zunächst folgende Aufgabe.

Ein Punkt M bewegt sich mit constanter Geschwindigkeit $v = a$ auf dem Umfange eines Kreises, welches ist die Beschaffenheit der Projection seiner Bewegung auf irgend eine in der Ebene des Kreises liegende Axe, z. B. auf einen Durchmesser des Kreises?

Es seien M_0, M die Lagen des beweglichen Punktes zu den Zeiten $t = 0$ und $t = t$ und werde die Bewegung auf den durch M_0 gehenden Durchmesser $M_0 M_1$ projicirt. Der in der Zeit t durchlaufene Bogen $M_0 M = s$ ist

$$s = at = r\psi,$$

wenn r den Radius des Kreises, ψ den zu $M_0 M$ gehörigen Centriwinkel bezeichnet. Der Weg der Projection m in der Zeit t ist

$$M_0 m = \sigma = r - r\cos\psi$$

und der Abstand vom Mittelpunkte, nämlich

$$mC = x = r\cos\psi.$$

Aus der Gleichung $at = r\psi$ folgt, wenn $a : r = \omega$ gesetzt wird, $\psi = \omega t$ und hiemit wird

$$s = r\omega t, \quad x = r\cos\omega t, \quad \sigma = r - x.$$

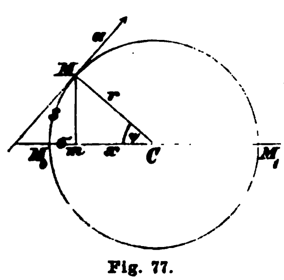

Fig. 77.

Die Geschwindigkeit der Projectionsbewegung ist, positiv im Sinne $M_0 C$ gerechnet:

$$v_x = \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dx}{dt} = r\omega \sin\omega t.$$

Zu derselben Formel führt auch der Satz $v_x = v\cos\alpha$ (§. 8.). Denn der

Winkel α, den die Tangente in M mit der Projectionsaxe bildet, ist $\frac{1}{2}\pi - \psi$, folglich wird $v_x = a \sin \psi = r\omega \sin \omega t$.

Die Gleichungen $x = r \cos \omega t$, $v_x = r\omega \sin \omega t$ geben, soweit nur die Orte und Geschwindigkeiten des Punktes m in Frage kommen, vollständigen Aufschluss über die Natur der Projectionsbewegung. Sie zeigen, dass dieselbe in Bezug auf beides periodisch ist; der Punkt m oscillirt zwischen den Grenzlagen M_0 und M_1. Den Mittelpunkt C des Kreises passirt er zu den Zeiten t, für welche $x = 0$, d. h.

$$\omega t = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi, \ldots \frac{2n+1}{2}\pi$$

wird, nämlich zu den Zeiten

$$t = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\omega},\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$

in M_0 befindet er sich zu den Zeiten, für welche $x = r$ wird; dieselben ergeben sich durch die Bedingung $\omega t = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots 2n\pi$, nämlich

$$t = \frac{2n\pi}{\omega},\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$

in M_1 ist er zu den Zeiten

$$t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Zeiten, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lagen M_0, oder M_1 verfliessen, sind gleich gross, nämlich $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und doppelt so gross, als die Zeiten, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Lagen C liegen.

Die Geschwindigkeit v_x wird Null in den Lagen M_0, M_1 und erreicht ihr Maximum $r\omega = a$, sobald der Punkt den Mittelpunkt C passirt; sie wächst, während er von M_1 bis C geht, nimmt hierauf bis zu Null ab, während er der Grenzlage M_1 zueilt, wechselt hierauf ihren Sinn und wächst im Negativen, während er nach C zurückkehrt und verschwindet wieder, sobald er die andere Grenzlage M_0 erreicht.

Trägt man v_x als Ordinate zu x als Abscisse auf, so bilden die Endpunkte der Ordinaten eine Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{r^2} + \frac{v_x^2}{r^2\omega^2} = 1$ aus den Gleichungen für x und v_x durch Elimination von t entspringt. Die Grösse ω, welche hier auftritt und mit deren Hülfe die Geschwindigkeit a durch die Gleichung $a = r\omega$ ausgedrückt wurde, stellt die Geschwindigkeit des Punktes M dar, für den Fall, dass der Kreis die Einheit als Radius besitzt. Man nennt sie Winkelgeschwindigkeit der gleichförmigen Kreisbewegung.

Die Zeit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ heisst die Oscillationsdauer der Projectionsbewegung. Sie ist unabhängig vom Radius r des Kreises und hängt nur von der Winkelgeschwindigkeit ab. Die Entfernung $M_0 M_1 = 2r$ heisst die Oscillationsamplitude; sie ist ohne Einfluss auf die Oscillationsdauer und alle Bewegungen, deren Gleichung

$$x = r \cos \omega t$$

für die verschiedenen Werthe r ist, haben dieselbe Oscillationsdauer.

§. 13. Als weitere Beispiele dürften sich zur Behandlung folgende empfehlen.

1. Ein Punkt bewegt sich gleichförmig auf einem Kreise; seine Bewegung wird auf eine Ebene projicirt, welche gegen die Ebene des Kreises geneigt ist, man soll die Projectionsbewegung hinsichtlich der Geschwindigkeit untersuchen.

2. Die Projectionen einer ebenen Bewegung sind gegeben durch die Gleichungen $x = a\cos\varkappa t$, $y = b\sin\varkappa t$, man soll bestimmen: a) die Bahn, b) die Projectionen der Geschwindigkeit, c) die Geschwindigkeit selbst und ihre Richtung.

3. Welche Bewegung ist durch die Gleichungen $x = bt$, $y = \frac{1}{2}ct^2$, welche durch $x = bt$, $y = b\sin\varkappa t$ dargestellt?

4. Ein Punkt bewegt sich auf einer gemeinen Schraubenlinie gleichförmig, seine Bewegung wird auf drei rechtwinklige Axen, nämlich zwei Durchmesser des Basiskreises und die Schraubenaxe projicirt, welches sind die Gleichungen seiner Projectionsbewegungen und die Geschwindigkeiten derselben? Welches sind die Projectionen der Bewegung auf die Ebenen der drei Axen?

5. Dieselbe Aufgabe für die gleichförmige Bewegung auf der Kegelloxodrome.

§. 14. Der Begriff der Geschwindigkeit ist einer Verallgemeinerung fähig. Die Geschwindigkeit eines Punktes zur Zeit t ist der Quotient $\frac{ds}{dt}$ der im folgenden Zeitelemente dt erfolgenden Aenderung ds des Weges s durch das Zeitelement. Ebenso kann man, wenn u irgend eine mit der Zeit t veränderliche Grösse ist, den Quotienten $\frac{du}{dt}$ die Aenderungsgeschwindigkeit der Grösse u nennen. So redet man von der Aenderungsgeschwindigkeit eines Winkels, eines Sectors etc., Geschwindigkeiten, von denen wir am geeigneten Orte dieses Buches ausführlicher handeln werden.

§. 15. Ein Punkt besitze zwei Bewegungen; vermöge der ersten allein würde er eine continuirliche Punktreihe m, m', m'' ... durchlaufen; diese Punktreihe gehöre aber einem System an, welches selbst in Bewegung begriffen ist und an dessen Bewegung die Punktreihe Theil nimmt. Der bewegliche Punkt erlangt dadurch die zweite Bewegung, welche in jedem Augenblicke dieselbe ist, wie die Bewegung des Systempunktes, mit welchem er eben zusammentrifft. Dabei kann das System, in welchem der Punkt die erste Bewegung ausführt, unveränderlich oder auch veränderlich sein, sodass die Punktreihe m, m', m'' ... im absoluten Raume entweder blos fortgeführt wird oder zugleich auch ihre Gestalt ändert. Jene Punktreihe heisst die relative Bahn des beweglichen Punktes im System und die erste Bewegung seine relative Bewegung in Bezug auf dieses; sie combinirt sich mit der Bewegung des Systems und bildet die absolute Bewegung des Punktes. Durch die Bewegung des Systems beschreibt die Punktreihe eine Fläche im absoluten Raum, welche der Ort aller Punkte ist, mit welchen der bewegliche Punkt während seiner Bewegung überhaupt zusammentreffen kann; auf dieser Fläche liegt daher auch seine absolute Bahn. Dieser Vorgang lässt aber noch eine andere Auffassungsweise zu, welche auf der Vertauschbarkeit beider Bewegungen beruht. Ein Punkt m von der Punktreihe m, m'; m'' ... beschreibt vermöge der Bewegung des Systems eine andere Punktreihe μ, μ', μ'' ..., ebenso beschreibt m' eine andere, m''

eine dritte u. s. f. Es steht nichts im Wege, diese Bewegung des Punktes m als eine relative Bewegung in einem Systeme anzusehen, welches selbst in Bewegung begriffen ist und durch seine Bewegung die Punktreihe μ', μ'', μ''' ... in die übrigen Punktreihen überführt. Dadurch wird diese Punktreihe dieselbe Fläche beschreiben, welche vorher die Reihe m, m', m'' ... beschrieb, und der bewegliche Punkt durchläuft dieselben absoluten Orte auf dieser Fläche, wie früher. Der ganze Unterschied zwischen dieser Auffassung und der vorigen besteht darin, dass dort die Reihe m, m', m'' ... die relative Bahn war, welche der Punkt in Folge der ersten Bewegung beschrieb und die Systempunkte, mit welchen er zusammentraf, vermöge der zweiten Bewegung Punktreihen, wie μ, μ', ... durchliefen, während hier die Reihe μ, μ', μ'' ... relative Bahn ist und durch die zweite Bewegung der Punkt getrieben wird, sie zu beschreiben, ihre Punkte aber vermöge der ersten Bewegung Punktreihen, wie m, m', m'' ... durchlaufen. Die erwähnte Fläche ist der Ort beider Arten von Punktreihen, welche sich gegenseitig auf ihr durchschneiden, sodass jeder Punkt der absoluten Bahn des beweglichen Punktes der Durchschnittspunkt einer Reihe der ersten und einer Reihe der zweiten Art ist.

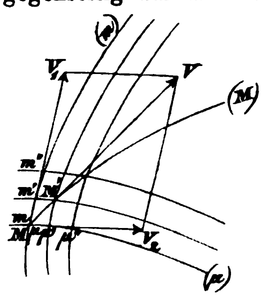

Fig. 78.

Es sei nun M (Fig. 78) der Ort des beweglichen Punktes zur Zeit t; wir ziehen durch ihn die Curve (m), die relative Bahn und die Curve (μ), die Bahn des Systempunktes μ, der eben mit m zusammenfällt, so wie die absolute Bahn (M) und legen an diese drei Curven die Tangenten, welche die Bogenelemente Mm', $M\mu'$, MM' derselben enthalten und alle drei in die Tangentenebene im Punkte M der obenerwähnten Fläche fallen. Diese Tangenten sind die Richtungen der Geschwindigkeiten der relativen Bewegung, der Bewegung des mit M zusammenfallenden Systemspunktes μ und der absoluten Bewegung, die wir mit v_1, v_2 und v bezeichnen und als Längen MV_1, MV_2, MV auf ihnen aufgetragen denken. Die absolute Bewegung des Punktes M geht aus den beiden andern hervor, ihre Geschwindigkeit wird daher die Resultante der Geschwindigkeiten jener, nämlich der Geschwindigkeit der relativen Bewegung und der Bewegung des Systempunktes genannt; diese selbst heissen ihre Componenten. Da die drei Geschwindigkeiten erhalten werden, indem wir die drei Bogenelemente durch das Zeitelement dividiren, so folgt, dass sie diesen Bogenelementen proportional sind, sodass

$$\frac{v_1}{Mm'} = \frac{v_2}{M\mu'} = \frac{v}{MM'}.$$

Verbinden wir daher die Endpunkte V_1, V, V_2 durch die Geraden $V_1 V$, $V_2 V$, so folgt, dass das Viereck $M V_1 V V_2$, in welchem die in M zusammenstossenden Seiten und Diagonale die drei Geschwindigkeiten der relativen Bewegung, der Bewegung des Systempunktes und der absoluten Bewegung darstellen, dem verschwindend kleinen Vierecke $Mm' M' \mu'$ ähnlich in ähnlicher Lage ist. Beide Vierecke sind, weil sie in die Tangentenebene der Fläche fallen, ebene Figuren, und da das Viereck der Bogenelemente als Parallelogramm verschwindet, weil im Moment des Zusammenfallens der Curven $Mm'm'' \ldots$ und $\mu' M' \ldots$ alle Punkte der einen in die entsprechenden der andern gleichzeitig zurücktreten, mithin diese Curven als parallel anzusehen sind, so folgt, dass auch das Viereck $M V_1 V V_2$ ein Parallelogramm ist.

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass die ganze Betrachtung auch mit Zugrundelegung der obenerwähnten zweiten Auffassungsweise der Bedeutung beider Bewegungen unverändert ebenso durchgeführt werden kann, also der Unterschied der Bedeutung der Bewegungen keinen Einfluss auf das Endresultat hat und folglich nicht in den Wortausdruck desselben aufgenommen zu werden braucht, der folgende unter dem Namen des Satzes vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten bekannte Satz:

Die Resultante zweier gleichzeitigen Geschwindigkeiten eines Punktes wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Diagonale des Parallelogramms dargestellt, welches aus jenen beiden Geschwindigkeiten als Seiten construirt werden kann, oder kürzer: sie ist die geometrische Summe derselben.

Umgekehrt ist die Geschwindigkeit eines Punktes aequivalent je zwei andern gleichzeitigen Geschwindigkeiten desselben, welche geometrische Summanden derselben sind.

Zur Auflösung aller die Zusammensetzung zweier Geschwindigkeiten zu ihren Resultanten und die Zerlegung einer Geschwindigkeit in zwei Componenten betreffenden Aufgaben dient das Dreieck $M V V_2$, dessen Seiten v_1, v_2, v sind. In demselben ist insbesondere

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cdot \cos(v_1 v_2), \quad \frac{\sin v v_1}{v_2} = \frac{\sin v v_2}{v_1} = \frac{\sin v_1 v_2}{v}.$$

Als specieller Fall des allgemeinen Satzes verdient Erwähnung, dass, wenn die Geschwindigkeiten dieselbe Richtung besitzen, ihre Resultante gleich ihrer Summe oder Differenz ist, je nachdem sie übereinstimmenden oder entgegengesetzten Sinnes sind, und dass ihre Resultante verschwindet, wenn sie entgegengesetzt gleich sind. Ferner:

Entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten können einem

Punkte beliebig ertheilt oder entzogen werden ohne Einfluss auf seine Bewegung.

§. 16. Besitzt ein Punkt drei Bewegungen, sodass er vermöge der ersten eine continuirliche Punktreihe durchlaufen würde, aber in einem System, welches selbst eine zweite Bewegung besitzt, an welcher jene Punktreihe Theil nimmt und zwar in einem weiteren Systeme, welches einer dritten Bewegung unterworfen ist, so ergibt sich die Geschwindigkeit seiner absoluten Bewegung als die Resultante der drei Geschwindigkeiten, welche er einzeln durch diese drei Bewegungen erlangt mit Hülfe der Diagonale des über jenen Geschwindigkeiten construirten Parallelepipeds. Denn die Geschwindigkeiten v_1, v_2 (Fig. 79.), welche von den beiden ersten Bewegungen herrühren, sind zusammen aequivalent ihrer Resultante v', welche die Diagonale des Parallelogramms über v_1, v_2 ist, und v' liefert mit v_3 die Resultante v als die Diagonale des Parallelepipeds über v_1, v_2, v_3. (**Parallelepiped der Geschwindigkeiten.**)

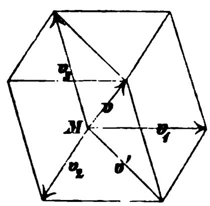

Fig. 79.

Wegen der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten nach dem Parallelogramm, sind alle Folgerungen der Streckentheorie I. Th., Cap. I zulässig. Daher der allgemeine Satz:

Die Resultante von beliebig vielen Geschwindigkeiten eines Punktes ist die geometrische Summe der einzelnen Geschwindigkeiten. (Polygon der Geschwindigkeiten.)

§. 17. Für die Zerlegung einer Geschwindigkeit v in drei Componenten v_x, v_y, v_z parallel drei rechtwinkligen Coordinatenaxen der x, y, z, sowie umgekehrt für die Zusammensetzung der letzteren zu ersterer, als ihrer Resultanten, treten die Formeln des §. 10. in Kraft, denn die Componenten sind nichts anderes als die Projectionen von v auf die Axen oder auf Gerade, welche ihnen parallel laufen.

Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots . v_n$ eines Punktes, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel

$$(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1),\ (\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2) \ldots . (\alpha_n\ \beta_n\ \gamma_n)$$

bilden, erfolgt nach I. Thl., Cap. I, §. 9. und liefert zunächst die Summen

$$X = \Sigma v_n \cos \alpha_n, \quad Y = \Sigma v_n \cos \beta_n, \quad Z = \Sigma v_n \cos \gamma_n,$$

und mit ihrer Hülfe die Resultante

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

sowie für deren Richtungswinkel a, b, c die Gleichungen

$$\frac{\cos a}{X} = \frac{\cos b}{Y} = \frac{\cos c}{Z} = \frac{1}{R}.$$

Fallen die Geschwindigkeiten alle in dieselbe Ebene, so gelten für diese als xy-Ebene die einfacheren Formeln

$$X = \Sigma v_n \cos \alpha_n, \quad Y = \Sigma v_n \sin \alpha_n,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{Y}{X}.$$

§. 18. Wird die Bewegung auf eine Ebene projicirt, so folgt daraus, dass die Projection eines geschlossenen Polygons auf eine Ebene wieder ein geschlossenes Polygon ist, dass die Resultante aus den Projectionen der Geschwindigkeiten eines Pnnktes auf eine Ebene gleich der Projection der Resultanten auf diese Ebene ist.

§. 19. Die in §. 9 und 10 behandelten Projectionen der Geschwindigkeit auf Axen und Ebenen sind Componenten derselben, welche aus Zerlegungen entspringen, auf welche der Gebrauch des Parallelcoordinatensystems hinführt. Andere Zerlegungen werden durch die Polarcoordinatensysteme veranlasst, wie wir jetzt zeigen wollen.

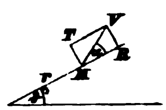

Fig. 80a.

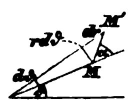

Fig. 80b.

1. Ein Punkt M bewege sich in einer Ebene und seien (Fig. 80a) r, ϑ seine Polarcoordinaten; seine Geschwindigkeit $v = MV$ soll in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine $v_r = MR$ die Richtung des Radiusvectors besitzt, die andere $v_\vartheta = MT$ senkrecht zu ihm ist. Das Zerlegungsrechteck gibt zunächst, wenn α den Winkel bedeutet, welchen die Tangente der Bahn mit dem Radiusvector bildet,

$$v_r = v \cos \alpha, \ v_\vartheta = v \sin \alpha.$$

Die Hilfsfigur (Fig. 80b) zeigt aber, dass

$$\cos \alpha = \frac{dr}{ds}, \quad \sin \alpha = \frac{r\,d\vartheta}{ds},$$

wodurch man mit Hilfe von $v = \frac{ds}{dt}$ erhält:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\vartheta = r\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man, indem man die Bewegung des Punktes zerlegt in seine relative Bewegung längs des Radiusvectors und die Bewegung, welche der mit M zusammenfallende Punkt des Radiusvectors in Folge der Rotation des Systems um den Pol annimmt. Während M das Bogenelement ds beschreibt, werden bei diesen Bewegungen die Elemente dr und $rd\vartheta$ längs des Radiusvectors und des zu ihm senkrechten Kreisbogens beschrieben und sind folglich $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\vartheta}{dt}$ die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Da die Zerlegung rechtwinklig erfolgt, so muss $v_r^2 + v_\vartheta^2 = v^2$ sein, wie man dies auch daraus sieht, dass $dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 = ds^2$ und folglich

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\,\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

ist.

2. Ein Punkt beschreibe eine Curve im Raum, seine Bewegung werde auf räumliche Polarcoordinaten r, ϑ, φ bezogen (Radiusvector, Polarwinkel zwischen ihm und der Polaraxe und Polarwinkel zwischen der Ebene des Winkels ϑ und einer Fundamentalebene) (Fig. 81a); die Geschwindigkeit v soll in drei zu einander rechtwinklige Componenten zerlegt werden, eine längs des Radiusvectors, eine senkrecht zu ihm in der Ebene des Winkels ϑ und eine senkrecht zur Ebene dieses Winkels. Sind α, β, γ die Neigungen der Tangente der Bahn gegen diese drei Richtungen, so sind diese Componenten zunächst

$$v_r = v\cos\alpha,\quad v_\vartheta = v\cos\beta,\quad v_\varphi = v\cos\gamma\,.$$

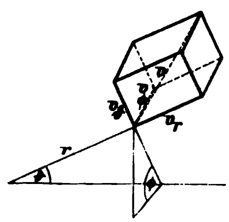

Fig. 81 a.

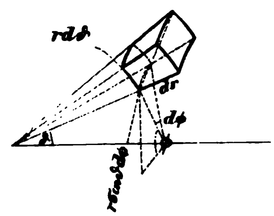

Fig. 81 b.

Von ihren Richtungen berühren die der beiden letzteren die mit dem Radiusvector r um den Pol beschriebene Kugel und sie sind alle drei zusammen die Richtungen der Eckkanten eines Elementarparallelepipeds (Fig. 81b), dessen acht Ecken der Reihe nach die Coordinaten haben: r, ϑ, φ; r, $\vartheta + d\vartheta$, φ; r, ϑ, $\varphi + d\varphi$; r, $\vartheta + d\vartheta$, $\varphi + d\varphi$; $r + dr$, ϑ, φ; $r + dr$, $\vartheta + d\vartheta$, φ; $r + dr$, ϑ, $\varphi + d\varphi$; $r + dr$, $\vartheta + d\vartheta$; $\varphi + d\varphi$. Aus demselben erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{dr}{ds},\quad \cos\beta = \frac{r\,d\vartheta}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{r\sin\vartheta\,d\varphi}{ds}$$

und mithin wegen $v = \dfrac{ds}{dt}$:

$$v_r = \frac{dr}{dt},\quad v_\vartheta = r\,\frac{d\vartheta}{dt},\quad v_\varphi = r\sin\vartheta\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

Zu denselben Formeln gelangt man auch, wenn man die Bewegung des Punktes während des Zeitelementes dt spaltet in eine relative Bewegung längs des Radiusvectors und eine sphärische Bewegung um den

Pol, diese letztere aber selbst wieder in zwei Rotationen auflöst, eine um eine zur Ebene des Winkels ϑ senkreckte Axe und eine andere um die Polaraxe. Die Elementarwege für diese drei Bewegungen sind dr, $r\,d\vartheta$, $r\sin\vartheta\,d\varphi$ und mithin ihre drei Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\vartheta}{dt}$, $r\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt}$ wie vorher. Da $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2$ ist, so gibt ihre Quadratsumme wieder $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

3. Beispiele.

1. Ein Punkt bewegt sich in der Ebene so, dass das Verhältniss der Componenten seine Geschwindigkeit v, nämlich v_r und v_ϑ längs des Radiusvectors und senkrecht zu ihm constant gleich $\varkappa$ sei. Aus

$$v_r : v_\vartheta = \frac{dr}{r\,d\vartheta} = \varkappa$$

folgt, $r = ae^{\varkappa\vartheta}$ (logarithmische Spirale; der Neigungswinkel α der Tangente gegen den Radiusvector ist constant, so dass $\operatorname{cotg}\alpha = \varkappa$). Ferner ist $v = \frac{v_\vartheta}{\sin\alpha}$. Für die Projectionsbewegung auf der Polaraxe ist

$$x = r\cos\vartheta = ae^{\varkappa\vartheta}\cos\vartheta,\quad v_x = v\cos(\alpha+\vartheta).$$

2. Ein Punkt bewegt sich auf der geraden Kegelfläche $\vartheta = \beta$ und sei $v_r : v_\varphi = \varkappa'$. Dann ist $\frac{dr}{r\sin\beta\,.\,d\varphi} = \varkappa'$, $r = ae^{\varkappa'\sin\beta\cdot\varphi}$ (Kegelloxodrome; für die Neigung α' der Tangente gegen den Radiusvector ist $\operatorname{cotg}\alpha' = \varkappa'$). $v = \frac{r\,d\varphi}{dt}\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha'}$. Für die Projectionsbewegung auf eine zur Polaraxe senkrechte Ebene ist der Radiusvector

$$\varrho = r\sin\beta = a'\sin\beta\,e^{\varkappa'\sin\beta\cdot\varphi} = ae^{\varkappa\varphi},$$

wo $a = a'\sin\beta$, $\varkappa = \varkappa'\sin\beta$.

3. Ein Punkt bewegt sich auf der Kugelfläche $r = A$ so, dass $v_\vartheta : v_\varphi = \varkappa'' = \operatorname{cotg}\alpha''$. Hier ist $\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \varkappa''\,d\varphi$, also $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = a''e^{\varkappa''\varphi}$ (Kugelloxodrome).

4. Ein Punkt bewegt sich im Raume so, dass

$$\frac{v_r}{\lambda} = \frac{v_\vartheta}{\mu} = \frac{v_\varphi}{\nu} = \frac{v}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}$$

wo λ, μ, ν constant sind. Dann ist

$$\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{\mu}\,d\vartheta,\quad \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\mu}{\nu}\,d\varphi$$

also

$$r = ae^{\frac{\lambda}{\mu}\varphi},\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = a'e^{\frac{\mu}{\nu}\vartheta}.$$

Die relative Bahn in der Ebene des Winkels ϑ ist eine logarithmische Spirale, für welche die Cotangente ihrer Neigung gegen den Radiusvector $\lambda : \mu$ ist. Die zweite Gleichung ist die einer Kegelfläche, welche durch eine Kugelloxodrome geht. Der Kegel nähert sich asymptotisch dem Aequator der Kugel.

§. 20. Von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten hat *Roberval* (1602—1675) eine sehr ingeniöse Anwendung auf die Construction der Tangente der Curven gemacht, welche von einem beweglichen Punkte beschrieben werden, indem er die Bewegung in zwei oder mehrere Componenten zerfällt, die Verhältnisse ihrer Geschwindigkeiten bestimmt und hieraus die Richtung ihrer Resultante sucht, welche keine andere, als die der Tangente ist.*) Er hat diese Methode auf 13 Curven angewandt, darunter auf die Kegelschnitte, die Conchoïde, die archimedische Spirale, die Cycloïde u. s. w. Einige Beispiele hiervon mögen folgen.

1. Die archimedische Spirale. Diese Curve wird von einem Punkte beschrieben, welcher sich auf einer Geraden gleichförmig immer in demselben Sinne bewegt, während sie selbst sich in der Ebene um einen ihrer Punkte mit constanter Winkelgeschwindigkeit umdreht. Ist O der Pol und zugleich das Rotationscentrum, OX die Polaraxe, $OM = r$ und Winkel $MOX = \vartheta$, ist ferner ω die constante Winkelgeschwindigkeit, c die relative Geschwindigkeit längs der Geraden, so wird $r = ct$, $\vartheta = \omega t$, oder wenn $\frac{c}{\omega} = a$, also $c = a\omega$ gesetzt wird, $r = a\omega t$, $\vartheta = \omega t$ und durch Elimination von ω ergibt sich die Gleichung der Curve, nämlich $r = a\vartheta$.

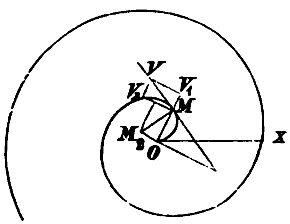

Fig. 82.

Das Verhältniss der Geschwindigkeiten des Punktes ist $a : r$; trägt man daher auf dem Radiusvector OM von M aus $MV_1 = a$ und senkrecht dazu übereinstimmend mit dem Sinne der Rotation $MV_2 = r$ auf, so ist die Diagonale MV des über diesen Linien als Seiten construirten Parallelogramms die Richtung der Geschwindigkeit und folglich die Tangente. Lässt man das Parallelogramm um die Ecke M im Sinne der Rotation der Geraden sich um $\frac{\pi}{2}$ umdrehen, so wird die Tangente MV zur Normalen und da $MV_2 = MO$ ist, wird V_2V das Perpendikel auf den Radiusvector im Pol und folglich M_2O die Polarsubnormale. Hieraus erhellt die bekannte Eigenschaft der archimedischen Spirale, dass ihre Polarsubnormale constant gleich a ist; diese Constante ist die Länge des dem Polarwinkel $\vartheta = 2\pi$ entsprechenden Radiusvectors, dividirt durch 2π.

2. Nach derselben Methode kann man die Tangente für jede Polarcurve $r = f(\vartheta)$ suchen. Denn die Componenten der Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes längs des Radiusvectors und senkrecht dazu sind $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\vartheta}{dt}$, ihr Verhältniss also $\frac{dr}{r\,d\vartheta} = \frac{\frac{dr}{d\vartheta}}{r}$, mit Hülfe dessen das Parallelogramm der Geschwindigkeiten oder ein ihm ähnliches hergestellt werden kann.

*) Vgl. Chasles, Aperçu historique, p. 58.

3. **Die Ellipse.** Sind F, F' die Brennpunkte (Fig. 83), so kann die Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes M in Bezug auf jeden von ihnen in zwei Componenten zerlegt werden, nämlich in eine längs des Radiusvectors FM ($F'M$) und eine senkrecht hiezu. Da aber die Summe $FM + F'M$ der Radienvectoren constant bleibt, also der eine um die nämliche Grösse abnehmen muss, um welche der andere wächst und umgekehrt, so folgt, dass die Componente der Geschwindigkeit längs des wachsenden Radiusvectors nach dem Aussenraume der Curve, die längs des abnehmenden nach dem Innenraume derselben gerichtet, in beiden Fällen aber von derselben Grösse sein muss. Erfolgt also die Drehung der Radienvectoren im Sinne des Pfeils, so ist die Geschwindigkeit MV_1 in der Richtung MF, die gleichgrosse Mv_1 aber in der Richtung $F'M$ aufzutragen. Ein Perpendikel in V_1 auf FM errichtet muss durch die Ecke des Parallelogramms der Geschwindigkeiten gehen, welchem MV_1 als Seite angehört, ein Perpendikel in v_1 auf $F'M$ errichtet durch die des entsprechenden Parallelogramms, welches Mv_1 zur Seite hat. Die Geschwindigkeit des Punktes M ist aber die gemeinsame Diagonale dieser beiden Parallelogramme, daher ist der Schnittpunkt V beider Perpendikel ein Punkt der Tangente. Es folgt hieraus der Satz, dass die Tangente der Ellipse den Winkel der Radienvectoren halbirt. — Dieselben Betrachtungen gelten mit geringen Modificationen für die Hyperbel und die Parabel.

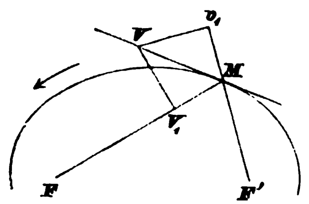

Fig. 83.

4. **Die Conchoïde.** Diese Curve wird von einem Punkte M einer Geraden beschrieben (Fig. 84), welche durch einen festen Punkt O der Ebene hindurchgeht, während ein anderer Punkt B derselben eine feste Gerade G durchläuft. Man kann die Geschwindigkeit der Punkte B und M längs des Radius-

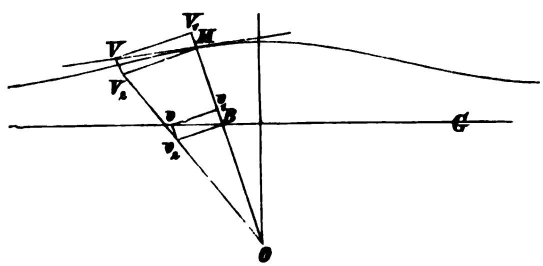

Fig. 84.

vectors OBM und senkrecht zu diesem zerlegen. Da die beiden Punkte feste Punkte der beweglichen Geraden sind und also während der Bewegung constanten Abstand von einander haben, so sind ihre Elementarwege und mithin auch ihre Geschwindigkeiten längs des Radiusvectors gleich gross; die Componenten ihrer Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvector, welche sie der Rotation der Geraden OB um O verdanken, stehen aber im Verhältniss ihrer Abstände von O. Nun ist die Geschwindigkeit von B längs der festen Geraden G gerichtet; sie oder eine ihr proportionale Länge, welche beliebig wählbar ist, sei Bv und Bv_1, Bv_2 seien ihre ebengenannten Componenten. Trägt man daher $MV_1 = Bv_1$ auf dem Radiusvector OM auf, zieht die Gerade Ov_2 und errichtet in M das Perdikel MV_2 auf OM, so sind MV_1 und MV_2 die Geschwindigkeitscomponenten von M und mithin ist die Diagonale MV des über ihnen construirten Rechtecks die Tangente der Conchoïde in M.

5. Die Cycloïde. Die Curve wird von einem Punkte M der Peripherie eines Kreises beschrieben (Fig. 85), welcher in der Ebene über eine Gerade hinrollt. Zerlegen wir die Geschwindigkeit des Punktes M in zwei Componenten, eine parallel der Basis, auf welcher der Kreis rollt und eine andere tangentiell an den rollenden Kreis, so entspricht diese Zerlegung einer Spaltung der Elementarbewegung um den Berührungspunkt C des Kreises mit der Geraden als Momentancentrum in eine Rotation um den Mittelpunkt O und eine Translation parallel der Basis. Ist $d\vartheta$ die Elementaramplitude um C, so sind die beiden Componenten der Geschwindigkeit $OM \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = MV_1$ und $OC \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = MV_2$; sie sind also einander gleich. Daher ist $\triangle MV_2V$ gleichschenklig und ähnlich $\triangle COM$ und da zwei homologe Seitenpaare OC, MV_2; OM, V_2V zu einander senkrecht sind, so findet dies auch bei dem dritten Paare CM, MV statt und geht mithin die Richtung der Tangente MV durch den Punkt D, den Gegenpunkt des Berührungspunktes C.

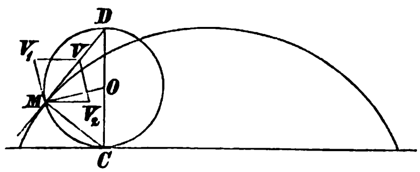

Fig. 85.

§. 21. In einem in Bewegung begriffenen System besitzt jeder Punkt in jedem Momente eine Geschwindigkeit, deren Grösse das Bogenelement seiner Bahn, welches er zu beschreiben im Begriff steht, dividirt durch das Zeitelement ist, und deren Richtung in die Tangente der Bahn fällt, in dem Sinne genommen, in welchem das Bogenelement beschrieben wird. Vermöge des Zusammenhanges der Systempunkte unter einander sind die Geschwindigkeiten derselben von einander abhängig, so dass die Geschwindigkeiten aller Punkte bestimmt werden können, sobald die Geschwindigkeiten einer gewissen Anzahl derselben gegeben sind. Der Lehre von der Aequivalenz der unendlich kleinen Bewegungen eines unveränderlichen Systems entspricht eine Theorie der Aequivalenz der Geschwindigkeiten, deren Sätze mit geringen Modificationen im Wortlaut aus den entsprechenden im Cap. II. abgeleitet werden, indem man die dort aufgestellten Gleichungen mit dem Zeitelemente dividirt und den Begriff der Geschwindigkeit einführt.

Das unveränderliche System besitze zur Zeit t eine unendlich kleine Translation, vermöge welcher seine Punkte sämmtlich parallele und congruente Bogenelemente ds in demselben Sinne während des folgenden Zeitelementes dt beschreiben. Die gemeinschaftliche Geschwindigkeit derselben ist alsdann $v = \frac{ds}{dt}$ und heisst die Translationsgeschwindigkeit des Systems. Besitzt das System während einer endlichen Zeitdauer eine Translationsbewegung, so ist v mit t im Allgemeinen nach Grösse und Richtung

veränderlich; in jedem Augenblick aber haben die Geschwindigkeiten aller Punkte dieselbe Grösse und Richtung, sowie denselben Sinn.

Besitzt das System zugleich zwei oder mehrere unendlich kleine Translationen, so resultirt aus ihnen eine einzige Translation gleich der geometrischen Summe jener; durch t dividirt, gibt sie die resultirende Translationsgeschwindigkeit des Systems.

Das System besitze zur Zeit t eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$ um eine Axe a. Vermöge derselben beschreiben die Punkte in der Einheit der Entfernung von der Axe im Zeitelemente Bogenelemente gleich $d\vartheta$ und ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}\cdot$ Diese Geschwindigkeit heisst die **Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Axe a zur Zeit t**, weil $d\vartheta$ das Maass der unendlich kleinen Rotationsamplitude ist; indem wir ihre Grösse als Länge auf der Axe a auftragen und durch eine angefügte Pfeilspitze den Sinn der Rotation ausdrücken, wie wir dies bereits früher bei den Rotationsamplituden gethan haben, erhalten wir ein Symbol, welches uns augenblicklich alle Umstände der Bewegung des Systems zur Zeit t vergegenwärtigt. Aus der Winkelgeschwindigkeit des Systems ergibt sich sofort die Grösse der Geschwindigkeit aller Systempunkte. Das von einem Punkte in der Entfernung r von der Axe im Zeitelemente dt beschriebene Bogenelement ist dem Abstande r proportional, nämlich $r d\vartheta$ und folglich ist die Geschwindigkeit des Punktes $v = r\frac{d\vartheta}{dt} = r\omega$. Diese Betrachtungen liefern den Satz:

Die Geschwindigkeiten der Punkte eines um eine Axe rotirenden Systems sind durch die Winkelgeschwindigkeit ω derselben um diese Axe bestimmt; alle Punkte in derselben Entfernung r von der Axe besitzen dieselbe Geschwindigkeit $v = r.\omega$, ihre Richtung ist senkrecht zu der Ebene, welche durch die Axe und den einzelnen Punkt gelegt werden kann; die Punkte einer solchen Ebene haben gemeinsame Geschwindigkeitsrichtung, und zwar von demselben Sinne, wenn sie auf derselben, von entgegengesetztem Sinne, wenn sie auf verschiedenen Seiten der Axe liegen. Die Geschwindigkeit ist für die Punkte der Axe Null und wächst dem Abstande von der Axe proportional.

§. 22. Das System besitze zur Zeit t zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um zwei parallele Axen a, b; vermöge derselben erleidet dasselbe um die beiden Axen in dem nächsten Zeitelemente dt die unendlich kleinen Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$, welche mit ω, ω' durch die Gleichungen

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\vartheta'}{dt}$$

verbunden sind. Nach Cap. II., §. 8. sind $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ zusammen äquivalent einer Elementarrotation um eine zu a, b parallele Axe, welche in die Ebene ab fällt und den Parallelstreifen der Axen im umgekehrten Verhältniss der Amplituden $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ theilt. Die Grösse dieser Elementarrotation ist je nach Beschaffenheit des Sinnes von $d\vartheta$ und $d\vartheta'$ die Summe oder Differenz dieser Amplituden und ihr Sinn wird aus dem Sinne dieser leicht erkannt. Indem man die a. a. O. entwickelten Gleichungen mit dt dividirt und die Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' in dieselben einführt, erhält man die folgenden den dort entwickelten analogen Sätze:

Zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' eines unveränderlichen Systems um zwei parallele Axen a, b sind zusammen äquivalent einer einzigen Winkelgeschwindigkeit um eine jenen Axen parallele dritte Axe c, welche in die Ebene ab fällt und den Parallelstreifen ab im umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten theilt und zwar als innere Theilungslinie, wenn die Winkelgeschwindigkeiten übereinstimmenden, als äussere Theilungslinie, wenn sie entgegengesetzten Sinnes sind; im letzteren Falle liegt sie auf der Seite der der grösseren Winkelgeschwindigkeit entsprechenden Axe. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist im ersten Falle gleich der Summe, im zweiten gleich der Differenz der gegebenen Winkelgeschwindigkeiten und ihr Sinn stimmt im ersten Falle mit dem gemeinschaftlichen Sinne beider, im letzten mit dem Sinne der grösseren von ihnen überein. Sind die Winkelgeschwindigkeiten entgegengesetzt gleich, so rückt die resultirende Axe ins Unendliche und werden beide zusammen einer Translationsgeschwindigkeit äquivalent, deren Richtung senkrecht zu der Axenebene ab ist und eine Grösse besitzt gleich dem Producte des Axenabstandes und der gemeinschaftlichen Grösse beider Winkelgeschwindigkeiten.

Die gleichzeitige Verbindung zweier entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeiten um zwei parallele Axen heisse ein Winkelgeschwindigkeitspaar (Rotationsgeschwindigkeitspaar oder kürzer, wenn keine Verwechslung mit dem endlichen Rotationsamplitudenpaar Cap. II., §. 4. zu befürchten ist, ein Rotationspaar), die Richtung und der Sinn der ihr äquivalenten Translationsgeschwindigkeit seine Axenrichtung und das Product aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Axenabstand, welches gleich der Translationsgeschwindigkeit ist, sein Moment. Dies Moment tragen wir als Länge auf der Axe des Paares auf und versehen dieselbe mit einer Pfeilspitze, um den Sinn der Translation zu markiren; diese Pfeilspitze zeigt nach derjenigen Seite der Axenebene hin, von welcher aus die Pfeilspitzen der Winkelgeschwindigkeiten, wenn letztere auf ihren Axen in dem ihnen entsprechenden Sinne aufgetragen werden, mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung übereinstimmend gerichtet erscheinen.

Aus der Aequivalenz eines Rotationspaares mit einer Translationsgeschwindigkeit folgt unmittelbar, dass alle Rotationspaare von derselben Axenrichtung und demselben Momente einander äquivalent sind, dass man die Axen in ihrer Ebene verschieben und drehen, die Ebene des Paares parallel mit sich im System verlegen, sowie dass der Abstand der Axen beliebig sich ändern kann, wenn nur zu gleicher Zeit die Winkelgeschwindigkeit im reciproken Verhältniss geändert wird. Wird die Axenrichtung des Paares in die entgegengesetzte verwandelt, so kehrt die dem Paare äquivalente Translationsgeschwindigkeit den Sinn um.

Ein specieller Fall des obigen allgemeinen Satzes über die Aequivalenz zweier Winkelgeschwindigkeiten um parallele Axen tritt ein, sobald der Axenabstand sich auf Null reducirt. In diesem Falle fallen die Axen zusammen und addiren oder substrahiren sich die Winkelgeschwindigkeiten auf der mit ihnen gleichfalls zusammenfallenden Axe der resultirenden Winkelgeschwindigkeit, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind. Man folgert hieraus unmittelbar, dass beliebig viele Winkelgeschwindigkeiten um dieselbe Axe eine resultirende Winkelgeschwindigkeit um dieselbe Axe liefern, welche gleich der algebraischen Summe der einzelnen Winkelgeschwindigkeiten ist, wenn diese in dem einen Sinne der Axe als positiv, im entgegengesetzten als negativ angesehen werden.

Verschwindet der Axenabstand oder die Winkelgeschwindigkeit, also überhaupt das Moment eines Rotationspaares, so wird die ihm äquivalente Translationsgeschwindigkeit Null. Gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten um dieselbe Axe sind daher ohne Einfluss auf den Bewegungszustand des Systems.

Es sei eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe a gegeben (Fig. 86). Irgendwo im System ziehe man eine mit a parallele Axe b und ertheile dem System um diese zwei entgegengesetzt gleiche Winkelgeschwindigkeiten von der Grösse ω. Die eine von ihnen kann dann angesehen werden als die von a nach b verlegte Winkelgeschwindigkeit, während die andere mit der Winkelgeschwindigkeit um a ein Rotationspaar bildet, dessen Moment das Product aus ω und dem Abstande p beider Axen, also äquivalent einer Translationsgeschwindigkeit gleich diesem Momente ist senkrecht zur Ebene ab, von dem Sinne, wie er durch die Axenrichtung des Rotationspaares angegeben wird. Man kann daher jede Winkelgeschwindigkeit um eine Axe a ersetzen durch eine gleiche

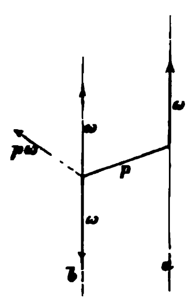

Fig. 86.

Winkelgeschwindigkeit desselben Sinnes um eine beliebige mit a parallele Axe b in Verbindung mit einem Rotationspaare, dessen Moment gleich dem Producte aus dem Abstande beider Axen und der Winkelgeschwindigkeit ist. Die diesem Momente äquivalente Translationsgeschwindigkeit ist senkrecht zu der Ebene ab und von dem Sinne, wie er durch die Axenrichtung des Rotationspaares angegeben wird.

§. 23. Das unveränderliche System besitze zur Zeit t zwei Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 um zwei Axen a, b welche durch denselben Punkt O hindurchgehen. Vermöge der ersten würde dasselbe in dem nächstfolgenden Zeitelemente dt um a eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$, vermöge der zweiten um b eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta'$ ausführen. Es ist daher

$$\omega_1 = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\vartheta'}{dt}.$$

Nach §. 10. sind die beiden Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$ zusammen äquivalent einer einzigen unendlich kleinen Rotation $d\Theta$ um eine dritte, in der Ebene (ab) liegende, gleichfalls durch O hindurchgehende Axe c, deren Richtung mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammenfällt, dessen Seiten den Amplituden $d\vartheta$, $d\vartheta'$ proportionale Längen sind und auf den Axen von O aus im Sinne derselben aufgetragen werden. Mit Rücksicht auf die weiteren dortselbst gemachten Bemerkungen erhält man, wenn (s. Fig. 68.) $O\alpha = \omega_1$, $O\beta = \omega_2$ genommen wird, den folgenden, dem dort ausgesprochenen analogen Satz:

Die gleichzeitige Verbindung zweier Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 eines unveränderlichen Systems um zwei sich in einem Punkte schneidende Axen a, b ist äquivalent einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine dritte, in der Ebene ab liegende, durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt von a und b hindurchgehende Axe c. Diese Axe ist die Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten die auf den Axen a, b von dem Schnittpunkte aus in dem Sinne der Rotationen aufgetragenen Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 sind; die Diagonalstrecke dieses Parallelogramms gibt die Grösse und den Sinn der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ω an.

Zur Bestimmung der Lage der Axe c und der Grösse von ω hat man daher die Relationen

$$\frac{\sin(ac)}{\omega_1} = \frac{\sin(cb)}{\omega_2} = \frac{\sin(ab)}{\omega}, \quad \omega = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\omega_2\cos(ab).$$

Der vorstehende Satz, welcher den Namen des Satzes vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten führt, erweitert sich für drei Winkelgeschwindigkeiten, deren Axen sich in einem Punkte schneiden, zu einem Satze vom Parallelepiped und für beliebig viele zu einem Satze vom Polygon der Winkelgeschwindigkeiten.

Mit Hülfe desselben Satzes kann umgekehrt jede Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe in zwei oder mehrere Winkelgeschwindigkeiten zerlegt werden um Axen, welche mit der Axe jener ersten sich in einem Punkte schneiden. Sind die Axen dieser Componenten zu einander rechtwinklig, falls es ihrer zwei oder drei sind, so findet man die Grösse und den Sinn der Componenten, indem man die nach Grösse und Sinn auf ihrer Axe aufgetragene gegebene Winkelgeschwindigkeit auf jene Axen projicirt. Sind daher α, β, γ die Winkel, welche die Axe der Winkelgeschwindigkeit ω, im Sinne dieser Winkelgeschwindigkeit genommen, mit drei zu einander rechtwinkligen, sich in einem Punkte O schneidenden Axen OX, OY, OZ bildet, so erhält man für die Componenten ω_x, ω_y, ω_z von ω um diese Axen:

$$\frac{\cos\alpha}{\omega_x} = \frac{\cos\beta}{\omega_y} = \frac{\cos\gamma}{\omega_z} = \frac{1}{\omega}$$

und zugleich ist

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 .$$

§. 24. Das unveränderliche System besitze zur Zeit t eine unendlichkleine Schraubenbewegung um die Axe a (Fig. 87), deren Componenten die unendlich kleine Rotation $d\vartheta$ um diese Axe und die unendlich kleine Translation $d\tau$ parallel derselben sind. Indem man diese beiden Grössen durch das Zeitelement dt dividirt, in welchem die Schraubenbewegung erfolgt, erhält man für die Winkelgeschwindigkeit ω des Systems um die Axe a und die Translationsgeschwindigkeit v desselben parallel zu ihr:

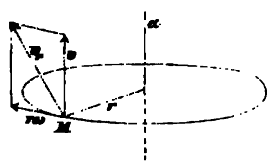

Fig. 87.

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = \frac{d\tau}{dt}.$$

Durch ω und v kann die Geschwindigkeit v_r eines beliebigen Systempunktes M, welcher die Entfernung r von der Axe a besitzt, dargestellt werden. Dieselbe hat zwei Componenten, von denen die eine, $r\omega$, von der Winkelgeschwindigkeit herrührend, senkrecht zur Axe ist und die Richtung der Tangente des Kreises hat, welchen M in Folge der Rotation um die Axe a beschreiben würde, während die andere die Translationsgeschwindigkeit v ist. Demnach erhält man, da beide Componenten rechtwinklig zu einander sind:

$$v_r^2 = v^2 + r^2\omega^2 .$$

Die Neigung ψ der Geschwindigkeit c_r gegen die Axe folgt aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r\omega}{v}.$$

Sie wächst proportional der Entfernung des Systempunktes von der Axe und die Richtung der Geschwindigkeit nähert sich daher mit wachsendem r immer mehr der rechtwinkligen Kreuzung mit der Axe.

Die Geschwindigkeit der Systempunkte in der Einheit der Entfernung von der Axe hat die Grösse $\sqrt{v^2 + \omega^2}$; wir nennen dieselbe die Schraubengeschwindigkeit um die Axe und ω und v ihre Rotations- und Translationscomponenten.

§. 25. Das System besitze zur Zeit t eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe a und eine gegen diese Axe unter einem Winkel λ geneigte Translationsgeschwindigkeit v. Vermöge der ersteren würde dasselbe im nächstfolgenden Zeitelemente dt eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$, vermöge der letzteren eine unendlich kleine Translation $d\tau$ in der Richtung von v erleiden, für welche beiden Bewegungen die Gleichungen bestehen:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = \frac{d\tau}{dt}.$$

Nach §. 11 sind diese beiden Bewegungen zusammen äquivalent einer unendlich kleinen Schraubenbewegung um eine zu a parallele Axe b. Diese Axe fällt in eine Ebene, welche senkrecht ist zu der durch a und die Richtung von v bestimmten Ebene und liegt in ihr auf derjenigen Seite von a, nach welcher hin die Rotation erfolgt. Die Amplitude und die Translation dieser Schraubenbewegung sind $d\vartheta$ und $d\tau \cos\lambda$ und daher werden die Rotationscomponente Ω und die Translationscomponente V der Schraubengeschwindigkeit

$$\Omega = \omega \quad \text{und} \quad V = v\cos\lambda,$$

sowie der Abstand der Axe b von a, wenn man v und ω statt $d\tau$ und $d\vartheta$ in die dort für dieselben aufgestellte Formel einführt:

$$d = \frac{v}{\omega}\sin\lambda.$$

§. 26. Das System besitze zur Zeit t zwei Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um zwei sich kreuzende Axen a, b; durch dieselben erleidet es im nächstfolgenden Zeitelemente dt um diese Axen die unendlich kleinen Rotationen $d\vartheta$, $d\vartheta'$, welche mit ω, ω' durch die Gleichungen

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \omega' = \frac{d\vartheta'}{dt}$$

verbunden sind. Nach §. 15. sind $d\vartheta$, $d\vartheta'$ zusammen einer unendlich kleinen

Schraubenbewegung um eine Axe c äquivalent, welche den kürzesten Abstande d der Axen a, b rechtwinklig schneidet. Die Amplitude $d\Theta$ und die Translation $d\tau$ dieser Schraubenbewegung, sowie die Neigungen der Axe c gegen die Axen a, b ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{\sin(ac)}{d\vartheta'} = \frac{\sin(cb)}{d\vartheta} = \frac{\sin(ab)}{d\Theta},$$

$$d\Theta^2 = d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + 2\,d\vartheta\, d\vartheta' \cos(ab), \quad d\tau = \frac{d.d\vartheta\, d\vartheta' \sin(ab)}{d\Theta},$$

das Verhältniss der Abstände der Axe c von den Axen a und b ist gleich dem Verhältniss der Tangenten ihrer Neigungen gegen diese Axen. Indem man in diese Gleichungen an die Stelle von $d\vartheta$, $d\vartheta'$, $d\Theta$, $d\tau$ die Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um die Axen a, b, die Rotationscomponente Ω und die Translationscomponente V der den beiden Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' äquivalenten Schraubengeschwindigkeit einführt, gehen sie über in die folgenden:

$$\frac{\sin(ac)}{\omega'} = \frac{\sin(bc)}{\omega} = \frac{\sin(ab)}{\Omega}, \quad \Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos(ab),$$

$$V = \frac{d\omega\omega'}{\Omega} \sin(ab).$$

Sie liefern uns folgenden Satz:

Die gleichzeitige Verbindung zweier Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' eines unveränderlichen Systems um zwei parallele Axen a, b ist äquivalent einer Schraubengeschwindigkeit um eine dritte, die Linie des kürzesten Abstandes beider Axen rechtwinklig schneidende Axe c, welche gegen die Axen a, b unter Winkeln geneigt ist, deren Sinusse sich umgekehrt, wie die ihnen entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten verhalten und Abstände von ihnen besitzt, deren Verhältniss gleich dem Verhältniss der Tangenten dieser Winkel ist. Die Richtung dieser Axe, die Grösse und der Sinn des Rotationscomponenten Ω der Schraubengeschwindigkeit werden durch die Richtung, Länge und den Sinn der Diagonalen des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' angegeben, ihre Translationscomponente V aber wird erhalten, indem man das Product der Winkelgeschwindigkeiten, des kürzesten Abstandes der Axen a, b und des Sinus ihrer Neigung (ab) durch die Rotationscomponente Ω dividirt.

§. 27. Das unveränderliche System besitze n Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ um n Axen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. Darunter können auch solche sein, welche paarweise gleich und entgegengesetzt, Rotationspaare bilden und also Translationsgeschwindigkeiten senkrecht zu ihren Axen ebenen aequivalent sind. (§. 22.) Indem wir die Winkelgeschwindigkeiten als Strecken nach Grösse und Sinn auf ihren Axen auftragen, erhalten wir ein Streckensystem, welches den Bedingungen der Streckensysteme in Th. I., Cap. IV. genügt, auf welches also die dort entwickelten Lehren unmittelbar Anwendung finden können. Denn jede solche Strecke kann ihrer Bedeutung nach auf ihrer Richtungslinie beliebig verschoben werden und solche, deren Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden, sind nach §. 23. ihrer Resultanten aequivalent. Das System der Winkelgeschwindigkeiten kann daher auf unendlich viele Arten auf eine Resultante R und ein Rotationspaar G reducirt werden. Die Resultante ist die geometrische Summe $\Sigma[\omega_i]$ aller Winkelgeschwindigkeiten und ist für alle Reductionen von derselben Grösse und Richtung, das Paar wechselt mit der Lage der Resultanten nach Grösse und Axenrichtung und ist die geometrische Summe $\Sigma[\omega_i p_i]$ aller Axenmomente der verschiedenen Paare $(\omega_1, -\omega_1)$, $(\omega_2, -\omega_2)$, ... $(\omega_n, -\omega_n)$, die man bei der Reduction für den Stral erhält, welcher als Situationslinie der Resultanten gewählt wurde. Die Resultante (resultirende Winkelgeschwindigkeit) bezeichnen wir mit ω, das resultirende Axenmoment, welches eine Translationsgeschwindigkeit in der Richtung desselben bedeutet mit v, so dass also

$$R = \omega = \Sigma[\omega_i], \quad G = v = \Sigma[\omega_i p_i]$$

wird.

Das System der Winkelgeschwindigkeiten besitzt eine Centralaxe, die Centralaxe der Winkelgeschwindigkeiten, deren Reductionselemente $R = \omega$ und $G_0 = v_0$ nach Th. I., Cap. IV., §. 2. leicht gefunden werden. Die Translationsgeschwindigkeit v_0, welche ihr angehört, ist die kleinste von allen möglichen. Das System der Winkelgeschwindigkeiten ist daher aequivalent einer Schraubengeschwindigkeit $(\omega^2 + v_0^2)^{\frac{1}{2}}$ um die Centralaxe.

Nach Th. I., Cap. IV., §. 3. ergibt sich aus der Reduction für die Centralaxe die Reduction für jeden ihr parallelen Stral oder, was dasselbe sagt, für jeden Punkt M des beweglichen Systems. Insbesondere ist das Axenmoment G für diesen Punkt, dessen Abstand von der Centralaxe r sei,

$$G = (G_0^2 + R^2 r^2)^{\frac{1}{2}} = (v_0^2 + r^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}},$$

und es bedeutet dasselbe die Geschwindigkeit v des Punktes M, die derselbe in Folge des Systems der Winkelgeschwindigkeiten oder in Folge der Schraubengeschwindigkeit annimmt. Denn die Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Centralaxe gibt ihm die Geschwindigkeit $r\omega$ senkrecht zur Centralaxe und mit ihr combinirt sich die dieser Axe parallele Translationsgeschwindigkeit v_0 zu $v = (v_0^2 + r^2 \omega^2)^{\frac{1}{2}}$. Das System der

Winkelgeschwindigkeiten ist daher aequivalent einer Translationsgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit v irgend eines Systempunktes in Verbindung mit einer Winkelgeschwindigkeit, gleich der resultirenden Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Systempunkt gehende zur Centralaxe parallelen Axe.

Nach Th. I., Cap. IV., §. 4. ist jedes Streckensystem aequivalent zweien Strecken r, ϱ auf zwei conjugirten Geraden, von denen die eine ihrer Richtungslinie nach willkührlich wählbar ist. Zu einer Geraden ergibt sich die conjugirte als die Schnittlinie der Polarebenen zweier ihrer Punkte. In unserem Falle sind die Axenmomente G die Geschwindigkeiten der Systempunkte und da die Axenmomente senkrecht sind in den Polen zu den zugehörigen Polarebenen und im Nullsystem die Polarebenen durch die Pole hindurchgehen, so sind die Normalebenen der Bahnen der Systempunkte die Polarebenen dieser Systempunkte. Nun gehen nach Th. I., Cap. V., §. 3., Nr. 4. 8 und §. 6. die Polarebenen der Punkte einer Geraden durch die dieser conjugirte Gerade und schneidet der kürzeste Abstand zweier conjugirter Geraden die Centralaxe rechtwinklig. Construirt man daher in zwei Systempunkten die Normalebenen ihrer Bahnen, so schneiden sich diese in der zur Verbindungslinie dieser Punkte conjugirten Geraden und der kürzeste Abstand beider conjugirten Geraden trifft die Centralaxe des Systems der Winkelgeschwindigkeiten rechtwinklig. Hieraus ergibt sich die von Chasles angegebene Construction der Centralaxe:

Man ziehe in drei Punkten A, B, C des beweglichen Systems die Tangenten ihrer Bahnen und lege durch die Punkte zu diesen senkrecht die drei Normalebenen α, β, γ. Nun suche man den kürzesten Abstand a der Linie AB von ihrer conjugirten $(\alpha\beta)$, nämlich der Schnittlinie der Ebenen α, β; ebenso den kürzesten Abstand b der Geraden BC und $(\beta\gamma)$. Dann wird die Gerade des kürzesten Abstandes von a und b die Centralaxe sein.

Die Th. I., Cap. VI., §. 4. angegebene Construction liefert die Strecken r, ϱ für zwei conjugirte Gerade, welche dem Streckensystem aequivalent sind. Auf unsern Fall angewandt, liefert sie also die Winkelgeschwindigkeiten um zwei conjugirte Axen, welche dem gegebenen System der Winkelgeschwindigkeiten aequivalent sind. **Wie man auch immer zwei conjugirte Axen wählen mag, das Tetraeder, welches die auf ihnen als Längen aufgetragenen ihnen zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten zu Gegenkanten hat, ist von constantem Volumen.**

Um die Bedeutung des mit dem System der Winkelgeschwindigkeiten in Verbindung stehenden Complexes ersten Grades deutlich zu zeigen, führen wir noch Folgendes an. Man denke sich die beiden unendlich wenig von einander abweichenden Lagen des beweglichen Systems, die ursprüngliche Σ_1

und die Lage Σ_2, in welche das bewegliche System durch das System der Winkelgeschwindigkeiten übergeführt wird. Die Verbindungslinien AA' homologer Punkte A, A' sind die Tangenten der Bahn in A; die Gesammtheit aller dieser Tangenten bildet, wie an einer anderen Stelle ausführlicher besprochen werden wird, einen Complex zweiten Grades. Die Normalebenen α der Bahnen in den Punkten A bilden mit diesen Punkten A zusammen das mit unserer Reduction der Winkelgeschwindigkeiten zusammenhängende Nullsystem, in welchem die Polarebenen α (Nullebenen) durch die Pole A (Nullpunkte) hindurchgehen. Die Stralen der Ebenen α, welche durch die Systempunkte A gehen, sind die Stralen des Complexes ersten Grades. Sie sind die Doppellinien (sich selbst conjugirten Geraden)* des Nullsystems, die nicht als conjugirte Axen dienen können. (Th. I., Cap. V., §§. 4. 7.)

§. 28. Sind für irgend eine Reduction der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ auf (ω, v) die beiden Reductionselemente zu einander senkrecht, so ist das System der Winkelgeschwindigkeiten einer blossen Winkelgeschwindigkeit ω ohne Translationsgeschwindigkeit aequivalent. Dieser Fall tritt insbesondere für parallele Axen und Winkelgeschwindigkeiten gleichen Sinnes, sowie überhaupt solche, wofür $\Sigma[\omega]$ nicht Null ist und im Allgemeinen für Winkelgeschwindigkeiten um Axen, welche in eine Ebene fallen, ein. Ist $\omega = \Sigma[\omega_i] = 0$, so ist das System aequivalent einer Translationsgeschwindigkeit. Sind ω und v für irgend eine Reduction beide zugleich Null, so ist das System aequivalent Null; es erfolgt keine Bewegung. (Gleichgewicht der Winkelgeschwindigkeiten.)

In dem Falle, dass das System einer blossen Winkelgeschwindigkeit ω aequivalent ist, beschreiben alle Punkte Bahnelemente senkrecht zur Centralaxe und gehen daher alle Normalebenen durch diese Axe. Der Complex ersten Grades wird ein specieller Complex, er besteht nämlich aus allen Geraden, welche die Centralaxe schneiden.

Die analytische Durchführung der Reduction nach Th. I., Cap. IV., §. 8. u. ff. hat keine Schwierigkeit.

IV. Capitel.

Die ebene Bewegung eines unveränderlichen Systems und ihre Geschwindigkeiten.

§. 1. Die Lehren über die Aequivalenz der Rotationen um parallele Axen reichen hin, um eine genaue Einsicht in den Vorgang der Bewegung eines unveränderlichen Systems zu erlangen, bei welcher die Bahnen aller Punkte einer gegebenen Ebene parallel sind. Hierbei bewegt sich jeder zu dieser Ebene parallel geführte Schnitt des Systems in seiner Ebene, führen alle Punkte einer zu der Ebene senkrechten Geraden congruente Bewegungen aus und sind mithin die Bewegungen aller Parallelschnitte zu jener Ebene dieselben. Daher genügt die Untersuchung der Bewegung eines solchen Parallelschnittes, d. h. die Untersuchung der Bewegung eines ebenen Systems in seiner eigenen Ebene. Eine solche Bewegung nennen wir Parallelbewegung oder ebene Bewegung.

§. 2. Es seien Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... eine Reihe von Lagen, welche das ebene System Σ während seiner Bewegung durchläuft. Die Bewegung, welche dasselbe aus der Lage Σ_1 nach Σ_2 führt, ist nach Cap. I., §. 6. aequivalent einer Rotation von der Amplitude ϑ_1 um einen gewissen Rotationsmittelpunkt C_1 (Fig. 88), die Bewegung, durch welche dasselbe aus der Lage Σ_2 in die folgende Lage Σ_3 gelangt, ist aequivalent einer Rotation ϑ_2 um einen anderen Mittelpunkt C_2 u. s. f. Construiren wir alle diese Mittelpunkte und ertheilen dem System Σ statt seiner wirklichen Bewegung nach und nach die Rotationen ϑ_1, ϑ_2 ... um sie, so ergibt sich eine Bewegung, welche mit der wirklich stattfindenden in den Lagen Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... übereinstimmt. Schaltet man nun zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser Lagen andere Lagen des beweglichen Systems ein und bestimmt von Neuem die Rotationsmittelpunkte und Amplituden, so erhält man eine Bewegung des Systems, welche der wirklich stattfindenden sich bereits weit enger anschliesst. Setzt man diesen Process immer weiter fort, so häufen sich die Centra immer dichter, und weil je zwei aufeinanderfolgende Lagen des Systems immer weniger von einander abweichen, so nehmen die Amplituden immer mehr ab und erkennt man, dass die wirklich stattfindende Bewegung die Grenze ist, welcher sich die Rotationsfolge ohne Ende nähert. Dabei nähert sich die Reihe der Mittelpunkte einer bestimmten Curve, sodass man beim Uebergang zur Grenze den Satz erhält:

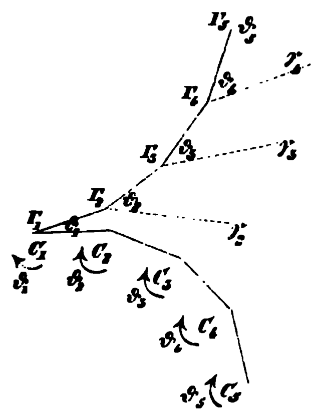
Fig. 88.

Die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in der Ebene ist aequivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um die Punkte einer bestimmten in der Ebene gelegenen Curve (C); und mit Rücksicht auf die Bewegung eines räumlichen Systems parallel einer Ebene:

Die Bewegung eines unveränderlichen körperlichen Systems parallel einer Ebene ist aequivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um die Erzeugungslinien eines zur Ebene senkrechten Cylinders (C) als Axen.

Die Curve (C) ist zum Verständniss der Bewegung des Systems zwar wesentlich, aber noch nicht hinreichend, vielmehr gehört dazu noch eine andere. Während sich nämlich das System um C_1 dreht, fällt mit diesem Mittelpunkte ein gewisser Punkt Γ_1 des Systems zusammen, welcher C_1 verlässt, sobald die Drehung um C_2 beginnt; während dieser liegt ein Systempunkt Γ_2 in C_2; ebenso fällt während der Drehung um C_3 mit diesem Punkte ein gewisser Punkt Γ_3 zusammen u. s. f. Sowie nun die Punkte C in der Grenze eine Curve des absoluten Raumes bilden, so ist der geometrische Ort der Punkte Γ schliesslich eine gewisse Curve des Systems, deren Punkte während der Bewegung mit den Punkten der Curve (C) zusammenfallen, so zwar, dass die Curve (Γ) in jeder Lage des Systems die Curve (C) berührt und während der Bewegung auf ihr hinrollt ohne zu gleiten. Man hat daher weiter den Satz:

Die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in seiner Ebene kann definirt werden als das Rollen einer bestimmten Curve (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten Curve (C) der festen Ebene. Oder auch:

Die Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems parallel einer Ebene kann definirt werden als das Rollen einer bestimmten Cylinderfläche (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten festen Cylinderfläche (C) des Raumes ohne Gleiten.

Man kann leicht zu einer Folge von Punkten C die entsprechende Folge der Punkte Γ construiren. Man trage zu dem Ende an C_1C_2 entgegengesetzt dem Sinne der Rotation um C_1 den Winkel $\Gamma_2C_1C_2$ gleich der zu C_1 gehörigen Amplitude ϑ_1 an und nehme $\Gamma_1\Gamma_2 = C_1C_2$. Hierauf ziehe man $\Gamma_2\gamma_2$ so, dass der Winkel $\Gamma_1\Gamma_2\gamma_2$ gleich dem Winkel $C_1C_2C_3$ wird, trage an $\Gamma_2\gamma_2$ wiederum entgegengesetzt der Rotation um C_2 die diesem Centrum entsprechende Amplitude ϑ_2 an und mache $\Gamma_2\Gamma_3 = C_2C_3$. Setzt man diese Construction fort, so erhält man ein Polygon $[\Gamma]$, dessen Aussenwinkel gleich den Polygonwinkeln des Polygons $[C]$ sind, vermehrt um die den Punkten C entsprechenden Rotationsamplituden, welches Polygon also bei der Rotation des Systems um die Punkte C sich mit seinen Seiten an die Seiten von $[C]$ anlegt. Geht nun das Polygon $[C]$ in die Curve (C) über, welche der Ort aller Rotationsmittelpunkte im absoluten Raume ist, so geht das Polygon (Γ) zugleich in die Curve (Γ) über, welche alle Punkte des Systems enthält, die nach und nach mit den Punkten der Curve (C) zusammenfallen und welche, indem sie über die Curve (C) hinrollt, das System nöthigt, die ihm vorgeschriebene Bewegung auszuführen.

§. 3. Jeder Lage des beweglichen Systems entspricht ein bestimmter

Punkt C der Curve (C), um welchen dasselbe in dem nächstfolgenden Zeitelement eine unendlich kleine Rotation ausführt, um in die folgende unendlich nahe Lage zu gelangen. Diesen Punkt nennen wir den momentanen Rotationsmittelpunkt oder auch das Momentancentrum und die unendlich kleine Rotation um ihn die Elementarbewegung des Systems. Ist $d\vartheta$ die unendlich kleine Amplitude der Elementarbewegung, so ist die Geschwindigkeit der Systempunkte in der Einheit der Entfernung vom Momentancentrum oder die Winkelgeschwindigkeit ω um dieses $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ und die Geschwindigkeit v im Abstande r vom Centrum $v = \omega r$. Das Centrum selbst hat die Geschwindigkeit Null; es kann daher füglich auch Mittelpunkt der Geschwindigkeiten oder Pol der Geschwindigkeiten genannt werden, weil um dasselbe auf concentrischen Kreisen die Geschwindigkeit der Systempunkte der Grösse nach gleich ist. Für das räumliche System tritt an die Stelle dieses Punktes die Momentanaxe (Axe oder Polaxe der Geschwindigkeiten).

In Folge der Elementarbewegung beschreibt jeder Punkt des Systems ein Element seiner Bahn, welches als unendlich kleiner Kreisbogen um das Momentancentrum als Mittelpunkt oder auch als unendlich kleine gerade Linie angesehen werden kann, senkrecht zu dem Strale, der den Systempunkt mit dem Momentancentrum verbindet. Das Element der Bahn hat die Richtung der Tangente, jener Stral also die der Normalen der Bahn. In jeder Lage des Systems laufen also die Normalen der Bahnen der Systempunkte alle durch ein und denselben Punkt der Ebene, nämlich durch das der Lage des Systems entsprechende Momentancentrum.

Vermöge der Elementarbewegung beschreiben die Punkte einer Geraden des Systems Bogenelemente, welche verschieden geneigt sind gegen dieselbe, weil sie senkrecht sind zu den Stralen, welche die Punkte mit dem Momentancentrum verbinden. Nur dann, wenn die Gerade durch dies Centrum hindurchgeht, ist die Neigung aller dieselbe, nämlich $\frac{1}{2}\pi$. Unter den Punkten der beweglichen Geraden ist ein einziger, dessen Bahnelement in die Gerade fällt, nämlich der Fusspunkt P der vom Momentancentrum auf die Gerade gefällten Normalen. Nun ist die Winkelgeschwindigkeit ω der Elementarbewegung um C aequivalent derselben Winkelgeschwindigkeit ω um diesen Fusspunkt in Verbindung mit einer Translationsgeschwindigkeit $r\omega$ des Systems, wenn r der Normalabstand CP ist, senkrecht zu r und gleich der Geschwindigkeit von P. (§. 22., S. 211 u.) Daher gleitet die Gerade in ihrer Richtung mit der Translationsgeschwindigkeit $r\omega$ und rotirt um P mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Nur die Geraden, welche durch C hindurch gehen, rotiren um C ohne Translation. Der Punkt P wird der Gleitungspunkt der Geraden genannt. Aehnliches gilt von jeder Curve des Systems. Fällt man von C auf eine solche Curve die verschiedenen Normalen und zieht in deren Fusspunkten die Tangenten an die Curven, so gleiten diese Tangenten in sich mit der Geschwindigkeit ihrer Fusspunkte und rotiren mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Blos dann, wenn die Curve die Curve (C) der Momentancentra in C berührt, findet in diesem Punkte kein Gleiten, sondern nur Rotation der Curve um C statt. Die bewegliche Gerade oder Curve umhüllt während ihrer Bewegung im Allgemeinen eine Curve, ihre Enveloppe, die sie in allen Lagen berührt. Das Vorstehende zeigt daher, dass für jede Lage des beweglichen Systems die Normalen der Enveloppen aller Systemcurven in den Punkten, in welchen sie von diesen berührt werden, durch das Momentancentrum hindurchgehen.

Die Tangenten der Bahnen aller Punkte einer Geraden l für irgend eine bestimmte Lage derselben, für welche das Momentancentrum C ist, berühren eine Parabel, deren Scheitel der Gleitungspunkt A von l und deren Brennpunkt C ist. Denn die Gerade l und ihre nächstfolgende Lage l' enthalten zwei congruente Punktreihen $A, \ldots B, D, \ldots; A', \ldots B', D' \ldots$ und ihre Projecsionsstralen $AA', \ldots BB', DD' \ldots$ sind die Tangenten der Bahnen der Punkte $A, \ldots B, D, \ldots$ Sie berühren nach einem bekannten Satze eine Parabel und da l und l' selbst Projectionsstralen sind, so berühren auch sie dieselbe. Der Punkt A beschreibt das Bogenelement AA', welches in l fällt; l ist daher Tangente an die Parabel im Gleitungspunkte A und AC Normale daselbst. Denkt man sich alle übrigen Normalen $BC, DC \ldots$, welche auf den Parabeltangenten $BB', DD' \ldots$ senkrecht sind, so hat man ein System von rechten Winkeln $CAA', CBB', CDD' \ldots$, von deren Schenkeln die einen die Parabel berühren, während die andern durch denselben Punkt C gehen. Nach bekannten Eigenschaften der Parabel ist daher C der Brennpunkt und da CA auf der Geraden l in A senkrecht steht, so ist CA die Hauptaxe und A der Scheitel.

Die Projectionen der Bogenelemente, welche die verschiedenen Punkte einer Geraden l durch die Elementarbewegung beschreiben auf die Gerade l sind gleich; daher sind auch die Projectionen der Geschwindigkeiten aller Punkte von l auf l gleich. Denn das Bogenelement, welches ein Punkt A beschreibt, ist $CA \,.\, d\vartheta$, und wenn CA mit l den Winkel φ bildet, so bildet AA' mit l den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, mithin ist $CA \sin\varphi \,.\, d\vartheta$ seine Projection auf l. Ebenso ist für einen andern Punkt B die Projection des Bogenelementes BB' auf l gleich $CB \sin\psi d\vartheta$, wenn CB mit l den Winkel ψ bildet. Es ist aber sowohl $CA \sin\varphi$, als auch $CB \sin\psi$ der Abstand der Geraden l von C. Daher sind beide Projectionen gleich, und wenn man sie mit dt dividirt, auch die Projectionen der Geschwindigkeiten von A und B.

Alle Punkte A des beweglichen Systems, deren Geschwindigkeitsrichtungen für eine bestimmte Lage des Systems durch ein und denselben Punkt P hindurchgehen, liegen auf dem Umfange eines Kreises, welcher durch das Momentancentrum C geht und den Abstand CP zum Durchmesser hat. Denn dem Punkte P, wenn man ihn als einen Punkt Q' der nächstfolgenden Lage Σ' des Systems auffasst, ist ein gewisser ihm unendlich naher Punkt Q der ersten Lage Σ homolog. Zieht man nun von Q' nach allen Punkten A', welche den Punkten A in Σ' homolog sind, die Stralen $Q'A'$, so gehen sie durch die Punkte A und dem Stralenbüschel (Q'), den sie bilden, ist der Stralenbüschel (Q) homolog, dessen Stralen QA durch die Punkte A gehen. Die homologen Büschel (Q) und (Q') sind aber congruent und gleichen Sinnes; daher schneiden sich ihre homologen Stralen QA, $Q'A'$ d. h. QA, PA in den Punkten A' eines Kreises, welcher in der Grenze der Ort der Punkte A ist. Dem Strale QC entspricht aber $Q'C$ in den Büscheln, weil im Momentancentrum zwei homologe Punkte C, C' zusammenfallen. Das Bahnelement QQ' ist aber senkrecht zu CQ und hat die Richtung der Geschwindigkeit des Punktes P; daher ist CP der Durchmesser des Kreises.

§. 4. Die Bewegung des Systems in der Ebene ist durch zwei Bedingungen bestimmt; denn sie ist es, sobald eine Gerade desselben für alle ihre Lagen bestimmt ist und dies erfordert zwei Bedingungen. Sind z. B. die Bahnen bekannt für zwei Punkte der Geraden, so ist dies der Fall; zunächst aber nur für die reine Geometrie der Bewegung, d. h. für die Bestimmung der Orte der Punkte, der Bahnen etc., noch nicht aber für die Geschwindigkeiten. Ist aber die Geschwindigkeit eines Punktes bekannt, so kann man durch sie die Geschwindigkeiten aller Punkte finden. Dies führt zu folgenden Aufgaben, deren Lösung keine theoretischen, wohl aber in vielen Fällen praktische Schwierigkeiten hat:

Wenn die Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems durch zwei Bedingungen definirt und die Geschwindigkeit eines Systempunktes für den Verlauf der Bewegung bekannt ist, zu finden: a. das Momentancentrum C für eine beliebige Lage des Systems in der Ebene der Bewegung, b. den Ort (C) aller Momentancentra in derselben, c. zu einem Momentancentrum C den Punkt Γ des Systems, welcher im Laufe der Bewegung als Momentancentrum in C eintritt, sowie die Lage des Systems, für welche dies geschieht, d. den Ort (Γ) aller Punkte Γ im System, e. die Bahn eines beliebigen Systempunktes nebst deren Tangente oder Normalen in irgend einem ihrer Punkte, f. die Enveloppe

irgend einer Geraden und ihre Tangente, g. die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes.

Wir werden bald die Lösung dieser Aufgaben für einzelne Bestimmungsarten geben und durch Beispiele erläutern.

§. 5. Wenn ein ebenes System Σ sich in einer Ebene Σ' bewegt, so heisst dies soviel, als die Elemente von Σ, Punkte, Geraden etc. fallen nach und nach einem bestimmten durch die Definition dieser Bewegung gegebenen Gesetze entsprechend mit gewissen gleichartigen Elementen von Σ' zusammen. Dabei ist es gleichgültig, ob Σ' selbst in einem dritten Systeme Σ'' ruhend oder in Bewegung begriffen gedacht wird, wenn Σ, Σ' zusammen als ein Gesammtsystem an dieser Ruhe oder Bewegung theilnehmen. Allein ebenso, wie Σ seinen Ort in Σ' verändert, ist dies auch bei Σ' der Fall, welches zugleich in Σ sich bewegt. Es bewegen sich beide Systeme in einander, die Bewegung des einen zieht die des andern nach sich, da Bewegung überhaupt ein relativer Begriff ist. (S. Einleitung §. 7.) Wir gelangen leicht zur Kenntniss der Bewegung von Σ' in Σ, indem wir beiden Systemen als einem Gesammtsystem eine gewisse gemeinsame Bewegung hinzufügen, welche keinen Einfluss auf die relative Bewegung beider gegen einander ausüben kann. Dazu wählen wir am einfachsten in jedem Augenblick die Bewegung von Σ in Σ', d. h. die Elementarbewegung von Σ um die Momentanaxe (C, Γ) in umgekehrtem Sinne. Dadurch kommt Σ zur Ruhe und sieht man, dass die Bewegung von Σ' in Σ in dem Rollen der Curve C auf der jetzt ruhenden Curve Γ besteht und zwar im umgekehrten Sinne erfolgend. Für die beiden relativen Bewegungen von Σ und Σ' in einander haben daher die Curven C und Γ wechselweise dieselbe Bedeutung. Während bei der Bewegung von Σ und Σ' ein Punkt A von Σ eine Curve a' beschreibt, geht bei der Bewegung von Σ' in Σ diese Curven fortwährend durch den Punkt A, wie durch einen festen Punkt hindurch oder was dasselbe ist, es zeichnet der feste Punkt A des ruhenden Systems Σ in dem beweglichen System Σ' dieselbe Curve a' und während im ersten Falle eine Curve k in Σ' eine Enveloppe K' erzeugt, an welcher sie rotirend hingleitet, so gleitet im andern Falle diese Curve K' über k berührend hinweg. Um den einfachsten Fall dieser Gegensätze zu erwähnen, wollen wir hervorheben, dass, wenn bei der Bewegung von Σ in Σ' ein Punkt A von Σ in Σ' eine Gerade a' beschreibt, diese Gerade a' während der Bewegung von Σ' in Σ fortwährend durch den Punkt A hindurchgeht und umgekehrt, wenn eine Gerade k von Σ in Σ' fortwährend durch einen Punkte K' geht, im andern Falle K' sich in k bewegt. Es spricht sich hierin eine gewisse Wechselseitigkeit, ein gewisser Umtausch der die beiden Bewegungen bedingenden und der durch die Bewegung erzeugten geometrischen Gebilde aus, den wir mit dem Namen des **Dualismus** der Bewegung bezeichnen, indem wir dabei auf **Chasles** verweisen (Aperçu historique, Note XXXIV, p. 408), welcher zuerst auf ihn aufmerksam gemacht hat. Von den beiden Bewegungen, der von Σ in Σ' und der von Σ' in Σ soll jede die **Umkehrung** der andern heissen.

§. 6. **Zwei Systempunkte A, B (Fig. 89.) bewegen sich auf zwei gegebenen Curven (α), (β) der Ebene der Bewegung, man soll die Aufgaben des §. 4. für die hiedurch definirte Bewegung des Systems Σ behandeln.**

Da die Normalen der Bahnen aller Systempunkte entsprechend einer bestimmten Stellung des Systems durch das Momentancentrum gehen, so erhält man dies als Durchschnitt der Normalen an die Curven (α), (β) in den Punkten A, B. Die continuirliche Reihe aller dieser Normalendurchschnitte, entsprechend den verschiedenen Lagen der Punkte A, B auf den Curven (α), (β) bildet die Curve (C). — Die Punkte A, B und das Momentancentrum C

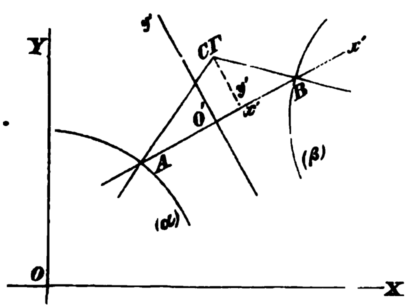

Fig. 89.

bilden ein Dreieck ABC, welches im Allgemeinen für jede Lage des Systems ein anderes sein wird. Construirt man nun im beweglichen System über AB als Basis die Dreiecke $AB\Gamma$ congruent mit den verschiedenen Dreiecken ABC, so decken sich aufeinanderfolgend während der Bewegung diese mit jenen und sind folglich die Ecken Γ derselben, welche AB gegenüberliegen, die Systempunkte, welche mit den Momentancentris zusammentreffen. — Behufs Lösung der dritten Aufgabe wird man von dem gegebenen Momentancentrum C die Normalen CA, CB auf die Curven (α), (β) fällen und das Dreieck ABC in das bewegliche System an AB übertragen; der Systempunkt, mit welchem C zusammenfällt, ist der gesuchte Punkt Γ. Lassen sich von C an eine oder die andere der Curven (α), (β) mehrere Normalen legen, so entscheidet die bekannte Länge AB, welche Verbindungslinie der Fusspunkte werden muss, welche zwei von den verschiedenen Fusspunkten der Normalen zu wählen sind. — Da das Bogenelement, welches ein beliebiger Systempunkt M beschreibt, als unendlich kleiner Kreisbogen um das Momentancentrum C angesehen werden muss, so folgt, dass die Bahn des Punktes M von sämmtlichen Kreisen, welche aus den Momentancentris C mit den Abständen CM derselben von den entsprechenden Lagen des beschreibenden Punktes M beschrieben werden können, berührt wird. Die Bahn des Punktes M ist also die Enveloppe derselben. Die Enveloppe einer Geraden des Systems ist der Ort der Fusspunkte aller auf die einzelnen Lagen der Geraden von den betreffenden Momentancentren gefällten Normalen. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes ist bekannt, sobald die Winkelgeschwindigkeit ω um das Momentancentrum gefunden ist. Ist v_a die Geschwindigkeit des Punktes A und r_a sein Abstand vom Centrum C, so folgt ω aus $\omega \,.\, r_a = v_a$.

Behufs der analytischen Behandlung der vorstehenden Aufgaben nehmen wir in der festen Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y und in dem beweglichen Systeme ein anderes der x', y' an. Das erste sei beliebig gewählt, der Ursprung des zweiten aber sei die Mitte der Geraden AB und seien AB und die in ihrer Mitte errichtete Senkrechte die Axen der x' und y'. Die Coordinaten des Punktes A auf der Curve (α) seien x_α, y_α, als Functionen irgend einer Variabeln t_α gedacht, durch deren Elimination die Gleichung der Curve (α) in der gewöhnlichen Form gefunden würde; die Coordinaten von B auf der Curve (β) seien in ähnlicher Weise x_β, y_β und als Functionen einer andern Variabeln t_β gegeben. Ist alsdann a der constante Abstand AB beider Punkte, so besteht zunächst die Gleichung

$$(x_\beta - x_\alpha)^2 + (y_\beta - y_\alpha)^2 = a^2 \tag{1}$$

und werden die Coordinaten des beweglichen Ursprunges O' sein:

$$\tfrac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta), \quad \tfrac{1}{2}(y_\alpha + y_\beta).$$

Charakterisirt man ausserdem die specielle Lage des beweglichen Coordinatensystems gegen das feste durch den Winkel λ, welchen die positiven Axen der x, x' mit einander einschliessen, sodass also

$$\frac{\cos\lambda}{x_\beta - x_\alpha} = \frac{\sin\lambda}{y_\beta - y_\alpha} = a, \tag{2}$$

so bestehen zwischen den Coordinaten x, y eines Punktes der festen Ebene und denen x', y' des mit ihm in einer speciellen Lage des Systems zusammenfallenden Punktes die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(x_\alpha + x_\beta) + x'\cos\lambda - y'\sin\lambda, \\ y &= \tfrac{1}{2}(y_\alpha + y_\beta) + x'\sin\lambda + y'\cos\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Bedeuten x, y die Coordinaten des Momentancentrums C, so sind x', y' die Coordinaten des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes Γ und müssen x, y den Gleichungen der Normalen an (α), (β) in den Punkten A, B genügen, nämlich

$$\begin{aligned} (x - x_\alpha)\,x'_\alpha + (y - y_\alpha)\,y'_\alpha = 0, \\ (x - x_\beta)\,x'_\beta + (y - y_\beta)\,y'_\beta = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

worin die Accente Differentiationen nach t_α, t_β resp. bedeuten. Mit Hülfe der Gleichung (1) kann eine von den Grössen t_α, t_β eliminirt werden, sodass aus (3) und (4) durch Entfernung von x', y' noch zwei Gleichungen übrig bleiben, welche die Coordinaten des Momentancentrums durch die andere dieser Grössen darstellen. Eliminirt man auch diese noch, so bleibt eine Gleichung für den Ort (C). Um die Gleichung [illegible] $\Gamma)$ zu finden, hat man statt x', y' nur x, y zu eliminiren. — Bedeuten x', y' die Coordinaten eines bestimmten Systempunktes, so sind x, y Coordinaten der Punkte seiner Bahn; die Gleichung dieser erhält man aus (3) (ohne (4) zu Hülfe zu nehmen) durch Elimination der Grundvariabeln. Man kann t_α und t_β einander gleich und als ihren gemeinschaftlichen Werth die von einem beliebigen Momente an gerechnete Zeit betrachten.

§. 7. Beispiele.

1. Ein unveränderliches ebenes System bewegt sich in einer Ebene so, dass zwei seiner Punkte A, B (Fig. 90) fortwährend auf zwei in der Ebene festen, unter dem Winkel λ sich in einem Punkte O schneidenden Geraden (α), (β) bleiben. Man soll das Momentancentrum (C, Γ) für eine beliebige Lage des Systems und seine Orte (C), (Γ) in der Ebene der Bewegung und im System, die Bahn eines beliebigen Systempunktes und seine Geschwindigkeit finden.

a. Der Schnittpunkt der Normalen in A, B auf die Bahnen (α), (β) dieser Punkte ist das Momentancentrum (C, Γ) für die durch die Lage der Geraden AB charakterisirte Lage des Systems. Das Viereck $OACB$ ist ein Sehnenviereck und OC der Durchmesser des umschriebenen Kreises. Derselbe gibt die Entfernung des Momentancentrums vom Schnittpunkte der festen Geraden an und bleibt für alle Lagen des Systems constant, $OC = AB : \sin \lambda$. Daher ist der Ort (C) der Momentancentra in der Ebene der Bewegung ein Kreis, um O mit dieser Länge als Radius beschrieben.

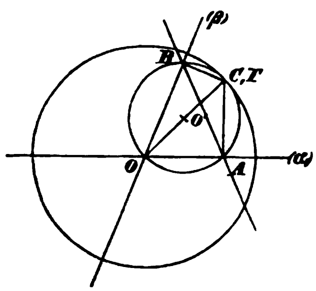

Fig. 90.

b. Jeder Punkt Γ des Systems, der im Laufe der Bewegung Momentancentrum wird, bildet mit A, B ein Dreieck, von constanter Basis AB, in welchem der Gegenwinkel dieser Seite constant gleich $\pi - \lambda$ ist. Daher ist der Ort (Γ) aller dieser Punkte ein Kreis, welcher diesen Winkel über AB als Peripheriewinkel fasst. Dieser Kreis (Γ), dessen Radius $\frac{1}{2} AB : \sin \lambda$, also halb so gross als der Radius des vorigen ist, geht während der Bewegung fortwährend durch O und berührt den vorigen Kreis (C) so, dass beide auf dieselbe Seite der gemeinschaftlichen Tangente fallen. Die Bewegung des Systems kann daher ebenso gut durch das Rollen eines Kreises auf der Innenseite eines anderen von doppelt so grossem Radius definirt werden, als durch die Bewegung der beiden Punkte A, B auf den Geraden (α), (β). Die Bewegung ist eine periodische und kehren dieselben Lagen des Systems nach zwei vollen Umläufen des rollenden Kreises wieder. Sie kann in doppeltem Sinne erfolgen.

c. Um die Bahn eines Systempunktes M zu bestimmen (Fig. 91), ziehen wir durch ihn den Durchmesser MO' des rollenden, dem System angehörenden Kreises (Γ). Dieser Durchmesser schneidet (Γ) in den beiden Systempunkten P und Q, welche als solche unveränderliche Abstände von den Punkten A und B haben. Daher sind auch die Bogen PB und QA und folglich auch die Peripheriewinkel POB und QOA unveränderlich. Da nun die Punkte A und B auf den festen Geraden (α), (β) fortrücken, so behalten die Geraden PO, QO während der Bewegung dieselbe Lage in der Ebene der Bewegung, d. h. es rücken P und Q gleichfalls auf zwei festen und überdies zu einander senkrechten Geraden OP, OQ

dieser Ebene fort. Nach einem bekannten Satze beschreiben aber die Punkte M einer Geraden AB, wenn zwei Punkte A, B derselben sich auf zwei festen, zu einander senkrechten Geraden bewegen, Ellipsen, deren Hauptaxenrichtungen die festen Geraden sind und deren Mittelpunkt also ihr Schnittpunkt ist. Die Halbaxen dieser Ellipsen sind MP und MQ, wie man sieht, wenn man den Durchmesser MO' in den Lagen betrachtet, wo er mit OP oder OQ zusammenfällt.

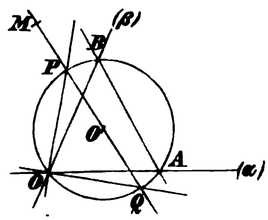

Fig. 91.

Der Mittelpunkt O' des rollenden Kreises beschreibt einen Kreis um O, alle Punkte des Innenraumes des rollenden Kreises beschreiben Ellipsen, für welche die Summe ihrer Halbaxen gleich dem Durchmesser dieses Kreises ist, alle Punkte des Aussenraumes solche, für welche die Differenz der Halbaxen gleich diesem Durchmesser ist, alle Punkte des Umfanges aber gerade Strecken als Ellipsen von verschwindenden kleinen Axen.

Alle Punkte eines und desselben Durchmessers des rollenden Kreises erzeugen Ellipsen von denselben Hauptaxenrichtungen, alle Punkte eines mit dem rollenden Kreise concentrischen Kreises Ellipsen von gleicher Länge der Hauptaxen.

Ist der Durchmesser des rollenden Kreises a und d der Abstand des die Ellipse beschreibenden Systempunktes vom Mittelpunkte O' desselben, so sind $\frac{1}{2}a + d$ und $\pm(\frac{1}{2}a - d)$ die Halbaxen und ist also $2ad$ das Quadrat der Excentricität der Ellipse. Scheitel und Brennpunkte aller Ellipsen, welche von den Punkten eines mit O' concentrischen Kreises beschrieben werden, liegen auf Kreisen um O als Mittelpunkt.

d. Wenn ein ebenes System mit einem seiner Kreise auf einem festen Kreise in der Ebene rollt, so heissen die Bahnen der Systempunkte Cycloiden und zwar Epicycloiden, wenn die Kreise auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente liegen, Hypocycloiden, wenn sie auf dieselbe Seite der Tangente fallen. Bei unserer Bewegung findet das letztere statt; die von den Systempunkten beschriebenen Ellipsen sind Hypocycloiden, entsprechend dem Verhältniss der Radien der Kreise gleich $1:2$.

e. Ist v_α die Geschwindigkeit des Punktes A, welcher sich auf der Geraden (α) bewegt, so hat die Winkelgeschwindigkeit ω um das Momentancentrum C die Grösse $\omega = v_\alpha : CA$ und wenn s der Abstand MC des Systempunktes M von C ist, so hat die Geschwindigkeit v des Punktes M den Werth $v = \omega s = v_\alpha s : CA$. Ihre Richtung ist das in M auf CM errichtete Perpendikel.

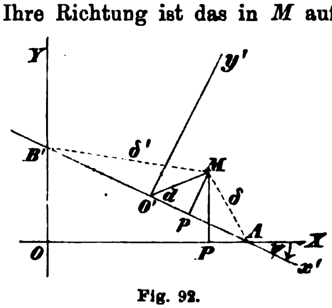

Fig. 92.

f. Behufs der analytischen Behandlung des Problems wählen wir den Schnittpunkt O (Fig. 92.) zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Gerade (α) und die zu ihr senkrechte des Punktes O zu Axen der x und y. Der Kreis um das Dreieck OAB schneidet die y-Axe in einem Punkte B' und AB' ist Durchmesser desselben, also constant gleich $AB : \sin\lambda$. Während A auf (x) sich bewegt, läuft daher B' auf der y-Axe und können die Bewegungen von A und B' auf den Coordinatenaxen den Bewegungen von A und B behufs der Definition der Bewegung des Systems substituirt w[illegible] Mitte O' von AB' wählen wir zum Ursprung eines zweiten rechtwinkligen Coordinatensystems der x', y', dessen Axen der x' und y' die Gerade $O'A$ und das auf ihr in O' errichtete Perpendikel seien. Diese Axen gehören dem beweglichen System an, so dass ihre Lage in der Ebene der (xy) die Lage desselben charakterisirt. Als individualisirenden Parameter dieser Lage wählen wir den Winkel ψ, den die x'-Axe mit der x-Axe bildet, positiv in dem Sinne der Uhrzeigerbewegung. Nach den allgemeinen Transformationsformeln der Coordinatensysteme bestehen alsdann zwischen den veränderlichen Coordinaten x, y eines Systempunktes M bezüglich des festen Coordinatensystems zwischen den während der Bewegung unveränderlichen Coordinaten x', y' desselben Systempunktes, welche seine Lage im System markiren, den Coordinnten x_0, y_0 des beweglichen Ursprungs O' und dem Winkel α der Axen die Gleichungen

$$x = x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha$$
$$y = y_0 + y' \cos\alpha + x' \sin\alpha$$

wobei vorausgesetzt ist, dass der positive Drehungssinn des Winkels α von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe hingewandt sei. In unserem Falle wird $\alpha = -\psi$ und wenn $AB' = a$ gesetzt wird, ist $x_0 = \frac{1}{2}a\cos\psi$, $y_0 = \frac{1}{2}a\sin\psi$. Demnach bestehen zwischen den beiderlei Coordinaten x, y und x', y' die Gleichungen

$$x = (\tfrac{1}{2}a + x')\cos\psi + y'\sin\psi,$$
$$y = \qquad y'\cos\psi + (\tfrac{1}{2}a - x')\sin\psi,$$

welche die von $M(x'y')$ beschriebene Curve so darstellen, dass ihre Coordinaten x, y als Functionen von ψ erscheinen. Indem man ψ aus ihnen eliminirt (man suche $\sin\psi$, $\cos\psi$ und setze deren Quadratsumme der Einheit gleich), erhält man eine Gleichung in x, y für sie, nämlich:

$$[(\tfrac{1}{2}a - x')^2 + y'^2]\,x^2 - 2ay'xy + [(\tfrac{1}{2}a + x')^2 + y'^2]\,y^2 = [\tfrac{1}{4}a^2 - (x'^2 + y'^2)]^2.$$

In derselben bedeuten die Coefficienten von x^2 und y^2 die Quadrate der Abstände δ, δ' des Punktes M von A und B' und der Absolutwerth des Coefficienten von xy den vierfachen Inhalt J des Dreiecks $AB'M$. Wir schreiben daher, wenn ausserdem noch der Abstand $(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$ des Punktes M von O' mit d bezeichnet wird, die Gleichung einfacher:

$$\delta^2x^2 - 4Jxy + \delta'^2y^2 = [\tfrac{1}{4}a^2 - d^2]^2.$$

Sie bedeutet eine centrale Curve zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte in O. Dieselbe ist elliptisch, denn die Determinante der Coefficienten

$$D = 4J^2 - \delta^2\delta'^2$$

ist nicht positiv. Man sieht dies, indem man bedenkt, dass für $\sphericalangle AMB' = \omega$ die Grösse $\delta\delta'\sin\omega = 2J$, also $D = -4J^2\cot^2\omega$ ist. Für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ wird $D = 0$, mithin $\delta\delta' = ay'$. Die Gleichung der Curve zeigt hiefür auf der linken Seite das vollständige Quadrat $(\delta x - \delta' y)^2$ und rechts die Null, da in dem rechtwinkligen Dreieck AMB' der Abstand $d = \frac{1}{2}a$ wird. Die Curve degenerirt also in die doppelt zu rechnende Gerade $(\delta x - \delta' y)^2 = 0$ u. s. w.

g. Um die Enveloppe einer Systemgeraden zu finden, ziehen wir zu ihr parallel einen Durchmesser des beweglichen, dem Dreieck AOB (Fig. 91) umschriebenen Kreises und wählen die beiden zu einander senkrechten Geraden, auf welchen die Endpunkte des Durchmessers fortrücken, zu Coordinatenaxen. Ist alsdann e der Abstand der Systemgeraden vom Mittelpunkte O' und ψ der individualisirende Winkel derselben mit der Axe der x, so ist

$$x \sin\psi + y \cos\psi = \tfrac{1}{2} a \sin 2\psi + e,$$

wie leicht zu sehen, ihre Gleichung. Nach der Theorie der Enveloppen ist diese Gleichung nach ψ zu differentiiren und die differentiirte Gleichung, nämlich

$$x \cos\psi - y \sin\psi = a \cos 2\psi$$

mit ihr zu verbinden. Das System beider, oder auch die aus ihnen durch Elimination von ψ hervorgehende Gleichung, stellen die Enveloppe dar. Man kann die beiden Gleichungen durch die beiden folgenden, aus ihnen durch algebraische Combinationen hervorgehenden ersetzen:

$$x = a \cos^3\psi + e \sin\psi,$$
$$y = a \sin^3\psi + e \cos\psi.$$

Für $e = 0$ erhält man $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, die sogenannte Astrois, eine Curve 6. Grades mit vier in gleichem Abstande vom Coordinatenursprung auf den Axen liegenden Spitzen. Sie ist die Enveloppe des Durchmessers, welchen wir mit unserer Systemgeraden im Abstande e parallel legten. Die Enveloppe dieser Systemgeraden, deren Tangenten alle mit den Tangenten der Astrois parallel sind, hat eine dieser nicht unähnliche Gestalt.

h. das System aller Bahnen sämmtlicher Systempunkte bildet eine Schaar unter sich verwandter Curven. Es enthält gerade Strecken als Degenerationen von Ellipsen. Dieser Umstand macht die hier behandelte Bewegung für die Technik wichtig, indem man sie zu „Geradführungen" benutzen kann. Lässt man ein cylindrisches Zahnrad im Innern eines anderen von doppelter Grösse laufen, was man dadurch erreichen kann, dass man ihre Mittelpunkte durch eine um diese drehbare Schiene verbindet und das kleine Rad durch eine Kurbel um seinen Mittelpunkt in Bewegung setzt, so beschreibt jeder Punkt des Umfanges des kleinen Rades mit oscillirender Bewegung eine gerade Strecke gleich dem Durchmesser des grossen Rades.

i. Die Kenntniss der Epi- und Hypocycloiden reicht bis zu Ptolemaeus hinauf, ohne dass man ihre Eigenschaften sorgfältig studirt hätte. Erst Cardano (geb. 1501 zu Pavia, gest. 1576, Prof. der Medicin zu Bologna) untersuchte sie sorgfältiger; er hat insbesondere die im Vorstehenden behandelte hypocycloidische Bewegung zuerst gefunden und bewiesen, dass, wenn ein Kreis in einem anderen von doppelt so grossem Durchmesser rollt, jeder Punkt des ersteren eine Gerade beschreibt. (S. Cardanus, opus novum de proportionibus numerorum, motuum etc., prop. 173, p. 188.) Später hat Schooten (16.. bis 1659), Prof. zu Leyden, in seinem Werke: De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus. Lugd. Batav. 1646. p. 14 sqq. denselben Gegenstand behandelt. Seitdem ist er in allen Schriften über Rouletten, organische Erzeugung von Curven etc. zu finden. Wir machen noch auf einige Schriften aufmerksam, welche von Interesse sind: De la Gournerie, Note sur des théorèmes de Schooten et de la Hire. Journal de l'École polytechn. Cah. 39, p. 255 und P. Serret, des Méthodes en Géométrie, Paris 1855, pp. 4 und 61; Rittershaus, über Ellipsographen, Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfl. in Preussen. 1874.

2. Ein unveränderliches ebenes System bewegt sich in einer Ebene so, dass ein Punkt A desselben auf einem Kreise (α) und ein anderer Punkt B auf einem Durchmesser (β) desselben fortrückt; man

soll die Curven (C), (Γ), sowie die Bahn und die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes M, welcher auf der Geraden AB liegt, ermitteln (Kurbelbewegung).

a. Das Momentancentrum C (Fig. 93.) ist der Schnittpunkt der Normalen OC und BC des Kreises (α) und der Geraden (β) in A und B. Für den Kreismittelpunkt O als Pol und (β) als Polaraxe eines Polarcoordinatensystems,

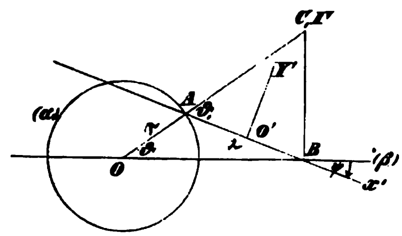

Fig. 93.

$$\sphericalangle\, COB = \vartheta,\quad OC = \varrho$$

erhält man aus dem Dreieck AOB, worin die constante Länge $AB = a$ und der Radius des Kreises r sei:

$$a^2 = \overline{OB}^2 + r^2 - 2r\,.\,OB\,.\cos\vartheta$$

wegen $OB = \varrho\cos\vartheta$ die Polargleichung der Curve (C), nämlich:

$$\varrho\,(\varrho - 2r)\cos^2\vartheta = a^2 - r^2.$$

In rechtwinkligen Coordinaten x, y für O als Ursprung und (β) als x-Axe ergibt sich hieraus, da $\varrho^2 = x^2 + y^2$, $\cos\vartheta = x : \varrho$ ist:

$$(x^2 + y^2)\,(x^2 + r^2 - a^2)^2 = 4r^2x^4.$$

Die Curve (C) ist mithin von der 6. Ordnung. Sie hat verschiedene Formen, je nachdem $a : r \lesseqgtr 1$.

b. Für die Curve (Γ) nehmen wir A als Pol, AB als Polaraxe eines dem beweglichen System angehörigen Polarcoordinatensystems an und setzen

$$A\Gamma = \varrho_1 \text{ und } \sphericalangle\, BA\Gamma = \vartheta_1\,.$$

Dann ist

$$\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta = a\sin\vartheta_1,\quad \varrho = \varrho_1 + r$$

und wenn hiemit aus der obigen Polargleichung der Curve (C) die Coordinaten ϱ und ϑ eliminirt werden, erhält man als gesuchte Polargleichung für (Γ):

$$a^2(\varrho_1 - 2r)^2\sin^2\vartheta_1 = (a^2 - r^2)(\varrho_1^2 - a^2)\,.$$

Die Elimination erfolgt leicht, indem man zunächst beide Seiten der Gleichung für (C) von $\varrho(\varrho - 2r)$ subtrahirt, die so gewonnene Gleichung mit derselben Gleichung für (C) multiplicirt und dann $\varrho\sin\vartheta\cos\vartheta = a\sin\vartheta_1$ einsetzt. In rechtwinkligen Coordinaten mit A als Ursprung und AB als x-Axe erhält man eine Gleichung 6. Grades.

c. Für die Bahn eines beliebigen Systempunktes $M(x', y')$ sei die Mitte O' von AB der Ursprung und AB die x'-Axe des mit dem System verbundenen rechtwinkligen Coordinatensystems und $\sphericalangle\, ABO = \psi$ der individualisirende Parameter. Unter Beibehaltung des bereits angewandten Coordinatensystems der x, y in der festen Ebene hat man für die Coordinaten des Punktes O'

$$x_0 = r\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}a\cos\psi,\quad y_0 = \tfrac{1}{2}a\sin\psi\,,$$

worin wegen $r\sin\vartheta = a\sin\psi$ für $r\cos\vartheta$ zu setzen ist $(r^2 - a^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}$. Diese Grössen in die allgemeinen Transformationsformeln Beisp. 1, f eingesetzt, geben für die Coordinaten x, y von M in der festen Ebene und damit als Gleichungen für die Bahn von M:

$$x = (r^2 - a^2 \sin^2\psi)^{\frac{1}{2}} + (\tfrac{1}{2}a + x')\cos\psi + y' \sin\psi$$
$$y = \qquad\qquad y' \cos\psi + (\tfrac{1}{2}a - x')\sin\psi.$$

Liegt M auf AB, so ist $y' = 0$ und wird die Gleichung der Bahn in x, y:

$$(\tfrac{1}{2}a - x')\,x = (\tfrac{1}{2}a + x')\sqrt{(\tfrac{1}{2}a - x')^2 - y^2} + \sqrt{r^2(\tfrac{1}{2}a - x')^2 - a^2y^2};$$

für die Mitte O' von AB ist $x' = 0$ und beschreibt dieser Punkt die Curve

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - y^2} + 2\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - y^2}.$$

Die Curven, welche die Punkte von AB im Falle, dass $a = r$ ist, beschrieben, sind Ellipsen, nämlich

$$x = (\tfrac{3}{2}a + x')\cos\psi + y'\sin\psi$$
$$y = \qquad y'\cos\psi + (\tfrac{1}{2}a - x')\sin\psi$$

u. s. w.

d) Es sei ω_r die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich der Radius OA des Kreises um O zur Zeit t dreht, gegeben; die Geschwindigkeit des Punktes A ist dann $\omega_r \,.\, OA$ und wenn man diese als aus der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe (C, Γ) entspringend ansieht, so besteht die Gleichung

$$\omega \,.\, CA = \omega_r \,.\, OA,$$

aus welcher

$$\omega = \omega_r \cdot \frac{OA}{CA}$$

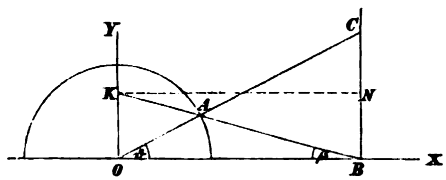

Fig. 94.

folgt. Die Geschwindigkeit eines Systempunktes D ist daher

$$v = \omega \,.\, CD = \omega_r \,.\, OA \cdot \frac{CD}{CA}.$$

Für den Punkt B insbesondere wird $v = \omega_r \,.\, OA \cdot \frac{CB}{CA}$. Diesen Ausdruck kann man vereinfachen, indem man das Verhältniss $\frac{CB}{CA}$ mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke CBA und OKA durch das gleichbedeutende $\frac{OK}{OA}$ ersetzt, wobei K den Durchschnitt der Geraden AB mit dem zu OX senkrechten Durchmesser OY bedeutet. Dadurch wird nämlich $v = \omega_r \,.\, OK = \omega_r \,.\, BN$, wenn KN parallel OX. Die Geschwindigkeit des Punktes B ist demnach proportional OK und kann man über OX leicht die Curve construiren, deren Ordinaten BN, mit ω_r multiplicirt, die Geschwindigkeiten des Punktes B seinen verschiedenen Lagen entsprechend angeben.

Um den Ausdruck für v für die Rechnung etwas zweckmässiger zu gestalten, setzen wir Winkel $ABO = \beta$, $AOB = \vartheta$ und bemerken, dass aus dem Dreiecke OAK sich ergiebt:

$$OK = OA \cdot \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\cos\beta} = OA\,(\sin\vartheta + \cos\vartheta \,.\, \operatorname{tg}\beta),$$

oder wenn man $\frac{OA}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\vartheta} = m$ setzt und OA mit r bezeichnet

$$OK = r\left(\sin\vartheta + m\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\vartheta}}\right)$$

und hiemit

$$v = \omega_r r \left(\sin\vartheta + m \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}}\right)$$

wird.

Unter Voraussetzung eines constanten ω_r wollen wir mit Hülfe dieses Ausdruckes von v die mittlere Geschwindigkeit $\overset{*}{v}$ des Punktes B bestimmen. Der Mittelwerth einer Function $f(\vartheta)$ von ϑ zwischen den Grenzen ϑ_0 und ϑ_1 ist nach Cap. III, §. 8.

$$\frac{1}{\vartheta_1 - \vartheta_0}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Da nun v für entgegengesetzte ϑ entgegengesetzt gleiche Werthe annimmt und in Bezug auf ϑ periodisch ist, so entsprechen alle verschiedenen Werthe von v, welche überhaupt vorkommen, Winkeln ϑ zwischen 0 und π und wird demnach

$$\overset{*}{v} = \frac{\omega_r r}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta + m\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}}\right).$$

Das zweite Integral in diesem Ausdrucke verschwindet, da die Elemente desselben diesseits und jenseits des Argumentes $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ entgegengesetzt gleich sind; das erste Integral hat den Werth 2 und wird also schliesslich der gesuchte Mittelwerth

$$\overset{*}{v} = \frac{2}{\pi}\,\omega_r r;$$

derselbe ist unabhängig von m, dem Verhältniss des Kreisradius zum Abstande der Punkte A und B (Länge der Kurbelstange).

Für das Maximum der Geschwindigkeit des Punktes B findet man als Näherungswerth des ihm entsprechenden Winkels ϑ bis zu den Grössen der Ordnung m^2 genau $\vartheta = \frac{\pi}{2} - m$ und mit derselben Annäherung den Maximalwerth selbst: $v = \omega r$.

3. Ein ebenes System bewegt sich so, dass zwei seiner Punkte A,

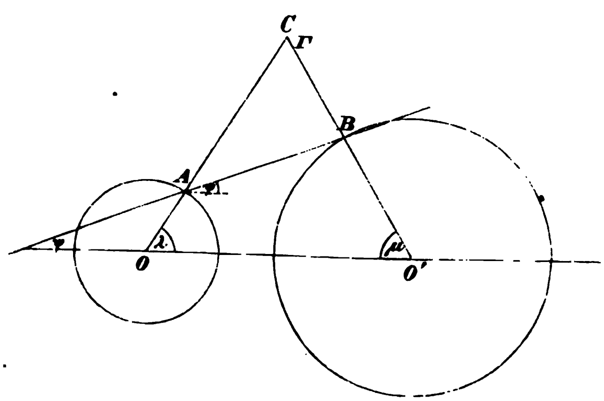

Fig. 95.

B auf den Umfängen zweier Kreise (α), (β) fortrücken (Fig. 95), die Curven (C), (Γ), sowie die Bahn eines Systempunktes D zu bestimmen, welcher auf der Geraden AB liegt.

Der Schnittpunkt der Normalen beider Kreise in A und B liefert das Momentancentrum C; hiernach erhält man leicht durch Zeichnung die Curve (C); ebenso die Curve (Γ), indem man über AB als Basis in irgend einer Lage dieser Geraden die sämmtlichen Dreiecke ACB construirt. Man erkennt leicht, dass beide Curven von derselben Art sind. Die sämmtlichen Dreiecke OCO' nämlich haben dieselbe Seite OO' und sind auf den Seiten OC, $O'C$ die Segmente OA, OB von unveränderlicher Länge. Construirt man daher über AB in irgend einer Lage alle Dreiecke ACB und verlängert die Seiten CA, CB über A und B hinaus um die Radien der Kreise, so liegen die Enden der Verlängerungen auf zwei Kreisen, welche um A und B mit denselben Radien beschrieben sind und haben diese Enden constanten Abstand gleich OO'. Daher ist der Ort der Punkte Γ ebenfalls der Ort der Normalen zweier um A, B beschriebener Kreise in den Punkten, welche den constanten Abstand OO' besitzen. Lässt man also das einemal das ebene System sich so bewegen, dass die Endpunkte der Geraden AB auf den beiden um O, O' beschriebenen Kreisen laufen, das anderemal so, dass die Enden der Geraden OO' auf zwei um A und B mit denselben Radien beschriebenen Kreisen bleiben, so vertauschen die Curven (C) und (Γ) ihre Rollen, sodass das einemal (Γ) auf (C), das anderemal (C) auf (Γ) hinrollt.

Es seien die Radien der beiden Kreise (α), (β) gleich r, r', ihr Centralabstand $OO' = b$, der Abstand $AB = a$ und mögen die veränderlichen Entfernungen OC, $O'C$ des Momentancentrums von den Mittelpunkten der Kreise mit ϱ und ϱ' bezeichnet werden. Es ist dann leicht, eine Gleichung für die Curve (C) in dem bipolaren Coordinatensystem der ϱ, ϱ' aufzustellen. Aus den beiden Dreiecken ABC und $OO'C$ erhält man nämlich, wenn $\sphericalangle\, OCO' = \omega$:

$$a^2 = (\varrho - r)^2 + (\varrho' - r')^2 - 2(\varrho - r)(\varrho' - r')\cos\omega$$
$$b^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos\omega,$$

woraus durch Elimination von ω die gesuchte Gleichung hervorgeht. Bezeichnet man weiter AC und BC mit ϱ_1 und ϱ'_1, sodass also $\varrho = \varrho_1 + r$, $\varrho' = \varrho'_1 + r'$, so erhält man durch Einführung von ϱ_1 und ϱ'_1 an die Stelle von ϱ und ϱ' die Gleichung der Curve (Γ) in Bezug auf das dem beweglichen System angehörige bipolare Coordinatensystem der ϱ_1, ϱ'_1.

Zu der Gleichung für die Bahn eines beliebigen Systempunktes würde folgende Betrachtung führen. Es sei O der Ursprung des festen Coordinatensystems der x, y und OO' die x-Axe; ferner sei die Mitte von AB der Ursprung des beweglichen Coordinatensystems der x', y' und AB die Axe der x; endlich seien λ und μ die Winkel AOO' und $OO'B$, sowie ψ der Winkel, unter welchem AB gegen OO' geneigt ist. Dann sind die Coordinaten des beweglichen Ursprungs:

$$r\cos\lambda + \tfrac{1}{2}a\cos\psi,\quad r\sin\lambda + \tfrac{1}{2}a\sin\psi$$

und folglich nach den bekannten Formeln für die Transformation der Coordinaten:

$$x = r\cos\lambda + (\tfrac{1}{2}a + \xi)\cos\psi - \eta\sin\psi$$
$$y = r\sin\lambda + \eta\cos\psi + (\tfrac{1}{2}a + \xi)\sin\psi,$$

wozu noch die folgenden Gleichungen hinzutreten:

$$r\cos\lambda + r'\cos\mu + a\cos\psi = b$$
$$r\sin\lambda - r'\sin\mu + a\sin\psi = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind λ, μ und ψ zu eliminiren, um die gesuchte

Gleichung zu finden. Die Bahn eines Systempunktes D, welcher auf der Geraden AB liegt, bildet eine Schleife, welche symmetrisch liegt gegen OO', sodass der Doppelpunkt in diese Gerade fällt. Diese Curve geht in eine Lemniscate über, wenn der beschreibende Punkt die Mitte von AB ist, die Kreise sich rechtwinklig schneiden und die Länge von AB gleich dem Centralabstande OO' ist.

Die vorliegende Aufgabe findet eine wichtige Anwendung durch das Watt'sche Parallelogramm. Zieht man nämlich (Fig. 96) durch O' eine Parallele zu AB, sowie durch A und den die Schleifencurve beschreibenden Systempunkt D auf AB Parallelen AG und DH zu $O'B$, so bleibt GH während der Bewegung gleich AD, mithin constant und wenn man die vier Punkte A, G, H, D zu einem Parallelogramm verbindet, dessen Seiten um seine Ecken drehbar sind, so bedarf man blos noch der unveränderlichen Geraden OA und $O'G$, um mit Hinweglassung aller übrigen Figurtheile den Punkt D zu nöthigen, die Schleifencurve zu beschreiben. In der Nähe des Doppelpunktes ist die Schleife, wenn die Dimensionen des Apparates zweckmässig gewählt werden, innerhalb gewisser Grenzen nahezu geradlinig; dieser Umstand ist der Grund für die praktische Anwendbarkeit. Zieht man noch $O'D$, so besteht für die Lage des Schnittpunktes K dieser Geraden mit AG die Proportion $O'K : O'D = BA : BD$ und ist folglich das Verhältniss $O'K : O'D$ constant. Daher beschreibt der Punkt K eine der Schleifenlinie des Punktes D ähnliche Curve und kann also der Punkt K ähnlichen Zwecken dienen, wie der Punkt D.

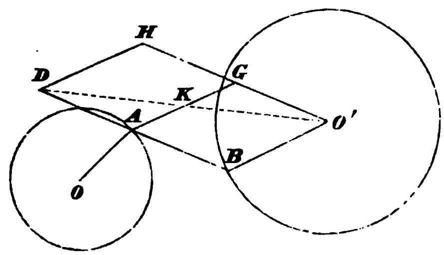

Fig. 96.

Die hier behandelte Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe von Nr. 2, sie geht in jene über, wenn der Kreis um O' in eine durch den Punkt O gehende Gerade übergeht, indem $r' = \infty$ wird.

§. 8. Bisher haben wir immer angenommen, dass die Bewegung des Systems in der Ebene dadurch definirt sei, dass zwei seiner Punkte sich auf zwei gegebenen Curven bewegen. Die Bewegung kann aber noch auf mannigfache andere Weisen definirt werden; so z. B. dadurch, dass eine bestimmte Curve des Systems während der Bewegung fortwährend zwei gegebene Curven oder auch eine Curve doppelt berührt. Von dem Zustandekommen einer solchen Bewegung gewinnt man auf folgende Weise eine deutliche Vorstellung. Man bringe die bewegliche Curve mit der ersten festen Curve zur Berührung und lasse sie berührend längs derselben so lange hingleiten, bis sie in eine Lage gelangt, in welcher sie auch die zweite berührt; hierauf drehe man sie unendlich wenig um den Berührungspunkt mit der ersten, sodass sie mit einem unendlich nahen Punkte zur Berührung kommt und lasse sie wiederum längs der ersten gleiten (es wird dies jetzt nur um eine unendlich kleine Strecke erforderlich sein), bis sie die zweite Curve von neuem berührt u. s. f. Es entspringt hieraus die sehr allgemeine Aufgabe:

Ein ebenes System bewegt sich in seiner Ebene so, dass eine gegebene Curve desselben fortwährend zwei feste Curven berührt, man soll die Curve (C) der Momentancentra, die zugehörige Curve (Γ) und die Bahn eines beliebigen Systempunktes, sowie die Tangentenconstruction der letzteren finden.

In der allgemeinen Aufgabe sind eine Menge von Einzelaufgaben enthalten, welche daraus hervorgehen, wenn man die festen Curven oder die bewegliche Curve oder beide zugleich specialisirt und die Degenerationsfälle mit berücksichtigt. Lassen wir zunächst die bewegliche Curve allgemein und specialisiren die festen. Wenn die eine von diesen sich auf einen Punkt reducirt, so erhält man die Bewegung eines Systems, bei welcher die bewegliche Curve eine feste Curve berührt und fortwährend durch einen festen Punkt hindurchgezogen wird; reduciren sich beide Curven auf Punkte, so entsteht die Bewegung, bei welcher eine Curve des beweglichen Systems fortwährend durch zwei feste Punkte hindurchgeschoben wird; reducirt sich nur eine der festen Curven auf einen Punkt, welcher aber auf der andern liegt, so berührt die bewegliche Curve eine feste Curve immer in demselben Punkt und schiebt sich durch den Berührungspunkt hindurch. Werden die beiden festen Curven congruent und fallen in eine zusammen, so fallen auch ihre Berührungspunkte mit der beweglichen zusammen, dann berührt die bewegliche diese feste so, dass das Gleiten an derselben ausgeschlossen ist und sie auf ihr hinrollt; dann ist die feste der Ort der Momentancentra selbst und die bewegliche die Curve (Γ). Dies liefert zugleich eine ebenso einfache Construction für die Curve (Γ) wie für die Curve (C).

Mit diesen mannigfachen Specialisirungen der festen Curven können sich Specialisirungen der beweglichen combiniren. Diese kann sich z. B. auf zwei Punkte reduciren, oder auf eine Gerade und einen Punkt, oder eine Curve und einen Punkt oder sie kann in zwei Gerade zerfallen und dgl. m. Diese Uebersicht soll nur die Reichhaltigkeit des hier vorliegenden Stoffes andeuten; einige Einzelheiten wollen wir jetzt noch besprechen.

§. 9. Beispiele.

1. Ein ebenes System bewegt sich so, dass eine seiner Geraden fortwährend durch einen festen Punkt geht und ein Punkt auf ihr längs einer festen Geraden fortrückt; man soll die Curven (C), (Γ) und die Bahn eines Systempunktes bestimmen (Conchoïdenbewegung).

Von den beiden festen Curven des vorigen §. hat sich die eine auf eine Gerade g (Fig. 97.), die andere auf einen Punkt O reducirt, den man als einen verschwindenden Kreis ansehen kann; die bewegliche Curve, welche beide berührt, zerfällt in eine Gerade und einen auf ihr liegenden Punkt B, der gleichfalls als unendlich kleiner Kreis gelten kann. Die Normalen auf g in B und auf die bewegliche Gerade in O liefern das Momentancentrum C; indem man im System über der beweglichen Geraden in irgend einer ihrer Lagen, z. B. in der zu g senkrechten Lage OB_0 Dreiecke $B_0\Gamma D$ congruent den Dreiecken BCO construirt, erhält man die Punkte Γ. Die Curve (C) ist eine Parabel. Sind nämlich $B_0 O$ und eine Parallele zu g durch O gelegt, die Axen der x, y eines festen Coordinatensystems und ist $\psi = BOB_0$ der veränderliche Winkel, welcher die Lage der beweglichen Geraden charakterisirt, so erhält man für die Coordinaten x, y des Punktes C aus den Dreiecken OB_0B und OCP, wenn O und g den Abstand a besitzen,

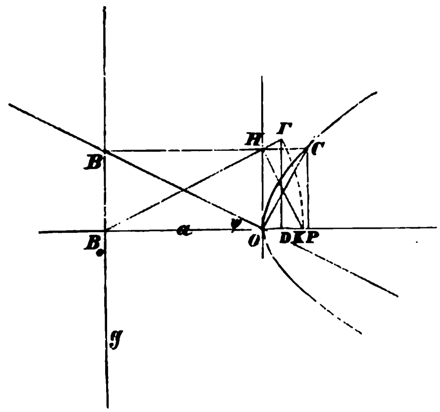

Fig. 97.

$$y = a \,.\, \mathrm{tg}\, \psi, \quad x = y \,.\, \mathrm{tg}\, \psi,$$

mithin $y^2 = ax$. Brennpunkt und Directrix der Parabel stehen von O um $\frac{1}{4} a$ ab. Für die Curve (Γ) sei

$$B_0 D = BO = x$$

und

$$D\Gamma = OC = y,$$

dann ist

$$x = \frac{a}{\cos \psi}, \quad y = \frac{a}{\cos \psi} \cdot \mathrm{tg}\, \psi$$

und folglich wird die Gleichung dieser Curve: $a^2 (x^2 + y^2) = x^4$, oder in Polarcoordinaten für B_0 als Pol und $B_0 O$ als Polaraxe $\varrho \cos^2 \vartheta = a$. Man erhält daher Punkte der Curve (Γ), indem man in H, dem Schnittpunkte der Richtung des Radiusvectors mit der Scheiteltangente der Parabel ein Perpendikel HK auf die Richtung des Radiusvectors errichtet, indem $B_0 K = \varrho$ wird.

Um die Bahn eines Systempunktes zu bestimmen, sei B_0 der Ursprung des festen Coordinatensystems der x, y, OB_0 die positive Richtung der x-Axe, die Gerade g die y-Axe, B der Ursprung des beweglichen Sxstems der x', y', OB die positive Richtung der x'; dann sind die Coordinaten des beweglichen Ursprungs $x = 0$, $y = a \,\mathrm{tg}\, \psi$ und mithin geht die Gleichung der Bahn des Systempunktes durch Elimination von ψ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \phantom{a \,\mathrm{tg}\, \psi + {}} x' \cos \psi - y' \sin \psi \\ y &= a \,\mathrm{tg}\, \psi + y' \cos \psi + x' \sin \psi \end{aligned}$$

hervor. Für $y' = 0$, d. h. für die Punkte der beweglichen Geraden erhält man die Conchoïden des Nicomedes, nämlich

$$x^2 y^2 = (a + x)^2 (x'^2 - x^2).$$

2. **Die Bewegung eines ebenen Systems sei dadurch bestimmt, dass eine Gerade desselben fortwährend durch einen festen Punkt A geht, während eine andere zu ihr senkrechte Gerade des Systems einen festen Kreis berührt, dessen Mittelpunkt B nicht mit A zusammenfällt.**

Es leuchtet ein, dass der Kreis hiebei nichts Wesentliches ist. Denn da die Tangente des Kreises immer constanten Abstand vom Mittelpunkte hat, so kann eine Linie des Systems mit ihr parallel gezogen werden, welche in allen Lagen desselben durch den Mittelpunkt hindurchgeht. Demnach kommen die Bedingungen der Bewegung des Systems darauf hinaus, dass zwei zu einander senkrechte Gerade des Systems durch zwei feste Punkte A, B hindurchgehen.

Da die Punkte A, B als verschwindende Kreise angesehen werden können, welche von den beiden beweglichen Geraden berührt werden, so folgt, dass der Schnittpunkt der Normalen der Geraden in A und B das Momentancentrum und ein Kreis über AB als Durchmesser den Ort der Momentancentra darstellt. Ist ferner O' der Schnittpunkt der beweglichen Geraden, so bleibt in dem Rechtecke $AO'BC$ die Diagonale $O'C = AB$ constant, daher liegen die Systempunkte Γ von dem Systempunkte O' alle um die constante Strecke AB ab und bilden also einen um O' mit AB als Radius beschriebenen Kreis. Demnach kann die vorliegende Bewegung definirt werden durch das Rollen eines Kreises auf einem anderen von halb so grossem Durchmesser, wenn sie so erfolgt, dass beide Kreise auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente liegen.

Die vorliegende Bewegung ist die Umkehrung der Bewegung §. 7, 1. Während dort der kleinere Kreis im Innern des grossen rollt, rollt hier der grössere auf dem kleineren. Der Umtausch der Bedeutung der Curven (C) und (Γ) spricht sich in den die Bewegung definirenden Bedingungen aus.

Um den Dualismus auch in den analytischen Ausdrücken zu erkennen, sei A (Fig. 98) der Ursprung und AB die x-Axe des festen, O' der Ursprung des beweglichen Coordinatensystems, dessen x'- und y'-Axen mit den beiden durch A und B gehenden Geraden zusammenfallen mögen. Ist $\sphericalangle\, O'AB = \psi$, $AB = a$, so bestehen für ein Paar zusammenfallende Punkte (x, y) und (x', y') der festen Ebene und des beweglichen Systems die Gleichungen:

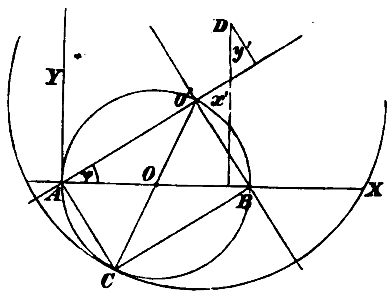

Fig. 98.

$$x' = (x - a) \cos \psi + y \sin \psi$$
$$y' = y \cos \psi - x \sin \psi,$$

aus welchen durch Elimination von ψ folgt:

$$[x (x - a) + y^2]^2 = [xx' + yy']^2 + [yx' - (x - a) y']^2.$$

Sind nun x und y constant, so stellt diese Gleichung in x', y' einen Kegelschnitt dar; derselbe ist, wie leicht zu sehen, eine Ellipse. Sind x', y' constant, so stellt sie den Ort eines Systempunktes in der festen Ebene dar; derselbe ist eine Curve vierten Grades; für $y' = 0$ wird dieselbe einfach, nämlich

$$(x^2 + y^2)\, x'^2 = [x \cdot (x' - a) + y^2]^2$$

und ihre Polargleichung in ϱ, ψ wird für A als Pol

$$\varrho = a \cos \psi + x';$$

sie ist mithin eine Pascal'sche Schneckenlinie. Nämlich $a \cos \psi$ ist die Sehne AO' in dem Kreise über AB als Durchmesser und sind alle Sehnen der Art um dieselbe Strecke zu verlängern, um zum beschreibenden Punkte zu gelangen, welches eine der Erzeugungsarten jener Curven ist. Statt dass das System mit dem grösseren Kreise auf dem kleineren hinrollt, kann man sich einen andern Kreis von derselben Grösse, wie der feste über diesen hinrollend denken; indem er als dem System angehörig betrachtet wird; er bestimmt dessen Bewegung ebenso, wie sie vorher bestimmt wurde. Man erkennt hieraus, dass die Systempunkte Epicycloiden beschreiben, welche der Gattung angehören, für welche der rollende Kreis gleich dem festen ist. Die Punkte des Umfangs des rollenden Kreises beschreiben gewöhnliche Cardioiden, die übrigen Curven, die in ihrer Gestalt sich diesen annähern.

Die vorliegende Bewegung ist von Wichtigkeit für die Construction der Ovalwerke (Ellipsendrehbank), einer sinnreichen Erfindungvon Leonardo da Vinci.*)

§. 10. Von den Entwickelungen der letzten §§. lassen sich zahllose geometrische Anwendungen machen. So z. B. auf die Construction der Tangenten der Fusspunktcurven, indem man den Pol und die Grundcurve als die festen Curven ansieht, längs welchen zwei zu einander senkrechte Gerade, die Tangente der Grundcurve und das vom Pol auf sie gefällte Perpendikel hingleiten. Ebenso kann man vermöge jenes Dualismus zu jeder Erzeugungsart einer Curve sofort noch eine zweite angeben.

§. 11. Sind die Curven (C) und (Γ) selbst gegeben, sowie irgend eine Anfangslage von (Γ) auf (C), so sind blos die Bahnen der Systempunkte zu finden. Diese Aufgabe heisst das Problem der Rouletten; es besitzt zwei Umkehrungen, welche eintreten, wenn die Gattung der zu erzeugenden Curven und die eine oder die andere der beiden Curven (C), (Γ) gegeben ist.

Ein wichtiger besonderer Fall ist der, dass die Curve (C) eine Gerade, die Curve (Γ) ein Kreis ist. Die Systempunkte beschreiben hiebei bekanntlich Cycloiden und zwar gemeine, gestreckte oder verschlungene Cycloiden, je nachdem sie der Peripherie, dem Innenraume oder dem Aussenraume des rollenden Kreises angehören.

Bei dem Hinrollen der Curve (Γ) auf der Curve (C) beschreibt jeder Punkt D des Systems ein Element DD' (Fig. 99) seiner Bahn als Kreisbogen um das Momentancentrum C als Mittelpunkt. Der Kreis, welchem dies Element angehört, hat mit jener Bahn blos dies Element oder also die Tangente gemein und ist nicht etwa der Krümmungskreis derselben. Der Krümmungsmittelpunkt ergibt sich vielmehr, wenn man die Normale DC, welche durch das Momentancentrum C geht, mit der folgenden Normalen $D'C'$, welche durch das folgende Momentancentrum geht, zum Durchschnitte K bringt.

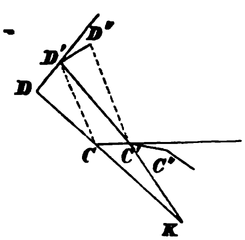

Fig. 99.

Im Uebrigen kennt man eine sehr elegante Methode, um den Krümmungshalbmesser der Bahnen der Systempunkte zu finden.

Hier, wo wir blos von den Bahnen der Systempunkte im Allgemeinen und von den Geschwindigkeiten, welche blos von den ersten Bahnelementen abhängen, handeln, wollen wir diese Theorie der Krümmungshalbmesser, welche die Betrachtung der ersten und zweiten Bahnelemente erfordert, noch nicht entwickeln; wir werden sie vielmehr der Theorie der Beschleu-

*) Vgl. Chasles, Aperçu historique, Note XXXIV, woselbst sich noch manche Einzelheiten über den Dualismus der Bewegungen finden. Ueber die Schneckenlinien des Pascal ebendas. und Note XXI.

nigung anfügen, welche selbst auf Constructionen dieser Gattung hinleitet, da auch sie von zwei aufeinanderfolgenden Geschwindigkeiten, resp. Bogenelementen, abhängt.

§. 12. Das Problem der Rouletten, nämlich, wenn die beiden auf einander rollenden Curven (C), (Γ) gegeben sind, die Bahn μ eines beliebigen Punktes M des beweglichen Systems zu finden, ist zweier Umkehrungen fähig: 1) wenn die Bahn μ eines Systempunktes M und die feste Curve (C) gegeben ist, die rollende Curve (Γ) zu finden, durch deren Bewegung über (C) hin M die Bahn μ beschreibt und 2) wenn μ und (Γ) gegeben sind, die Curve (C) zu finden, auf welcher (Γ) rollen muss, damit M die Curve μ beschreibe.

Die erste dieser Aufgaben kann in vielen Fällen folgendermaassen behandelt werden. Ist $(C_0 \Gamma_0)$ das Momentancentrum für irgend eine Lage M_0 des beschreibenden Punktes auf seiner Bahn μ (Fig. 100), so ist $C_0 M_0$ die Normale der Curve μ in M_0; gelangt M von M_0 nach M, so wickelt sich der Bogen $\Gamma_0 \Gamma$ auf den Bogen $C_0 C$ ab, so dass Γ und C zum Momentancentrum für die Lage M zusammentreten. $M_0 \Gamma$ wird zur Normalen MC von μ in M. Da die Curven (C) und μ gegeben sind, so kann $CM = l$ als Function des Bogens $C_0 C$ oder irgend einer anderen Grösse gefunden werden und hiemit erhält man tg $(C_0 CM) = f(l)$. Nun muss aber nach der Abwickelung des Bogens $\Gamma_0 \Gamma$ der Winkel $C_0 \Gamma M_0 = C_0 CM$ werden; daher muss tg $(\Gamma_0 \Gamma M_0) = f(l)$ werden.

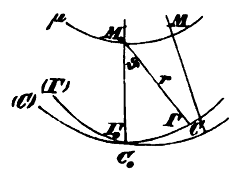

Fig. 100.

Nimmt man nun M zum Pol eines Polarcoordinatensystems, $M_0 \Gamma_0$ zur Polaraxe, $\Gamma_0 M \Gamma = \vartheta$ zum Polarwinkel und $M_0 \Gamma = r$ zum Radiusvector, so ist bekanntlich

$$\text{tg }(\Gamma_0 \Gamma M) = \frac{r\,d\vartheta}{dr}$$

und $M\,l = r$; es besteht daher für die Curve Γ die Differentialgleichung

$$r\,\frac{d\vartheta}{dr} = f(r).$$

Sie liefert

$$\vartheta = \int \frac{f(r)}{r}\,dr.$$

Beispiele.

1. Es seien (C) und μ gerade Linien, welche unter dem Winkel α gegen einander geneigt, sich in O schneiden (Fig. 101). Hier ist tg $(C_0 CM) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, mithin $\frac{r\,d\vartheta}{dr} = \text{cotg}\,\alpha$ und folglich $r = Ae^{\vartheta\,\text{tg}\,\alpha}$. Die Curve (Γ) ist also eine logarithmische Spirale, deren Tangenten unter dem Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ gegen die Radienvectoren des Poles der Spirale geneigt sind. Der Pol beschreibt die Gerade μ. Für den Punkt O ist $r = 0$, mithin muss $O\Gamma$ gleich dem Bogen der

Spirale vom Pol bis Γ sein. Rollt also eine logarithmische Spirale über eine Gerade, so beschreibt ihr Pol gleichfalls eine Gerade.

2. μ sei eine Kettenlinie $y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ und (C) ihre Directrix (Fig. 102). Man hat für sie $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}$ d. h. $\sin C_0 C M = \frac{a}{y}$, so dass das vom Fusspunkte P der Ordinate auf die Tangente gefüllte Perpendikel gleich a ist.

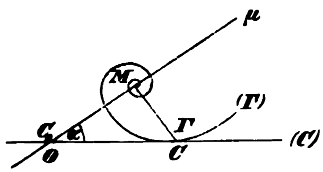

Fig. 101.

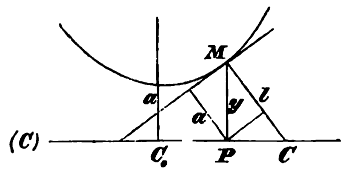

Fig. 102.

Ferner ist $l \sin(C_0 C M) = y$, mithin $l \sin^2(C_0 C M) = a$. Entnimmt man hieraus den Werth von $\operatorname{tg}(\Gamma_0 \Gamma M) = \sqrt{\frac{a}{r-a}}$, so wird die Differentialgleichung von (Γ):

$$r\frac{d\vartheta}{dr} = \sqrt{\frac{a}{r-a}}.$$

Setzt man $\frac{r-a}{a} = u^2$, also $dr = 2au\,du$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} d\vartheta = \frac{du}{1+u^2},$$

also

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \operatorname{arctg} u + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, sei $\vartheta = 0$ für $r = a$; hiefür ist $u = 0$, also $C = 0$. Die Gleichung der gesuchten Curve (Γ) ist

$$r = a\left(1 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\vartheta\right) = \frac{a}{\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2a}{1 + \cos\vartheta},$$

also eine Parabel. Rollt eine Parabel über eine Gerade, so beschreibt ihr Brennpunkt eine Kettenlinie.

In den Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellsch. der Wissenschaften, 6. Folge, B. III (1869) behandelt Lieblein die interessante Frage: „Auf welcher Curve (C) muss ein Kreis (Γ) rollen, damit jeder Punkt des beweglichen Systems einen Kreis beschreibe?" Die Abhandlung führt den Titel: „Ueber den Zusammenhang verschiedener Transformationsformeln für elliptische Integrale mit einem Probleme der Geometrie."

§. 13. Um Untersuchungen über die Geschwindigkeiten der Punkte im beweglichen ebenen System analytisch durchführen zu können, bezieht man die Punkte des Systems auf zwei Coordinatensysteme, die wir als rechtwinklige Parallelcoordinatensysteme annehmen wollen, nämlich auf ein festes (absolutes) in der Ebene der Bewegung befindliches der x, y mit den Axen OX, OY und ein im beweglichen System festes, mit diesem bewegliches der x', y' mit den beweglichen Axen $O'X'$, $O'Y'$. Sind x_1, y_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs O' in Bezug auf die festen Axen, und sind a, b; a', b' die Richtungscosinusse der

x'- und der y'-Axe gegen die x- und y-Axen, nämlich die Cosinusse der Winkel $(X'X)$, $(X'Y)$, $(Y'X)$, $(Y'Y)$, so bestehen die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ax' + a'y' \\ y &= y_1 + bx' + b'y' \end{aligned} \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 = 1, \quad aa' + bb' = 0. \tag{1}$$

Für den Systempunkt (x', y'), dessen absolute Coordinaten x, y sind, sind die Componenten v_x, v_y seiner Geschwindigkeit v parallel den absoluten Coordinaten

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \text{ und ist } v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Die Componenten $v_{x'}$, $v_{y'}$ von v parallel den beweglichen Axen sind die Projectionen von v oder $[v_x] + [v_y]$ auf diese Axen, nämlich

$$v_{x'} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}, \quad v_{y'} = a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt}. \tag{2}$$

Um diese Componenten zu entwickeln, differentiiren wir die obigen Transformationsformeln nach der Zeit t und berücksichtigen, dass x', y' constant nach t sind, weil der Systempunkt im System seine Lage nicht ändert. Dies liefert:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt},$$

$$a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} = 0, \quad a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} = 0,$$

$$a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} = -\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt}\right) = \omega, \tag{3}$$

worin ω vorläufig eine blosse Abkürzung sein soll. Hiemit erhält man mit Rücksicht auf die drei letzten dieser Gleichungen

$$\begin{aligned} v_{x'} &= a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + \omega y' \\ v_{y'} &= a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} - \omega x'. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Coordinaten x'_0, y'_0 des Punktes, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t Null ist, d. h. des Mittelpunktes Γ der Geschwindigkeiten oder des Momentancentrums, als Punkt des Systems aufgefasst, genügen den Gleichungen $v_{x'} = 0$, $v_{y'} = 0$, d. h.

$$\begin{aligned} a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + \omega y'_0 &= 0 \\ a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} - \omega x'_0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \omega x'_0 &= a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} \\ -\omega y'_0 &= a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt}. \end{aligned} \tag{5}$$

Hiedurch wird die Lage dieses Punktes im System bekannt. Um die Coordinaten x_0, y_0 des Momentancentrums in der festen Ebene zu finden, hat man die Werthe von x'_0, y'_0 in die obigen Transformationsformeln (1) einzuführen, wodurch man findet:

$$\begin{aligned} \omega x_0 &= \omega x_1 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \omega y_0 &= \omega y_1 + \begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}$$

Es ist aber, wenn $a = \cos\alpha$ gesetzt wird,

$$b = \sin\alpha, \; a' = \cos(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \; b' = \cos\alpha,$$

mithin $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 1$ und folglich

$$\begin{aligned} \omega x_0 &= \omega x_1 + \frac{dy_1}{dt} \\ \omega y_0 &= \omega y_1 - \frac{dx_1}{dt}. \end{aligned} \tag{6}$$

Subtrahirt man die Gleichungen (5) von (4), so kommt

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \omega\,(y' - y'_0) \\ v_{y'} &= \omega\,(x' - x'_0) \end{aligned}$$

und hieraus, wenn der Abstand des Punktes (x', y') von Γ mit r bezeichnet wird, nämlich $r = [(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ ist,

$$v = r\omega.$$

Es ist mithin ω die Winkelgeschwindigkeit um das Momentancentrum (C, Γ).

§. 14. Zieht man von irgend einem festen Ursprunge O nach den Endpunkten M, M' des Bogenelementes $MM' = ds$, welches der Punkt M im Zeitelemente dt beschreibt, Radienvectoren r, $r + dr$, sò ist der Elementarsector $OMM' = dS = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta$, wenn $\sphericalangle\, MOM' = d\vartheta$. Diese unendlich kleine Grösse dS ist das Differential, welches der von O nach M gezogene, im Allgemeinen veränderliche Radiusvector r in irgend einer Zeit t beschrieben hat. Den Quotienten $\frac{dS}{dt}$ nennt man die Sectoren- oder Flächengeschwindigkeit des Punktes M in Bezug auf O als Ursprung der Sectoren zur Zeit t. Es ist daher die Sectorengeschwindigkeit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Ist O das Momentcentrum C, so wird sie $\frac{1}{2} r^2 \omega$, da alsdann $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe darstellt.

Für rechtwinklige Coordinaten x, y mit O als Ursprung hat man nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie

$$\text{Sect. } MOM' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}$$

mithin für die Sectorengeschwindigkeit

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{vmatrix}.$$

§. 15. Ausser der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe spielt bei der Bewegung unseres Systems noch eine andere Geschwindigkeit eine Rolle, nämlich die Geschwindigkeit u mit welcher die Momentanaxe wechselt. Sie ist der unendlich kleine Abstand des der Zeit t entsprechenden

Momentancentrums von dem folgenden, der Zeit $t + dt$ entsprechenden, dividirt durch das Zeitelement dt. Dieser Abstand ist das Bogenelement $d\sigma$ der Curve (C) oder (Γ) und daher

$$u = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Diese Geschwindigkeit ist durch die Krümmung der Curven (C) und (Γ) mit der Winkelgeschwindigkeit ω um das Momentancentrum verknüpft. Sind nämlich $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ die Contingenzwinkel der Curven (C) und (Γ), und nehmen wir zunächst an, es liegen die Krümmungskreise der beiden Curven, die man für die Elementarbewegung den Curven selbst substituiren kann, da sie mit ihnen zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente gemein haben, auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente (Fig. 103), so stellt $d\varepsilon - d\varepsilon'$ die Elementaramplitude $d\vartheta$ der Rotation um das Momentancentrum dar, wenn der positive Sinn der Drehung nach der Seite der gemeinschaftlichen Tangente hin angenommen wird, auf welcher die Krümmungskreise liegen. Nun ist

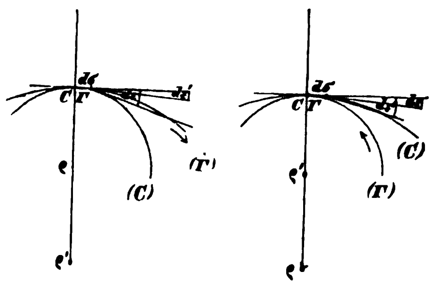

Fig. 103.

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt};$$

daher erhält man zunächst durch Division der vorigen Gleichung in diese:

$$\frac{\omega}{u} = \frac{d\vartheta}{d\sigma}.$$

$d\vartheta$ kann man den relativen Contingenzwinkel der Curven (C), (Γ) und den Quotienten von $d\vartheta$ durch das gemeinschaftliche Bogenelement $d\sigma$ die relative Krümmung derselben nennen. Demnach stellt das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe zur Wechselgeschwindigkeit derselben die relative Krümmung der Curven (C) und (Γ) dar, die während der Bewegung des Systems auf einander rollen. Das umgekehrte Verhältniss $u : \omega$ ist eine Länge, die als Radius der relativen Krümmung angesehen werden kann, wenn man die Analogie der gewöhnlichen Krümmung einer Curve mit der relativen Krümmung vollständig durchführen will. Durch die eben entwickelte Abhängigkeit von Ω und U erhellt, dass beide zusammen constant oder variabel sind, je nachdem es die relative Krümmung der Curven (C), (Γ) ist oder nicht ist und dass die eine aus der andern folgt, sobald diese Curven und ein Paar homologe Punkte derselben gegeben sind, nebst dem Sinne, in welchem längs der Curve (C) die Punkte der Curve (Γ) sich auflegen oder dem Sinne der Aufeinanderfolge der Momentancentra. Die relative Krümmung kann positiv oder negativ oder Null sein und der verschiedenen Beschaffenheit ihres Vorzeichens entspricht ein positiver oder negativer Sinn der Winkelgeschwindigkeit ω; dem Durchgang durch Null entspricht ein momentanes Verschwinden und eine Umkehrung des Sinnes dieser Grösse. Nun sind, wenn die Krümmungshalbmesser der Curven (C), (Γ) mit ϱ, ϱ' bezeichnet werden, die Krümmungen dieser Curven

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{d\varepsilon'}{d\sigma}$$

und mithin wird die relative Krümmung die Differenz dieser Krümmungen, nämlich

$$\frac{d\vartheta}{d\sigma} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'},$$

also positiv, Null oder negativ, je nachdem der Krümmungshalbmesser der Curve (Γ) grösser, gleich oder kleiner als der Krümmungshalbmesser der Curve (C) ist. So lange also der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve (Γ) auf der gemeinschaftlichen Normale in dem Aussenraume der Strecke zwischen dem Berührungspunkte der Curven und dem Krümmungsmittelpunkte der festen Curve (C) sich befindet, erfolgt die Rotation des Systems mit positiver, sobald er auf dieser Strecke selbst liegt, mit negativer Winkelgeschwindigkeit und der Durchgang derselben durch den Krümmungsmittelpunkt von (C) bezeichnet den Sinneswechsel derselben.

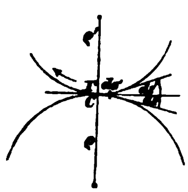

Fig. 104.

Fällt der Krümmungskreis der Curve (Γ) auf die entgegengesetzte Seite der gemeinsamen Tangente (Fig. 104), so stellt $d\varepsilon + d\varepsilon'$ die Elementaramplitude $d\vartheta$ dar und genügt also ein Zeichenwechsel von $d\varepsilon'$ und in Folge dessen von ϱ', um die entwickelten Formeln diesem Falle anzupassen. Hierbei liegt der Krümmungsmittelpunkt von (Γ) immer in dem Aussenraume jener Strecke und kann ω das Zeichen nicht wechseln. Geht ϱ' mit Zeichenwechsel durch das Unendliche hindurch, so wechselt deswegen ω nicht das Zeichen.

Die Combination der entwickelten Formeln liefert die Gleichung

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'},$$

welche allgemein gilt, wenn man ϱ' als von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen mit ϱ ansieht, je nachdem die Krümmungsmittelpunkte beider Curven auf dieselbe Seiten oder auf entgegengesetzte Seite der gemeinsamen Tangente fallen.

V. Capitel.

Die relative Bewegung in der Ebene.

§. 1. Ein ebenes unveränderliches System bewegt sich in der Ebene und sei seine Bewegung hinsichtlich der Bahnen seiner Punkte, ihrer Geschwindigkeiten, der Curven (C), (Γ), der Winkelgeschwindigkeit ω um (C, Γ) und der Wechselgeschwindigkeit u des Momentancentrums für jede Zeit bekannt; ein Punkt bewege sich unabhängig von diesem System in derselben Ebene und sei seine Bewegung, was die Bahn und Geschwindigkeit betrifft, gleichfalls für jede Zeit bekannt. Während nun Punkt und System sich bewegen, trifft der Punkt mit immer anderen Punkten des Systems zusammen, so dass er im System eine bestimmte Punktreihe durchwandert, d. h. im System eine bestimmte Bahn beschreibt. Diese Bewegung des Punktes im System heisst seine relative Bewegung und die Bahn, welche er in ihm beschreibt, nämlich die continuirliche Folge der Systempunkte, mit welchen er während der Bewegung zusammentrifft, seine relative Bahn im System oder in Bezug auf das System. Dieser relativen Bewegung gegenüber heisst, wenn auch nicht ganz passend, die Ortsveränderung des Punktes in der Ebene, in welcher Punkt und System sich bewegen, seine absolute Bewegung, seine Bahn in ihr seine absolute Bahn und diese Ebene selbst die absolute Ebene. Damit kann freilich nicht gemeint sein, dass diese Ebene nothwendig ruhe; es braucht dies keineswegs der Fall zu sein. Die Geschwindigkeit, mit welcher er seine Bahn beschreibt, d. h. der Quotient des Bogenelementes der relativen Bahn durch das Zeitelement heisst die relative Geschwindigkeit des Punktes.

Bewegen sich zwei ebene Systeme zugleich in derselben Ebene, so nimmt jedes im andern successive andere und andere Lagen an und beschreibt jeder Punkt des einen im andern eine relative Bahn. Die Ortsveränderung des einen Systems im andern heisst seine relative Bewegung in Bezug auf dieses. Es hat jedes eine relative Bewegung in Bezug auf das andere. Die Bewegung jedes Systems in der gemeinsamen Ebene der Bewegung heisst seine absolute Bewegung.

Bewegen sich drei Systeme zugleich in einer Ebene, so hat jedes in Bezug auf jedes andere eine relative Bewegung. Da aber das andere selbst eine relative Bewegung in Bezug auf das dritte hat, so kann man von relativer Bewegung zweiter Ordnung des ersten in Bezug auf das dritte reden etc.

§. 2. Die Aufgaben der relativen Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein System, welche hieher gehören, sind: 1. Wenn gegeben ist die absolute Bahn des Punktes, seine Lage auf derselben und seine Geschwindigkeit zu jeder Zeit, sowie die absolute Bewegung des Systems, dessen Momentancentrum und Winkelgeschwindigkeit um dasselbe zu jeder Zeit, die relative Bahn und relative Geschwindigkeit des Punktes zu finden; 2. wenn gegeben ist die relative Bahn des Punktes im System und seine relative Geschwindigkeit für jede Zeit, sowie die Lage und der Geschwindigkeitszustand des Systems für jede Zeit, die absolute Bahn und absolute Geschwindigkeit des Punktes zu finden.

Aehnlich sind die Aufgaben, welche die relative Bewegung zweier Systeme betreffen: 1. Wenn gegeben sind die absoluten Bewegungen zweier Systeme für jede Zeit d. h. die Lagen der Systeme und ihr Geschwindigkeitszustand durch die Curven (C), (Γ) und die Winkelgeschwindigkeit um C, die relative Bewegung des einen in Bezug auf das andere, d. h. die relativen Curven (C), (Γ) und die relative Winkelgeschwindigkeit zu finden, 2. wenn die absolute Bewegung des einen und die relative Bewegung des anderen in Bezug auf dieselbe für jede Zeit gegeben sind, die absolute Bewegung des andern Systems zu finden.

Für die Behandlung dieser Aufgaben ist ein Princip von Wichtigkeit, welches wir bei Gelegenheit der Umkehrung der Bewegung (§. 5.) bereits benutzt haben und welches die Bestimmung der relativen Bewegung auf die einer absoluten Bewegung zurückführt. Das bewegliche System sei Σ, P der Punkt, um dessen relative Bewegung in Σ es sich handelt und falle P zur Zeit t mit dem Systempunkte p zusammen, d. h. er habe die Lage p auf seiner relativen Bahn. Ertheilt man nun dem System ausser der vorhandenen noch eine weitere Elementarbewegung, so würde vermöge dieser der Systempunkt p sich von P entfernen; ertheilt man daher P dieselbe Bewegung, welche der mit ihm eben vereinigte Systempunkt p durch die zugefügte Bewegung annimmt, so bleibt P mit p verbunden und entfernt sich von ihm blos in Folge seiner absoluten Bewegung, d. h.:

Die relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein bewegliches System wird nicht geändert, wenn man dem System noch irgend eine andere Bewegung, dem Punkte aber zugleich in jedem Momente diejenige Bewegung ertheilt, welche der in diesem Momente mit ihm zusammenfallende Systempunkt vermöge der zugefügten Bewegung annimmt.

Wählt man zu der zuzufügenden Bewegung in jedem Momente diejenige, welche der vorhandenen Elementarbewegung des Systems entgegengesetzt ist, so gelangt das System zur Ruhe, während sich die absolute Bewegung des Punktes mit der ihm zu ertheilenden entgegengesetzten Bewegung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes zu der relativen Bewegung combinirt und ergibt sich daher weiter:

Die relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein System ist in jedem Momente die Resultante aus der absoluten Bewegung desselben und derjenigen Bewegung, welche der Bewegung des mit dem Punkte in diesem Momente zusammenfallenden Systempunktes entgegengesetzt gleich ist. Da das System hiebei ruht, so geschieht die Bestimmung der relativen Bewegung in demselben hiedurch, wie die einer absoluten und ist mithin dieser Satz das Mittel, um die Bestimmung der relativen Bewegung eines Punktes auf die einer absoluten zurückzuführen.

In gleicher Weise lassen sich diese Betrachtungen auf die relative Bewegung eines Systems in einem andern anwenden. Die relative Bewegung eines Systems in Bezug auf ein anderes System wird nicht geändert, wenn man beiden in jedem Momente ein und dieselbe Elementarbewegung ertheilt.

Die relative Bewegung eines Systems in Bezug auf ein anderes System ist in jedem Momente die Resultante aus der absoluten Bewegung des ersteren und der entgegengesetzten Bewegung des zweiten, nämlich die aus diesen beiden Elementarbewegungen resultirende Elementarbewegung.

§. 3. Die Anwendung dieses Princips auf die Lösung der obigen Aufgaben über die relative Bewegung eines Punktes oder Systems ist leicht.

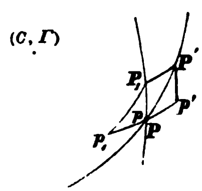

Fig. 105.

Es sei für irgend eine Lage des Systems (C, Γ) (Fig. 105) das Momentcentrum und pp' das Element, welches der mit dem Punkte P, dessen relative Bewegung zu bestimmen ist, zusammenfallende Systempunkt p beschreiben würde; kehrt man die Elementarbewegung des Systems um, so stelle pp_1 das dieser umgekehrten Bewegung entsprechende Bahnelement desselben Punktes dar. Der Punkt P beschreibe nun das Element PP' seiner absoluten Bahn während der Elementarbewegung des Systems; die Diagonale PP_1 des unendlich kleinen Parallelogramms $PP'P_1p_1$ stellt alsdann das Element der relativen Bahn dar und P', P_1 sind die correspondirenden Orte des Punktes P am Ende der Elementarbewegung auf der absoluten und relativen Bahn. Wiederholt man dieselbe Construction für die folgende Elementarbewegung des Systems, so ergibt sich ein weiteres Paar correspondirender Orte etc. und können auf diese Weise beliebig viele Punkte der relativen Bahn bestimmt werden.

Soll andererseits aus der relativen Bewegung eines Punktes und der Bewegung des Systems die absolute Bewegung des Punktes gefunden werden, so folgt ebenso einfach, dass das Element der absoluten Bahn die Diagonale des unendlich kleinen Parallelogramms ist, dessen Seiten das Element der relativen Bahn und das Element sind, welches der mit dem Punkte, um dessen absolute Bewegung es sich handelt, zusammenfallende Systempunkt vermöge der Elementarbewegung des Systems beschreibt.

Befindet sich der Punkt P in absoluter Ruhe, so ist $PP' = 0$ und fällt das Element PP_1 der relativen Bahn mit dem Elemente pp_1 der Bahn des Systempunktes zusammen, welche dieser vermöge der umgekehrten Bewegung des Systems beschreiben würde; da dies von allen Elementen gilt, so folgt, dass die relative Bahn im System überhaupt mit der umgekehrten Bahn des Systempunktes übereinkommt.

Soll der Punkt P sich in relativer Ruhe befinden, so muss PP_1 verschwinden, folglich PP' mit pp' zusammenfallen, es muss P mithin an der Bewegung des Systems theilnehmen.

§. 4. Beispiele.

1. Es sei $PP'P''$ . . . (Fig. 106) die absolute Bahn eines Punktes P; ein System Σ besitzt eine Translationsbewegung, vermöge welcher alle Punkte desselben Bahnen congruent und parallel $AA'A''$ . . ., der Bahn eines Systempunkts A beschreiben; es seien ferner P, A; P', A'; P'', A''; . . . correspondirende Lagen von P und A, die in beliebiger Menge aufgefunden werden können; die relativen correspondirenden Orte des Punktes P in Bezug auf das System oder also dessen relative Bahn im System zu bestimmen.

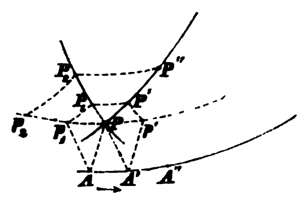

Fig. 106.

Zieht man AA', $A'P$ und mit diesen Geraden parallel Pp_1, Ap_1, so ist p_1 der Ort, an welchen der mit P zusammenfallende Systempunkt p vermöge der dem System zu ertheilenden entgegengesetzten Translationsbewegung gelangen würde, während P selbst auf der absoluten Bahn nach P' gelangt. Durch Vollendung des Parallelogramms $PP'P_1p_1$ ergibt sich daher der dem Punkt P' entsprechende relative Ort P_1. Die Construction ist gleich gut anwendbar für verschwindend kleine Abstände PP', pp_1, wie für endliche, also für die Elementarbewegungen so gut wie für Bewegungen von endlichen Bahnstrecken und da bei Translationen alle homologen Partien der Figuren sich parallel bleiben, so kann man die Sehnen der Bogen oder die Bogen selbst zur Bildung der Parallelogramme verwenden. Ebenso gut hätte man auch die Parallelogramme $APp'A'$ und $Pp'P'P_1$ benutzen können; man hätte dann pp' als die Bahn des Systempunktes, welche dieser in Folge der direkten (nicht umgekehrten) Translation beschreibt und die absolute Bewegung aus der Bewegung des Systempunktes und der relativen Bewegung zusammengesetzt gedacht, während nach der vorigen Construction die relative Bewegung aus der absoluten und der entgegengesetzten Bewegung des Systempunktes als Resultante hervorgehend gedacht wird.

Man kann die Construction auf verschiedene Weise fortsetzen. Einmal kann man $AA''Pp_2$ und $pP''P_2p_2$ bilden und erhält mit Hülfe der Lage p_2 des Punkts p, welche der umgekehrten Translation AA'' entspricht, den Punkt P_2 der relativen Bahn, welcher durch die direkte Translation mit P'' zusammengeführt wird; oder man führt die Construction für den mit P' zusammenfallenden Systempunkt P_1 unter Zugrundelegung der Translation $A'A''$ aus, muss alsdann aber den gewonnenen relativen Ort in die ursprüngliche Lage des Systems zurückversetzen, da die

Construction annimmt, dass das System bereits die Translation AA' ausgeführt habe und P_1 sich in P' befinde.

Ist der Punkt P in absoluter Ruhe, so reducirt sich die absolute Bahn $PP'P''\ldots$ auf diesen Punkt, fällt die relative Bahn $PP_1P_2\ldots$ mit der entgegengesetzten Translationsbahn $pp_1p_2\ldots$, zusammen und ist der directen Translationsbahn $pp'p''\ldots$ symmetrisch gleich in symmetrischer Lage. Ein passendes Specialbeispiel hiezu bietet die jährliche Bewegung der Erde dar. Wenn dieselbe keine Axendrehung besässe, so wäre sie ein in Translation begriffenes System und die Translationsbahn wäre die Ellipse, welche ihr Mittelpunkt um den Sonnenmittelpunkt als Brennpunkt im Laufe des Jahres beschreibt. Wird nun der Sonnenmittelpunkt als in absoluter Ruhe befindlich angenommen, so ist dessen relative Bahn in Bezug auf die Erde eine symmetrisch gleiche und symmetrisch liegende Ellipse, welche vom Sonnenmittelpunkte um den Erdmittelpunkt als Brennpunkt im umgekehrten Sinne der Bewegung der Erde beschrieben wird.

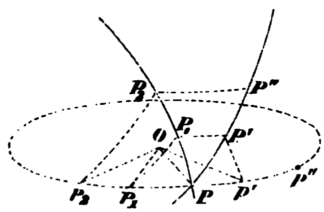
Fig. 107.

2. Es sei $PP'P''\ldots$ (Fig. 107) die ebene absolute Bahn eines Punktes P, ein System Σ in derselben Ebene besitze eine Rotation um den Punkt O, und seien $0, pOp', pOp'',\ldots$ die Amplituden der Rotation, welche den absoluten Lagen P, P', $P''\ldots$ entsprechen, man soll die relativen Orte des Punktes P, also dessen relative Bahn im System bestimmen.

Construirt man die Orte $p, p_1, p_2\ldots$, welche der mit P zusammenfallende Systempunkt p in Folge der entgegengesetzten Rotation einnimmt, so liefern die krummlinigen Parallelogramme $PP'P_1p_1$, $PP''P_2p_2,\ldots$ die relativen Orte $P_1, P_2\ldots$ und damit beliebig viele Punkte der relativen Bahn.

Ist der Punkt P in absoluter Ruhe, so reducirt sich die absolute Bahn auf den Punkt P und fällt die relative Bahn mit der entgegengesetzten Rotationsbahn des mit p zusammenfallenden Systempunktes zusammen. Ein Beispiel hiezu bietet die tägliche Bewegung der Erde dar. Würde die Erde im Raume nicht fortschreiten, so wäre sie ein System, welches blos eine Rotation um ihre Axe besitzt. Wird nun der Sonnenmittelpunkt als absolut ruhend angesehen, so ist seine relative Bahn in Bezug auf das System ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Erdaxe ist, und im umgekehrten Sinn der Erdrotation beschrieben wird (scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde).

§. 5. Die Geschwindigkeit der relativen Bewegung eines Punktes heisst dessen relative Geschwindigkeit; man erhält sie, indem man das Bogenelement der relativen Bahn durch das Zeitelement dividirt und ihre Richtung ist die Tangente der relativen Bahn. Nach Cap. III, §. 15. ist die absolute Geschwindigkeit v eines Punktes die Resultante aus seiner relativen Geschwindigkeit v_1 und der Geschwindigkeit v_2 des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes und wird aus beiden mit Hülfe des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten gefunden (Fig. 108). Trägt man nun v_2 im entgegengesetzten Sinne auf,

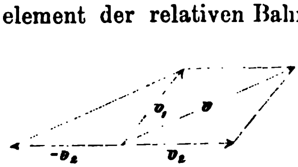
Fig. 108.

so ergibt sich ein zweites Parallelogramm, in welchem die relative Geschwindigkeit v_1 Diagonale ist, während v und $-v_2$ Seiten sind. Man erhält daher folgenden Satz:

Die relative Geschwindigkeit eines Punktes ist die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit desselben und der im entgegengesetzten Sinn genommenen Geschwindigkeit des mit ihm zusammenfallenden Punktes des Systems, auf welches die relative Bewegung sich bezieht.

Projicirt man das erstere der beiden Parallelogramme auf irgend eine Axe, so wird mit Rücksicht auf den Sinn der Linien die Projection der absoluten Geschwindigkeit durch die Summe der Projectionen der relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Systempunktes dargestellt. Hieraus folgt, dass die Projection der relativen Geschwindigkeit auf irgend eine Axe gleich ist der Differenz zwischen der Projection der absoluten Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Systempunktes, oder, was auf dasselbe hinauskommt, gleich der Summe der Projectionen der absoluten Geschwindigkeit und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des Systempunktes.

§. 6. Beispiele und Anwendungen.

1. Ein Schwimmer will vom Punkte G vom Rande eines Flussufers aus den Punkt H auf dem gegenüberliegenden Ufer in gerader Linie mit constanter (absoluter) Geschwindigkeit v schwimmend erreichen. Die constante Geschwindigkeit des Flusses sei v_2, in welcher Richtung gegen den Strom und mit welcher relativen Geschwindigkeit v_1 muss er im Strome schwimmen, um das Ziel zu erreichen?

Ist $GV_2 = v_2$ (Fig. 109) die Geschwindigkeit des Stromes (des Systempunktes, welcher mit dem beweglichen Punkte zusammenfällt), $GV_1 = v_1$ die gesuchte relative Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung, so muss die Diagonale $GV = v$ des Parallelogramms über GV_2 und GV_1 in die Richtung GH fallen. Hiedurch bestimmt sich die relative Geschwindigkeit v_1 und ihre Richtung.

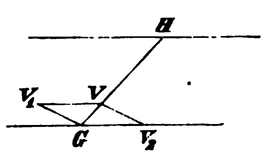

Fig. 109.

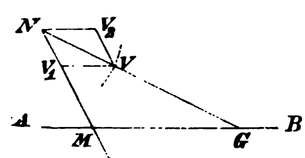

Fig. 110.

Ist v der Grösse nach nicht gegeben, so hat die Aufgabe unendlich viele Lösungen. Die vortheilhafteste Lösung wird diejenige sein, welche die kleinste relative Geschwindigkeit v_1 liefert. Man erhält sie, indem man für V_2V die Normale auf GH wählt.

2. Ein Punkt M beschreibt mit constanter Geschwindigkeit v_2 eine Gerade AB (Fig. 110); ein zweiter Punkt N bewegt sich mit der Geschwindigkeit v mit M in einer Ebene nach einer noch näher zu be-

stimmenden Richtung. Wie ist die Richtung der Bewegung von N zu bestimmen, damit er mit M zusammentreffe? Die relative Geschwindigkeit v_1 von N in Bezug auf ein Translationssystem, welchem M angehört, muss fortwährend durch M gehen. Nun ist die absolute Geschwindigkeit v des Punktes N die Resultante aus der relativen v_1 und der Geschwindigkeit v_2 des Punktes M. Ist also $NV_2 = v_2$ und beschreibt man mit $NV = v$ aus N einen Kreis, so liefert $V_2V \parallel NM$ den Punkt V des Kreises, so dass NV die Richtung ist, welche der Punkt N einschlagen muss und die Vollendung des Parallelogramms NV_2VV_1 die relative Geschwindigkeit $NV_1 = v_1$ des Punktes N.

Aus der Figur, worin G der Schnittpunkt von NV mit AB sei, folgt

$$MG : NG = v_2 : v.$$

Es ist also der Punkt G so zu finden, dass das Verhältniss seiner Abstände von den Punkten M, N ein gegebenes $v_2 : v$ sei. Der Ort der Punkte G ist bekanntlich ein Kreis, mit dem Mittelpunkte auf NM, welcher Kreis die Strecke NM nach dem Verhältniss $v_2 : v$ harmonisch theilt, nämlich so, dass für die Schnittpunkte P, Q mit NM die Proportion besteht $NP : PM = NQ : MQ$.

Wann wird die Lösung unmöglich?

§. 7. Für die analytische Behandlung kommt das Problem der relativen Bewegung auf das Problem der Coordinatentransformation zurück. Man denkt sich nämlich zwei Coordinatensysteme, von denen das eine der absoluten Ebene, das andere dem beweglichen System angehört. Die Coordinaten eines beweglichen Punktes in Bezug auf das erste geben seinen Ort im absoluten Raume an und heissen seine absoluten Coordinaten, die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf das andere bestimmen seinen Ort im beweglichen System und sind seine relativen Coordinaten. Die Art und Weise, wie diese Coordinaten sich ändern, bestimmt die Bewegung der einen oder der andern Art. Die absoluten Coordinaten des Punktes seien x, y; die relativen derselben x', y'; die Bewegung des Systems werde durch die Bewegung des Ursprungs der relativen Coordinaten und der Axen des relativen Coordinatensystems bestimmt. Da letztere in verschiedenen Fällen einfacher, in anderen complicirter ist, so behandeln wir dieselben der Reihe nach.

1. Das bewegliche System besitze blos eine Translation (Fig. 111); hiebei bewegen sich die Axen der x', y' parallel mit sich; wir nehmen der Einfachheit wegen die Axen beiderlei Coordinaten als mit einander resp. parallel an. Sind x_1, y_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs, so hängen sie mit den Vorigen durch die Gleichungen zusammen:

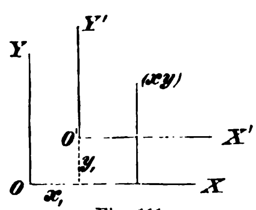

Fig. 111.

$$x_1 + x' - x = 0, \quad y_1 + y' - y = 0,$$

welche man findet, indem man den Umfang des Dreiecks, gebildet von den Anfangspunkten der beiden Coordinatensysteme und dem Punkte (xyz), auf die absoluten oder auf die relativen Axen projicirt, gleich Null setzt. Die relativen Coordinaten sind daher:

$$x' = x - x_1,$$
$$y' = y - y_1;$$

sind also die absoluten und die Coordinaten des relativen Ursprungs als Functionen irgend einer Grösse z. B. der Zeit gegeben, so erhält man hiedurch die relativen Coordinaten als Functionen derselben Grösse.

2. Das bewegliche System besitze blos eine Bewegung um einen festen Punkt (Fig. 112). Wir nehmen denselben zum Ursprung der absoluten und der relativen Coordinaten x, y; x', y' und bestimmen die Lage der x'-Axe gegen die festen Axen der x, y durch die Winkel, welche sie mit ihnen bildet, deren Cosinuse a, b seien, ebenso die Lage der y'-Axe gegen dieselben durch ihre Neigungswinkel, deren Cosinusse a', b' sind. Die vier Grössen a, b; a', b' hängen von der Bewegung des Systems ab und sind unter sich durch 3 unabhängige Relationen verbunden, vermöge welcher sie auf eine reducirbar sind. Projicirt man unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten den Linienzug der Coordinaten x', y' und zurück nach dem Ursprung auf die absoluten Axen, und andererseits den Linienzug der x, y und zurück zum Ursprung auf die relativen Axen, so erhält man:

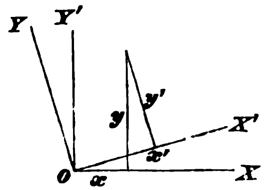

Fig. 112.

$$x = ax' + a'y' \qquad\qquad x' = ax + by$$
$$y = bx' + b'y' \qquad\qquad y' = a'x + b'y,$$

wobei die Relationen bestehen:

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad\qquad a^2 + a'^2 = 1$$
$$a'^2 + b'^2 = 1 \qquad\qquad b^2 + b'^2 = 1$$
$$aa' + bb' = 0 \qquad\qquad ab + a'b' = 0$$

von denen jedesmal die zwei ersten ausdrücken, dass $a, b, \ldots$ Richtungscosinus einer Geraden sind, während die zwei letzten die Rechtwinkligkeit der Axen darstellen.

3. Besitzt das bewegliche System die allgemeinste Bewegung, so genügt eine Combination der beiden vorigen Fälle, um die relativen Coordinaten zu bestimmen. Denkt man sich nämlich durch den Ursprung der beweglichen Axen zwei Hülfsaxen der ξ, η, welche während der Bewegung den festen Axen fortwährend parallel bleiben, so hat man, wie bei 2.:

$$\begin{aligned} x' &= a\,\xi + b\,\eta \\ y' &= a'\xi + b'\eta \end{aligned} \quad \text{und zugleich:} \quad \begin{aligned} \xi &= x - x_1 \\ \eta &= y - y_1, \end{aligned}$$

mithin aus diesen Gleichungen zusammen:

$$x' = a(x - x_1) + b(y - y_1)$$
$$y' = a'(x - x_1) + b'(y - y_1).$$

§. 8. Die Differentiation der Formeln des §. 7. liefert die Componenten $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ der Geschwindigkeit der relativen Bewegung.

1. Bei einer Translationsbewegung des Systems sind sie daher

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}.$$

Da die Geschwindigkeit des beweglichen Ursprungs (x_1, y_1) die Translationsgeschwindigkeit des Systems, also die Geschwindigkeit jedes Systempunktes angibt, so erkennt man hierin die Uebereinstimmung mit dem Satze §. 5., a. E.

2. Besitzt das System eine Rotation um einen Punkt, den festen Ursprung, so ist nach Nr. 2. des §. 7.:

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}\right) + \left(x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt}\right),$$

$$\frac{dy'}{dt} = \left(a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt}\right) + \left(x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt}\right).$$

Hierin bedeuten die Glieder

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt}, \quad a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt}$$

die Projectionssummen der Componenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ der absoluten Geschwindigkeit auf die beweglichen Axen; also die Projectionen dieser Geschwindigkeit selbst auf diese Axen. Die übrigen Glieder

$$x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt}, \quad x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt}$$

bedeuten, wie sofort gezeigt werden soll, die Componenten der Geschwindigkeit des mit dem Punkte (x, y) zusammenfallenden Systempunktes parallel den beweglichen Axen. Zu dem Ende gestalten wir sie etwas um, indem wir x, y ausdrücken mit Hülfe der Gleichungen

$$x = ax' + a'y', \quad y = bx' + b'y',$$

sie hierauf ordnen und die aus der Differentiation der Nebenrelationen

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 = 1, \quad aa' + bb' = 0$$

entspringenden Gleichungen

$$a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} = 0, \quad a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} = 0,$$

$$a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} = -\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt}\right)$$

benutzen. Dadurch nehmen sie die Form an:

$$-\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt}\right)y', \quad -\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt}\right)x'.$$

Für den Systempunkt, welcher zur Zeit t mit dem Punkte (xy) zusammenfällt, sind x', y' nach t constant, weil er im System seine Lage nicht ändert. Daher erhält man für ihn die Componenten seiner Geschwindigkeit parallel den unbeweglichen Axen, indem man bei der Differentiation der Gleichungen

$$x = ax' + a'y', \quad y = bx' + b'y'$$

blos a, a'; b, b' als veränderlich, x', y' aber als constant ansieht. Dieselben sind daher

$$x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt}, \quad x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt}.$$

Indem man dieselben auf die beweglichen Axen projicirt, d. h. sie resp. mit a, b; a', b' multiplicirt und addirt, liefern sie uns die Componenten der Geschwindigkeit des Systempunktes parallel den beweglichen Axen, nämlich:

$$\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt}\right)y', \quad \left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt}\right)x'.$$

Dies sind aber genau die entgegengesetzten von den oben gefundenen Werthen, w. z. b. w.

3. Ganz ebenso führt die Differentiation der Gleichungen Nr. 3. in §. 7. zur Kenntniss der Componenten der relativen Geschwindigkeit in einem System, welches die allgemeinste Art der Bewegung hat, welche in der Ebene möglich ist; nämlich:

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a\frac{d\xi}{dt} + b\frac{d\eta}{dt}\right) + \left(\xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{db}{dt}\right),$$

$$\frac{dy'}{dt} = \left(a'\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt}\right) + \left(\xi\frac{da'}{dt} + \eta\frac{db'}{dt}\right),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}.$$

Die Grössen $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$ stellen die relativen Coordinaten in Bezug auf ein bewegliches System dar, dessen Axen der ξ, η fortwährend den festen Axen der x, y parallel bleiben und $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ sind die Componenten der relativen Geschwindigkeit des Punktes x, y in Bezug auf diese Axen.

§. 9. Um die relative Elementarbewegung eines ebenen Systems Σ_1 in einem andern System Σ_2 zur Zeit t zu erhalten, ertheilen wir beiden Systemen zusammen, wie einem Gesammtsysteme, die entgegengesetzte absolute Elementarbewegung von Σ_2 um dessen Momentancentrum. Die aus der absoluten Elementarbewegung von Σ_1 und der entgegengesetzten absoluten Elementarbewegung von Σ_2 resultirende Bewegung ist die relative Elementarbewegung von Σ_1 in Bezug auf Σ_2; ihr Momentancentrum ist das relative Momentancentrum und der Ort aller relativen Momentancentra bildet eine relative Curve (C) in Σ_2, welche in Bezug auf die relative Bewegung von Σ_1 in Σ_2 als ruhend anzusehen ist. Mit dem relativen Momentancentrum fällt ein gswisser Punkt Γ von Σ_1 zusammen und sämmtliche Punkte dieser Art bilden eine gewisse Curve (Γ), welche über die Curve (C) hinrollt, um die relative Bewegung von Σ_1 gegen Σ_2 wie eine absolute Bewegung zu bestimmen. Die beiden Curven (C) und (Γ) haben aber eine doppelte Bedeutung. Während nämlich für die relative Bewegung von Σ_1 in Σ_2 die Curve (C) ruht und (Γ) sich über sie hinbewegt, ruht für die relative Bewegung von Σ_2 in Σ_1 jene und bewegt sich diese über sie ihn, aber in entgegengesetztem Sinne. Sind nämlich C_1 und C_2 die Momentancentra der absoluten Bewegungen von Σ_1 und Σ_2 und ω_1, ω_2 die Winkelgeschwindigkeiten dieser Systeme um sie, so liefern ω_1 um C_1 und $-\omega_2$ um C_2 zusammen die Momentanaxe C' und die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 - \omega_2$ um sie für die relative Bewegung von Σ_1 und Σ_2 und ist $C_1C' : C'C_2 = -\omega_2 : \omega_1$. Ebenso liefern aber $-\omega_1$ um C_1 und ω_2 um C_2 die relative Momentanaxe C'' von Σ_2 gegen Σ_1 und die relative Winkelgeschwindigkeit $-\omega_1 + \omega_2$ um sie, so zwar, dass $C_1C'' : C''C_2 = \omega_2 : -\omega_1$. Es theilen also beide Centra C' und C'' die Strecke C_1C_2 in demselben Verhältniss und fallen daher zusammen und die Winkelgeschwindigkeit um C'' ist entgegengesetzt gleich der Winkelgeschwindigkeit um C'.

Diese Betrachtungen gelten ebenso für zwei körperliche Systeme Σ_1, Σ_2, welche in Parallelbewegung sich befinden; statt „Momentancentrum" ist nur „Momentanaxe" zu setzen und die Momentanaxen sind alle einander parallel.

Beispiel.

Zwei Systeme Σ_1, Σ_2 rotiren fortwährend um zwei parallele Axen, Σ_1 um C_1, Σ_2 um C_2; der Abstand dieser Axen sei a und es besitze zur Zeit t das System Σ_1 die Winkelgeschwindigkeit ω_1 um C_1, Σ_2 die Winkelgeschwindigkeit ω_2 um C_2. Man verlangt: 1. die Lage und die Winkelgeschwindigkeit für die relative Momentanaxe C' von Σ_1 in Bezug auf Σ_2, 2. dasselbe für die relative Bewegung von Σ_2 in Bezug auf Σ_1 und 3. die Beschaffenheit der relativen Flächen (C) und (Γ) für den Fall, dass das Verhältniss $\omega_1 : \omega_2$ der Winkelgeschwindigkeiten während der Dauer der Bewegung constant bleibt.

Um die relative Momentanaxe von Σ_1 gegen Σ_2 und ihre Winkelgeschwindigkeit zu finden, haben wir die Resultante zu ziehen von ω_1 um C_1 und von $-\omega_2$ um C_2; dieselbe ist $\omega_1 - \omega_2$, ihre Axe fällt in die Ebene C_1C_2, ist parallel mit C_1 und C_2 und stehen ihre Abstände von diesen Axen im Verhältnisse $\omega_2 : \omega_1$. Sind ω_1 und ω_2 gleichen Sinnes, so fällt die Momentanaxe in den an den Parallelstreifen C_1C_2 angrenzenden Aussenraum, welcher der Axe der grösseren Winkelgeschwindigkeit anliegt; sind sie entgegengesetzten Sinnes, so fällt sie in den Parallelstreifen selbst. Für letzteren Fall wird die relative Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 + \omega_2$. Soll das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten während der Bewegung fortwährend constant bleiben, so behält auch die Momentanaxe fortwährend constante Abstände a', a'' von C_1, C_2, für welche

$$\frac{a'}{\omega_2} = \frac{a''}{\omega_1}$$

ist und sind daher die Orte der relativen Momentanaxen und der Geraden des Systems Σ_1, welche nach und nach in diese eintreten, zwei Kreiscylinder um C_1, C_2 mit den Radien a', a'', welche sich längs der Momentanaxe berühren. Haben ω_1 und ω_2 gleichen Sinn, liegt mithin die relative Momentanaxe in dem Aussenraume von $C_1 C_2$, so wird, wenn ω_1 die grössere Winkelgeschwindigkeit bezeichnet:

$$a'' - a' = a$$

und folglich

$$a' = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} a, \quad a'' = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} a$$

und berühren sich die Cylinder auf derselben Seite ihrer gemeinschaftlichen Tangentenebene; haben aber ω_1 und ω_2 entgegengesetzten Sinn, so liegt die Momentanaxe im Parallelstreifen und wird also:

$$a'' + a' = a,$$

$$a' = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} a, \quad a'' = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} a;$$

die Cylinder berühren sich auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Tangentenebene.

Für die relative Bewegung von Σ_2 in Bezug auf Σ_1 erhält man dieselben Axen und Cylinder, sie vertauschen nur ihre Rollen und die relative Winkelgeschwindigkeit wird $\omega_2 - \omega_1$.

Einige Literatur über die Bewegung ebener Systeme.

Nicomedes (150 v. Chr.) fand die Conchoide und die Conchoidenbewegung. Cartesius bemerkte zuerst das Momentancentrum bei der Erzeugung der Cycloide (Lettres de Descartes, T. II, p. 39, Ausg. v. 1724). Joh. Bernoulli gebührt die Entdeckung des Momentancentrums für die allgemeine Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene (De centro spontaneo rotationis. Opera Joh. Bernoulli, T. IV, p. 265; 1742). Hieran reihen sich, wenn auch vorzugsweise der räumlichen Bewegung gewidmet: d'Alembert, Traité de la précession des équinoxes (1749), in welchem Werke zuerst eine „axe instantané de rotation" vorkommt; Euler, Découverte d'un nouveau principe de Mécanique (Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1750); Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable (Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1758); Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum (1765); Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum (Novi Commentarii Acad. Petropolit. a. 1795, t. XX).

Von besonderer Wichtigkeit sind folgende Arbeiten von Chasles:

1. Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr' eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre; communiqué à la soc. philom. 5. Febr. 1831 (Bulletin des sciences math. p. Férussac, Nov. 1830).

2. Propriétés géometriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace. (Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris, T. XVI, p. 1420—1432, année 1843.)

3. Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable. (Comptes rendus de l'Acad. de Paris, T. LI: 5. Déc. 1860, 10. Déc. 1860; T. LII: 21. Jan. 1861, 4. Févr. 1861, 18. Mars 1861.)

4. Théorèmes généraux sur le déplacement d'une figure plane dans son plan. (Comptes rend. T. LXXX, p. 346. 6. Févr. 1875.)

5. Théorèmes relatifs au déplacement d'une figure plane dont deux points glissent sur deux courbes d'ordre et de classe quelconque. (Comptes rend. LXXXII, p. 431; 21. Févr. 1876.)

Die beiden letztgenannten Abhandlungen geben eine grosse Menge von Sätzen über Ordnung und Classe der bei der ebenen Bewegung erzeugten Curven, insbesondere bestimmen sie die Ordnung der Curven (C), (Γ). Chasles bedient sich zur Entwickelung seiner Sätze des von ihm entdeckten „Princips der Correspondenz".

An die Chasles'sche Arbeit Nr. 2 reiht sich unmittelbar an:

Jonquières, Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps, in seinem Werke: Mélanges de Géométrie pure. Paris 1856, p. 1—51 (enthält eine Entwickelung der Beweise zu der genannten Chasles'schen Abhandlung.)

Brisse, Sur le déplacement fini quelconque d'une figure de forme invariable (Journal de math. pures et appliquées p. Liouville, 2me Série, T. 19. 1874). Beweise der in der Chasles'schen Abhandlung Nr. 3 aufgestellten Sätze.

Möbius, Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. (Crelle, Journ. der reinen und angew. Mathem. B. XVIII, S. 189—212. (1836.)

Chelini, Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. (Memorie dell' Accad. di Bologna 1862), sowie dessen Elementi di Meccanica razionale, Bologna 1860.

Stegmann, Geometrische Untersuchungen über Drehung. Marburg 1853.

Resal, Traité de cinématique pure, Paris 1862 und Traité de mécanique générale. Paris 1873.

Aronhold, kinematische Mittheilungen. Grundzüge der kinematischen Geometrie. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. Berlin 1872.

Ueber das Problem der Rouletten und seine Umkehrungen:

Steiner, Zum Krümmungsschwerpunkte ebener Curven. (Crelle's Journ. B. 21, p. 33 u. 101.)

Besant, Nouv. Ann. de mathém. 2e Série. T. XI, p. 258, T. X, pp. 284, 324, 432, 474, 553. Diese Untersuchungen sind auch besonders erschienen unter dem Titel: Notes on Roulettes and Glissettes. Cambridge 1870.

Gigon, Roulettes extérieures et intérieures. Nouv. Ann. 2me Ser. T. VII, p. 462.

Zahlreiche Aufgaben über die ebene Bewegung von verschiedenen Autoren in den Nouv. Annales de Mathém.

Aoust, Analyse infinitésimale des courbes planes. Paris 1873.

VI. Capitel.

Die sphärische Bewegung eines unveränderlichen Systems und ihre Geschwindigkeiten.

§. 1. Die Lehren über die Aequivalenz der Rotationen und Winkelgeschwindigkeiten um Axen, welche sich in einem Punkte schneiden, reichen hin, um die Eigenschaften der Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems, welches um einen Punkt rotirt, zu studiren, soweit sie die Bahnen der Punkte und die Geschwindigkeiten betreffen. Bei dieser Bewegung beschreiben die

Punkte des Systems sphärische Bahnen, welche concentrischen Kugelflächen angehören, deren gemeinsamer Mittelpunkt jener Punkt ist. Ein sphärischer Schnitt des Systems, um diesen Mittelpunkt geführt, bewegt sich in seiner eigenen Kugelfläche und die Bahnen aller auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden des Systems sind ähnliche Curven. Es genügt daher, die Bewegung eines einzigen solchen sphärischen Schnittes zu untersuchen, um die Bewegung aller Systempunkte kennen zu lernen und kommt das Problem der Rotation eines unveränderlichen Systems um einen Punkt auf das einfachere der Bewegung eines sphärischen Systems auf der Kugelfläche zurück. Eine solche Bewegung nennen wir eine sphärische Bewegung. Sie könnte auch wohl conische Bewegung oder Bewegung im Stralenbündel heissen.

§. 2. Für die Bewegung des sphärischen Systems auf der Kugelfläche seien Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... eine Reihe von Lagen, welche dasselbe durchläuft; die Bewegung aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 ist aequivalent einer Rotation um einen bestimmten Punkt C_1 der Kugelfläche, auf welcher die Bewegung erfolgt (oder um seinen Gegenpunkt, oder um beide), die Bewegung aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 aequivalent einer Rotation um ein zweites Centrum C_2 u. s. f. Wählt man die Lagen Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... immer dichter und dichter, so häufen sich die Rotationscentra C_1, C_2 ... gleichfalls und werden die Amplituden für die Rotation aus einer Lage des Systems in die nächstfolgende immer kleiner. In der Grenze geht die Folge der Rotationen in die wirklich stattfindende Bewegung und die Folge der Centra C in eine continuirliche Curve (C) auf der festen Kugelfläche über.

Während der Rotation um C_1 fällt ein gewisser Systempunkt Γ_1 mit C_1 zusammen, während der Rotation um C_2 ein anderer Systempunkt Γ_2 mit diesem u. s. f. Bei dem Grenzenübergange erhält man daher noch eine zweite, dem beweglichen System angehörende Curve (Γ), deren Punkte während der Bewegung des Systems nach und nach mit den Punkten der Curve (C) zusammentreffen. In dem Momente, in welchem die verschwindend kleine Rotation um C_2 beginnt, ist Γ_2 in C_2 eingetreten und verlässt Γ_1 den Punkt C_1; daher haben beide Curven die Bogenelemente $C_1 C_2$ und $\Gamma_1 \Gamma_2$ gemein, d. h. sie berühren sich in C_1. Fügt man diesen Betrachtungen über die Bewegung des sphärischen Systems die entsprechende über die Bewegung des körperlichen Systems um den Kugelmittelpunkt hinzu, so gelangt man dazu, die folgenden Sätze, welche den Sätzen in Cap. IV, §. 2. analog sind, aufzustellen.

Jede Bewegung eines unveränderlichen sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ist aequivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um die Erzeugungslinien einer bestimmten Kegelfläche, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist und welche durch eine bestimmte auf der Kugelfläche liegende Curve (C) hindurchgeht, oder auch:

Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems um einen Punkt ist aequivalent einer continuirlichen Folge von Rotationen um Axen, welche durch diesen Punkt gehen und die Erzeugungslinien einer bestimmten von der speciellen Natur der Bewegung abhängigen Kegelfläche des absoluten Raumes sind.

Jede Bewegung eines unveränderlichen sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ist aequivalent dem Rollen einer bestimmten Curve (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten Curve (C) der festen Kugelfläche.

Jede Bewegung eines unveränderlichen räumlichen Systems um einen Punkt ist aequivalent dem Rollen einer bestimmten, dem beweglichen System angehörenden Kegelfläche (Γ) auf einer bestimmten Kegelfläche (C) des absoluten Raumes, welche mit jener den Punkt, um welchen das System sich bewegt, zum gemeinschaftlichen Mittelpunkte hat.

§. 3. Jeder Lage des beweglichen Systems entspricht eine bestimmte Gerade C des Kegels (C), um welche dasselbe eine unendlich kleine Rotation ausführt, um in die folgende, jener unendlich nahe Lage zu gelangen. Diese Gerade heisst die jener Lage entsprechende Momentanaxe des Systems und die unendlich kleine Rotation um sie die Elementarbewegung des Systems. Die Momentanaxe ist eine Doppellinie der beiden aufeinanderfolgenden unendlich nahen Lagen des Systems und sämmtliche Momentanaxen laufen durch den allen Lagen gemeinsamen Doppelpunkt, nämlich den Punkt, um welchen das System sich überhaupt bewegt. Vermöge der Elementarbewegung beschreibt jeder Systempunkt ein Element seiner Bahn als einen unendlich kleinen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des von ihm auf die Momentanaxe gefällten Perpendikels ist. Dieser Kreisbogen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Richtung seiner Tangente ist senkrecht zu der Ebene, welche durch dies Perpendikel und die Momentanaxe gelegt werden kann, d. h. die Ebene, durch den beschreibenden Punkt und die Momentanaxe gelegt, ist die Normalebene der Bahn des Punktes. Daher schneiden sich die Normalebenen der Bahnen sämmtlicher Systempunkte in den Punkten, welche ein und derselben Lage des Systems angehören, in der dieser Lage entsprechenden Momentanaxe. Um also die Normalebene und die Tangente an die Bahn eines Systempunktes zu construiren, bedarf es nur der Aufsuchung der entsprechenden Momentanaxe.

Für die Bewegung des sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche ändert sich blos die Nomenclatur ein wenig. Die Momentanaxe wird vertreten durch zwei Punkte, von denen jeder als Momentancentrum angesehen werden kann. Vermöge der Elementarbewegung beschreibt der Systempunkt das Element eines Kreisbogens, der um das Momentancentrum mit dem sphärischen Abstande des Systempunktes von diesem beschrieben werden kann. Die sphärischen Normalen der Bahnen aller Punkte laufen durch das zugehörige Momentancentrum. Die Normalebenen der Bahnen aller Punkte schneiden sich in einer Geraden, der Momentanaxe.

Ist $d\vartheta$ die unendlich kleine Amplitude der Elementarbewegung, so ist die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ und die Geschwindigkeit v der Punkte im Abstande r von dieser Axe $v = \omega r$. Die Punkte der Axe selbst haben die Geschwindigkeit Null; sie kann daher auch die Axe der Geschwindigkeiten heissen.

Die Punkte eines sphärischen Hauptkreises (eines grössten Kreises der Kugelfläche, einer sphärischen Geraden) beschreiben vermöge der Elementarbewegung um die Momentanaxe C mit der Amplitude $d\vartheta$ Bogenelemente verschiedener Richtungen. Nur dann, wenn der Hauptkreis durch das Momentancentrum geht, ist die Neigung aller gleich $\frac{1}{2}\pi$. Unter den Punkten des Hauptkreises sind nur zwei, deren Bahnelement in den Hauptkreis fällt, nämlich die Fusspunkte P der vom Momentancentrum auf ihn gefällten sphärischen Normalen. Nach dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten ist die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe C aequivalent einer Winkelgeschwindigkeit ω_1 um den durch P gehenden Durchmesser der Kugel und einer Winkelgeschwindigkeit ω_2 um den zur Ebene des Hauptkreises senkrechten Durchmesser oder was dasselbe ist, die Winkelgeschwindigkeit ω ist aequivalent ω_1 um einen Fusspunkt P der Normalen und ω_2 um den Pol Q des Hauptkreises. Vermöge ω_2 gleitet der Hauptkreis in sich, vermöge ω_1 rotirt er um P. Nur die Hauptkreise, welche durch C gehen, gleiten nicht. Die Punkte P, für welche blos Gleiten stattfindet, heissen Gleitungspunkte des Hauptkreises.

Der Hauptkreis umhüllt während der Bewegung eine sphärische Curve, die Fusspunkte der sphärischen Normalen sind die Berührungspunkte mit der Enveloppe. Aehnliches gilt von der Enveloppe irgend einer sphärischen Curve; die Fusspunkte der vom betreffenden Momentancentrum auf sie gefällten Normalen sind die Berührungspunkte mit der Enveloppe und Gleitungspunkte. Für jede Lage des beweglichen sphärischen Systems auf der Kugelfläche schneiden sich daher die Normalebenen aller Enveloppen in einer Geraden, der Momentanaxe und also die sphärischen Normalen im Momentancentrum. Jede Ebene des Rotationspunktes umhüllt eine Kegelfläche; die Normalebenen dieser Kegelflächen gehen alle durch die Momentanaxe.

Ist r der sphärische Abstand CM eines Punktes M eines sphärischen

Hauptkreises vom Momentancentrum C, so beschreibt dieser Punkt ein Bogenelement $\sin r \,.\, d\vartheta$ und wenn CM mit dem Hauptkreise den Winkel ψ bildet, so ist $\sin r \sin \psi d\vartheta$ die Projection dieses Bogenelementes auf den Hauptkreis. Nun ist aber $\sin r \sin \psi = \sin p$ der Sinus der sphärischen Normale p, welche vom Centrum C auf ihn gefällt wird, daher ist die Projection des Bogenelementes $\sin p \,.\, d\vartheta$ unabhängig von ψ, d. h. unabhängig von der Lage des Punktes M auf dem Hauptkreise. Die Projectionen der Bogenelemente, welche die Punkte eines Hauptkreises vermöge der Elementarbewegung beschreiben, auf die Richtung des Hauptkreises sind daher alle einander gleich, nämlich gleich dem Bogenelemente, welches der Fusspunkt der sphärischen Normalen beschreibt. Indem man mit dem Zeitelemente dt dividirt, wird $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Momentanaxe und $\sin p \,.\, \omega$ die Componente der Geschwindigkeit eines Punktes des Hauptkreises auf die Richtung seiner Tangente. Diese Componente ist daher für alle Punkte des Hauptkreises von derselben Grösse.

In Bezug auf die sphärischen Curven (C), (Γ) und die Kegelflächen (C), (Γ), welche durch ihr Rollen auf einander die Bewegung definiren, gilt derselbe Dualismus, wie er für die ebene Bewegung und die Parallelbewegung Cap. IV, §. 5. nachgewiesen wurde. Die Umkehrung der Bewegung erhält man, indem man die bewegliche Curve oder Fläche (Γ) festlegt und die Curve oder Fläche (C), welche ursprünglich unbeweglich war, auf ihr in umgekehrtem Sinne rollen lässt.

§. 4. Nach Cap. I, §. 13. a. E. ist ein unveränderliches System aus einer ersten Lage in eine zweite übergegangen, wenn drei nicht in gerader Linie liegende Punkte desselben in ihre neuen Lagen gelangt sind. Daher ist die Bewegung eines unveränderlichen Systems überhaupt bestimmt, wenn die Bewegung von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten bestimmt ist. In dem vorliegendem Falle der Rotation um einen Punkt kann man den ruhenden Punkt als den einen von diesen ansehen und bedarf es nur noch der Kenntniss der Bewegung von zwei mit diesem nicht in gerader Linie liegenden Punkten, um die Bewegung aller Systempunkte ermitteln zu können. Da die Systempunkte nur sphärische Curven beschreiben können, so ist die Bewegung des Systems bestimmt, sobald zwei Curven auf zwei mit dem festen Rotationsmittelpunkte concentrischen Kegelflächen (die auch in eine Kugelfläche zusammenfallen können) als Bahnen zweier Punkte gegeben sind. Statt dessen können auch die beiden Kugelflächen, welche diese Curven enthalten und im Rotationsmittelpunkte concentrisch sind, als Orte für zwei Gerade des Systems angenommen werden.

Die Bedingungen, welche eine sphärische Bewegung definiren, können auf mannigfache andere Arten gegeben sein. In dieser Hinsicht ist es interressant und lehrreich, die Betrachtungen, welche wir in Cap. IV. für die Bewegung eines unveränderlichen Systems parallel einer Ebene oder für die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene durchgeführt haben, zu übertragen auf die hier vorliegende Bewegung eines Systems um einen festen Punkt oder die Bewegung eines sphärischen Systems auf seiner Kugelfläche. Das Allgemeine dieser Uebertragung ist sehr leicht, die Lösung specieller Aufgaben complicirt sich aber in dem Maasse, als die Sphärik weniger einfach, als die ebene Geometrie ist.

Sind die sphärischen Curven (C), (Γ) oder die Kegelflächen (C), (Γ) selbst gegeben, so kommt das Problem der Bewegung unseres Systems auf das Problem der sphärischen Rouletten zurück. Ist z. B. (Γ) ein gerader Kreiskegel, (C) eine Ebene, so sind die Bahnen der Systempunkte sphärische Cycloiden. Eine sehr allgemeine, viele Einzelprobleme enthaltende Aufgabe ist die: „Die Bewegung des Systems zu bestimmen, wenn eine Kegelfläche desselben zwei andere feste Kegelflächen, welche mit ihr den Punkt, um den das System sich bewegt, zum gemeinsamen Mittelpunkt haben, fortwährend berührt.“ Die Aufgabe, bei welcher an die Stelle der hier genannten Kegelflächen andere, beliebige Flächen treten, welche von einer gleichfalls beliebig gewählten Fläche des Systems fortwährend berüht werden sollen, ist nicht allgemeiner, als die vorstehende, weil die Tangentenkegel, welche von dem Rotationsmittelpunkte an die Flächen, die festen, wie die beweglichen, gelegt werden können, jene Flächen selbst vertreten können.

§. 5. Beispiele.

1. Ein unveränderliches System rotirt um einen Punkt O (Fig. 113), und zwar so, dass zwei seiner Geraden, OA, OB, welche durch O gehen, fortwährend auf zwei festen, unter dem Winkel ϑ gegeneinander geneigten Ebenen OO_1X und OO_1Y bleiben; die Geraden bilden mit einander einen rechten Winkel und ist die Winkelgeschwindigkeit ω_1 bekannt, mit welcher die Gerade OA sich in der Ebene OO_1X um O zur Zeit t dreht, man soll die Momentanaxe, die Winkelgeschwindigkeit ω der Elementarbewegung um sie und die Winkelgeschwindigkeit ω_2 bestimmen, mit welcher die Gerade OB in der Ebene OO_1Y sich um O dreht.

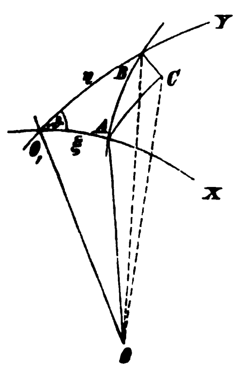

Fig. 113.

Die Lage der Momentanaxe OC ergibt sich als die Schnittlinie zweier Ebenen, welche durch OA und OB senkrecht zu den Ebenen OO_1X und OO_1Y geführt werden. Stellt die Figur einen Kugelschnitt des Systems um O vom Radius gleich der Einheit dar und bezeichnet man die Bogen O_1A und O_1B mit

ξ und η, so besteht, weil $AB = \frac{1}{2}\pi$, zwischen ξ und η die Relation

$$\cos \xi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta \cos \vartheta = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \eta \cos \vartheta = -1 .$$

Während des Zeitelementes dt beschreiben die Punkte A und B die Bogenelemente $d\xi$ und $d\eta$ und sind mithin

$$\omega_1 = \frac{d\xi}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\eta}{dt}.$$

Differentiirt man daher die vorige Gleichung, wodurch man erhält:

$$\sin 2\xi \frac{d\eta}{dt} + \sin 2\eta \frac{d\xi}{dt} = 0,$$

so wird das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_2 : \omega_1$,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\sin 2\eta}{\sin 2\xi},$$

welches man mit Hülfe der Gleichung

$$\operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \eta \cos \vartheta = -1$$

als Function von ξ darstellen kann. Man erhält nämlich

$$\sin 2\eta = -\frac{\cos \vartheta \sin 2\xi}{\cos^2 \xi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \xi}$$

und hiermit

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{\cos \vartheta}{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi},$$

wodurch ω_2 gefunden wird, wenn ω_1 bekannt ist; ω_1, ω_2 sind die Geschwindigkeiten, mit welchen A, B sich in ihren Bahnen, den Hauptkreisen $O_1 X$ und $O_1 Y$ bewegen; ihr Verhältniss $\omega_2 : \omega_1$ erreicht sein Maximum für $\xi = \frac{1}{2}\pi$ und sein Minimum für $\xi = 0$.

Indem man die Geschwindigkeiten ω_1, ω_2 der Punkte A, B als durch die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe OC erzeugt ansieht, hat man

$$\omega_1 = \omega \sin (AC), \quad \omega_2 = \omega \sin (BC)$$

und hiemit wird das Sinusverhältniss der Winkelabstände der Momentanaxe C von den Geraden OA, OB:

$$\frac{\sin (AC)}{\sin (BC)} = \frac{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi}{\cos \vartheta}.$$

Bedeuten A, B Winkel des Dreiecks $O_1 AB$, so hat man

$$\sin (AC) = \cos B : \sin C, \quad \cos C = -\sin A \sin B, \quad \sin A = \sin \vartheta \sin \eta,$$
$$\sin B = \sin \vartheta \sin \xi,$$

und man erhält:

$$\sin (AC) = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi}{1 - \sin^4 \vartheta \sin^2 \xi \sin^2 \eta}} = \frac{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi - \sin^4 \vartheta \sin^2 \xi \cos^2 \xi}},$$

wenn man nämlich η mit Hülfe der Gleichung $\operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \eta \cos \vartheta = -1$ eliminirt.

Für die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe ergibt sich hieraus schliesslich

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sin (AC)} = \omega_1 \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi - \sin^4 \vartheta \sin^2 \xi \cos^2 \xi}}{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \xi}.$$

Die Ebene des beweglichen Quadranten umhüllt einen Kegel zweiten Grades, welcher die beiden festen Ebenen längs zwei Stralen berührt, welche mit der Schnittlinie der festen Ebenen Winkel $\frac{1}{2}\pi$ bilden und welche also die Lagen der Stralen OA, OB sind für die Fälle, wo die Ebene des Quadranten mit den festen Ebenen zusammenfällt*).

Die vorliegende Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Behandlung des unter dem Namen des **Universalgelenkes** bekannten Mechanismus, einer sinnreichen Erfindung von **Cardano****). Eine Combination zweier Universalgelenke liefert die in der Nautik verwandte Cardanische Aufhängung.

2. Die vorige Aufgabe kann als ein specieller Fall der Umkehrung der folgenden aufgefasst werden:

Ein sphärisches System bewegt sich auf der Kugelfläche so, dass ein Hauptkreis desselben fortwährend durch einen festen Punkt geht und ein Punkt dieses Hauptkreises einen Kugelkreis beschreibt, man soll das Momentancentrum (C, Γ), die Orte (C) und (Γ), u. s. w. finden.

Die Umkehrung derselben ist: **Ein sphärisches System bewegt sich auf der Kugelfläche so, dass ein Hauptbogen von constanter Länge mit seinen Endpunkten auf einem Hauptkreise und einem Kugelkreise fortrückt, dessen Mittelpunkt auf jenem Hauptkreise liegt.**

Die Kegel (C), (Γ) sind Kegel vierten und achten Grades. Für den Radius des Kugelkreises gleich $\frac{1}{2}\pi$ degenerirt der Kegel vierten Grades in zwei coincidirende Kegel zweiten Grades.

Vgl. **Buka**, Ueber das sphärische Kurbelgetriebe und seinen Specialfall, das Hooke'sche Gelenk. Inauguraldissert. Göttingen 1876.

3. Ein weiteres Beispiel entlehnen wir der Bewegung der Erde, die **Präcession der Nachtgleichen**. Wenn der bewegliche Kegel (Γ), welcher auf dem festen Kegel (C) rollt, sich auf eine Gerade reducirt, d. h. wenn die Momentanaxe Γ im beweglichen System eine unveränderliche Gerade ist, so ist das Rollen nicht mehr möglich. Denn dasselbe besteht in dem fortlaufenden Abwickeln der Elemente der einen Fläche auf der andern; eine Gerade hat aber, als Kegelfläche angesehen, keine Flächenelemente. Ist daher die Momentanaxe im System fortwährend ein und dieselbe Gerade Γ, so ist auch ihre Lage C im absoluten Raume immer dieselbe und das System rotirt stets um dieselbe feste Axe. Umgekehrt reducirt sich der feste Kegel (C) auf eine Gerade, so kann die Momentanaxe Γ im System nicht wechseln. Beobachtet man daher, dass ein System sich fortwährend um ein und dieselbe Gerade des Systems dreht, während ihre Lage im absoluten Raume wechselt, so kann diese Gerade nicht die Momentanaxe sein und muss die Beobachtung inexact sein.

Zerlegen wir die Bewegung der Erde in die Translationsbewegung, vermöge welcher ihr Mittelpunkt die Ekliptik beschreibt und die Rotation um ihren Mittelpunkt und betrachten wir die letztere Bewegungscomponente für sich. Für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Astronomie genügt es, diese Rotation als um die Erdaxe, die Verbindungslinie der Pole, erfolgend anzusehen, welche unter einem

---

*) Vgl. **Steiner**, systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, S. 219. — **Okatow**, über die Kegel augenblicklicher Drehaxen am Universalgelenke (Bullet. de l'Acad. de St. Pétersbourg, 1866).

) Vgl. **Redtenbacher, Maschinenbau, Bd. I, S. 357 u. Taf. XXI, Fig. 12; **Grashof**, Theoretische Maschinenlehre, Bd. II, S. 157—159.

Winkel von 23° 27′ 22″ gegen die Axe der Ekliptik geneigt ist. Diese Axe würde nach dem oben Bemerkten die Momentanaxe sein, wenn sie im absoluten Raume eine feste Richtung beibehielte. Genauere Beobachtungen haben aber sehr bald gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, sondern dass sie eine Kegelfläche um die Axe der Ekliptik beschreibt und zwar mit rückläufiger Bewegung, d. h. während die Erde von Westen nach Osten rotirt, erfolgt jenes Fortschreiten der Erdaxe um die Axe der Ekliptik im umgekehrten Sinne. Auf der Axe der Ekliptik steht die Ekliptik selbst, auf der Erdaxe die Ebene des Aequators senkrecht. Die Schnittlinie beider ist die Aequinoctiallinie, welche senkrecht ist zur Ebene, welche durch die beiden Axen, die Erdaxe und die Axe der Ekliptik hindurchgelegt werden kann. Mit dem Fortrücken der Erdaxe dreht sich diese Ebene um die Axe der Ekliptik in rückläufiger Bewegung um und schreitet daher die Aequinoctiallinie in der Ebene der Ekliptik in demselben Sinne fort. Das Fortrücken dieser Linie wird die Präcession der Nachtgleichen genannt; es erfolgt sehr langsam, beträgt 50″ im Jahr (für einen Sterntag 0″.136795) und würde ein vollständiger Umlauf derselben 25868 Jahre erfordern (grosses Platonisches Jahr). Diese Beobachtung in Verbindung mit den obigen Bemerkungen über die Momentanaxe eines rotirenden Systems zeigt deutlich, dass die Erdaxe nicht die Momentanaxe der Erdrotation sein kann, dass diese Momentanaxe vielmehr im System der Erde wechseln muss, dass aber der Kegel (Γ) der Momentanaxe sehr eng sein werde, damit das Rollen desselben im Kegel (C) des absoluten Raumes, für welchen die Axe der Ekliptik eine besonders wichtige Bedeutung haben wird, so langsam erfolge, wie es die Beobachtungen zeigen. Zugleich zeigt die Rückläufigkeit des Phänomens, dass der schmale Kegel (Γ) im Innern des weit geöffneten Kegels (C) um die Axe der Ekliptik rollt. Ist daher ON (Fig. 114) die Axe der Ekliptik, On die Erdaxe und $OC(O\Gamma)$ die wirkliche Momentanaxe oder die Berührungslinie beider Kegel, so werden diese drei Geraden in eine Ebene fallen, zu welcher die Aequinoctiallinie WW senkrecht ist. Aus der bekannten Winkelgeschwindigkeit ω der Erde um ihre Axe On und der Winkelgeschwindigkeit ω' der Ebene ONn um die Axe der Ekliptik kann daher die Winkelgeschwindigkeit Ω um die Momentanaxe $O\Gamma$ mit Hülfe der Proportionen

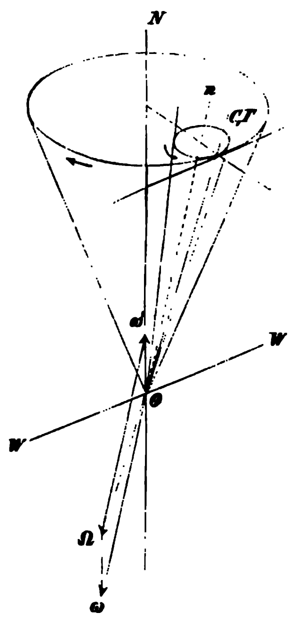

Fig. 114.

$$\frac{\omega}{\sin(\Gamma N)} = \frac{\omega'}{\sin(\Gamma n)} = \frac{\Omega}{\sin(Nn)}$$

und des Parallelogramms leicht gefunden werden, welches man vollenden kann, indem man von O aus auf der Axe ON der Ekliptik die Winkelgeschwindigkeit ω' nach dem Nordpol der Ekliptik hin, die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde aber, weil im umgekehrten Sinn erfolgend, nach dem Südpol der Erde gerichtet auf der Erdaxe aufträgt, und die Diagonale zieht. Letztere stellt alsdann die Winkelgeschwindigkeit Ω um die wahre Momentanaxe OC dar. Ihr Sinn erklärt die Rückläufigkeit der Axe On, indem er zeigt, dass der schmale bewegliche Kegel (Γ) im Innern des festen Kegels (C) rollt.

Nimmt man den Sterntag, die Umdrehungszeit der Erde, als Zeiteinheit, so ist

$$\omega = 2\pi, \quad \omega' = \frac{0.136795}{180.60.60}\pi.$$

Aus den vorigen Proportionen folgt aber

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin(\Gamma N)}{\sin(\Gamma n)} = \frac{\sin(\Gamma n + N n)}{\sin(\Gamma n)} = \sin(N n)\operatorname{cotg}(\Gamma n) + \cos(N n),$$

wodurch man

$$\operatorname{tg}(\Gamma n) = \frac{\omega' \sin(N n)}{\omega - \omega' \cos(N n)}$$

erhält, wo $(N n) = 23^{\circ}\,27'\,32''$ ist. Dies liefert

$$(\Gamma n) = 0''.0087,$$

sodass also für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Astronomen die Momentanaxe Γ als mit der Erdaxe On zusammenfallend angesehen werden darf. Weiter folgt aus den Proportionen

$$\Omega = \frac{\sin(N n)}{\sin(\Gamma N)}\,\omega.$$

Der Kegel (C) um die Axe der Ekliptik ist übrigens kein Kreiskegel, vielmehr findet eine geringe periodische Schwankung der Erdaxe gegen die Axe der Ekliptik statt, die sogenannte Nutation der Erdaxe, die aber nur 9 Sekunden Abweichung von der mittleren Lage beträgt und in der langen Periode von 18¼ Jahr erfolgt.

In dem IV. Theile dieses Werkes werden wir auf die Probleme der Präcession und Nutation genauer eingehen.

§. 6. Neben der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe ist noch eine andere Geschwindigkeit von Bedeutung, nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Momentanaxe wechselt. Die Momentanaxen bilden im Raume der Bewegung die feste Kegelfläche (C), auf welcher die Kegelfläche (Γ) des Systems hinrollt, deren Erzeugungslinien die Geraden des Systems sind, welche der Reihe nach Momentanaxe werden. Beide Kegelflächen haben den Rotationsmittelpunkt O zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt und berühren sich zur Zeit t längs der Momentanaxe (C, Γ), d. h. sie haben die Flächenelemente CC', $\Gamma\Gamma'$ gemein. Bezeichnet $d\sigma$ den unendlich kleinen Kreisbogen auf einer Kugel vom Radius gleich der Einheit, um O beschrieben, welcher den Winkel $(CC') = (\Gamma\Gamma')$ misst, so ist die Wechselgeschwindigkeit ψ der Momentanaxe

$$\psi = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Sie ist eine Winkelgeschwindigkeit um die in O errichtete gemeinsame Normale der beiden Kegel und ist mit der Winkelgeschwindigkeit ω durch eine Gleichung verbunden, ähnlich der in Cap. IV, §. 15. entwickelten. Legen wir nämlich in der Einheit des Abstandes von O senkrecht zu der Erzeugungslinie (C, Γ), längs welcher die Kegel sich berühren, eine Schnittebene und bezeichnen die Contingenzwinkel der beiden Schnittcurven, wie dort mit $d\varepsilon$ und $d\varepsilon'$ und ihre Krümmungshalbmesser mit ϱ und ϱ', so stellt unter denselben Bedingungen, wie dort $d\Theta = d\varepsilon + d\varepsilon'$ die Amplitude der Elementarbewegung um die Momentanaxe dar und erhält man

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{\omega}{\psi} = \frac{d\varepsilon + d\varepsilon'}{d\sigma} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$$

wobei die Vorzeichen von ϱ, ϱ' zu berücksichtigen sind, je nachdem die beiden Kegel auf entgegengesetzte Seiten oder auf dieselbe Seite ihrer gemeinschaftlichen Tangentenebene fallen. Die Summe der Krümmungen entspricht dem ersten Falle. Vermöge dieser Relation kann eine der Grössen ω, ψ, ϱ, ϱ' gefunden werden, wenn die drei andern bekannt sind und bleibt dieselbe constant, wenn jene constant bleiben. Sind die Kegel so beschaffen, dass die relative Krümmung $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$ durchweg constant bleibt, so werden ω und ψ einander proportional und sind zusammen constant oder variabel.

Die Ebene der beiden Schnittcurven, deren Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' sind, ist die Tangentenebene der mit der Einheit als Radius um O beschriebenen Kugel. Construiren wir die Krümmungskreise der beiden Schnittcurven (Fig. 115) und seien c, γ ihre Mittelpunkte. Zwei Kegel von O aus durch die Schnittcurven gelegt, sind Schmiegungskegel der Kegelflächen (C), (Γ), indem sie mit ihnen zwei aufeinander folgende Flächenelemente gemein haben und können diesen Flächen während der Elementarbewegung um die Momentanaxe substituirt werden.

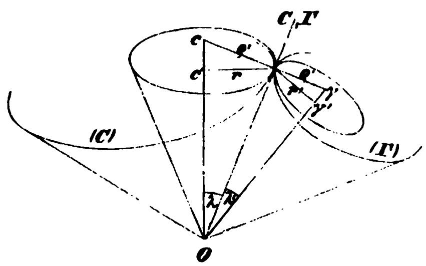

Fig. 115.

Senkrecht zu den Geraden Oc, $O\gamma$ legen wir durch das Bogenelement $d\sigma$ zwei Ebenen. Sie schneiden, da sie zu den Ebenen der Krümmungskreise antiparallel in Bezug auf die Schmiegungskegel liegen, diese gleichfalls in zwei Kreisen mit den Radien r, r' und den Mittelpunkten c', γ' auf Oc, $O\gamma$. Diese Kreise gehören zugleich der um O mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche an. Bezeichnen wir die Winkel, welche die Geraden Oc, $O\gamma$ mit OC bilden, mit λ, λ', so wird $r = \sin\lambda$, $r' = \sin\lambda'$. Nun kann das Bogenelement $d\sigma$ aufgefasst werden als um die Axe Oc mit dem Abstande r beschrieben und wenn $d\eta$ die Elementaramplitude hiezu ist, so wird $r d\eta = d\sigma$. Ebenso kann $d\sigma$ aber auch durch Rotation um die Axe $O\gamma$ um eine Elementaramplitude $d\eta'$ beschrieben werden, so dass auch $r' d\eta' = d\sigma$ ist. Die Winkelgeschwindigkeiten, welche diesen beiden Rotationen entsprechen, sind

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\psi}{r}, \quad \frac{d\eta'}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{1}{r'} = \frac{\psi}{r'}.$$

Wir wollen diese Winkelgeschwindigkeiten auf den Axen Oc, $O\gamma$ nach Grösse und Sinn aufgetragen denken. Zugleich führen wir sie an die Stelle von ψ in die Gleichung für $\omega : \psi$ ein und erhalten

$$\omega = \frac{\psi}{\varrho} + \frac{\psi}{\varrho'} = \frac{d\eta}{dt} \cdot \frac{r}{\varrho} + \frac{d\eta'}{dt} \cdot \frac{r'}{\varrho'}.$$

Nun ist aber

$$\cos\lambda = \frac{r}{\varrho}, \quad \cos\lambda' = \frac{r'}{\varrho'},$$

und hiemit geht diese Gleichung über in

$$\omega = \frac{d\eta}{dt}\cos\lambda + \frac{d\eta'}{dt}\cos\lambda'.$$

Hieraus erhellt, dass ω die Diagonale des über $\frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\eta'}{dt}$ beschriebenen Parallelogramms, dass also ω die Resultante von $\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\eta'}{dt}$ ist. Weiter hat man wegen $r = \sin\lambda$, $r' = \sin\lambda'$

$$\psi = \frac{d\eta}{dt}\sin\lambda = \frac{d\eta'}{dt}\sin\lambda'.$$

Indem man diese Gleichungen mit der vorigen verbindet, erhält man

$$\frac{\omega}{\psi} = \operatorname{cotg}\lambda + \operatorname{cotg}\lambda'.$$

Wir folgern aus diesen Betrachtungen:

1. Die Summe der Componenten der Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\eta'}{dt}$, mit welchen während der Elementarbewegung zur Zeit t die Schmiegungskegel der Flächen (C), (Γ) sich um ihre Axen relativ gegen einander drehen, um die Momentanaxe ist gleich der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe und 2. die Componenten von $\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\eta'}{dt}$ senkrecht zur Momentanaxe sind von gleicher Grösse und entgegengesetztem Sinne und stellen die Wechselgeschwindigkeit ψ der Momentanaxe dar, die eine für die Bewegung von (Γ) über (C), die andere für die Umkehrung der Bewegung.

In dem Beispiele 3. des vorigen Paragraphen sind $\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\eta'}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeiten um die Axe der Ekliptik und die Erdaxe und ist $\psi = \frac{d\eta}{dt}\sin\lambda$ die Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe, d. h. die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sie in dem festen Kegel fortrückt.

§. 7. Wir gehen jetzt über zu der analytischen Darstellung der Geschwindigkeiten in dem unveränderlichen System, welches um einen Punkt O

rotirt (Fig. 116). Zu dem Ende betrachten wir diesen Punkt als den gemeinsamen Ursprung zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme, von denen das eine, das der x', y', z', dem System angehört und sich daher mit diesem bewegt, während das andere, das der x, y, z, nicht an der Bewegung Theil nimmt. Die Coordinaten x', y', z' bestimmen demnach die Lage eines Punktes im System und sind nicht mit der Zeit veränderlich, da das System selbst unveränderlich ist, während die Coordinaten x, y, z die Lage desselben Punktes im absoluten Raume bestimmen und Functionen der Zeit sind, welche von der Art der Bewegung des Systems abhängen. Die Cosinusse der Winkel, welche die beweglichen Axen der x', y', z' mit den Axen der x, y, z bilden, seien a, b, c für die Axe der x', a', b', c' für die der y' und a'', b'', c'' für die der z'; sie sind gleichfalls mit der Zeit veränderlich und bestimmen die Lage des Systems im absoluten Raume. Indem wir den geschlossenen Linienzug der Coordinaten x, y, z eines Punktes M und des von ihm nach dem Ursprunge zurückführenden Radiusvectors MO auf die Axen der x, y, z projiciren, erhalten wir

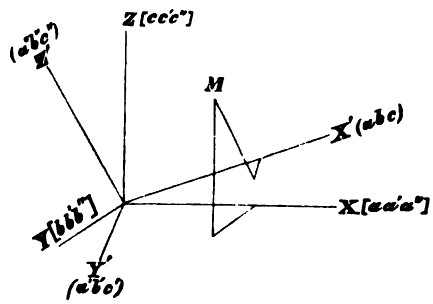

Fig. 116.

$$
(1) \quad \begin{aligned}
x &= ax' + a'y' + a''z', & a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0,\\
y &= bx' + b'y' + b''z', & a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0,\\
z &= cx' + c'y' + c''z', & a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & a''a + b''b + c''c &= 0,
\end{aligned}
$$

wobei die drei Gleichungen der zweiten Verticalreihe ausdrücken, dass a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' Richtungscosinusse dreier Geraden sind und die der dritten Verticalreihe, dass diese drei Geraden paarweise zu einander rechtwinklig sind. Projicirt man umgekehrt den Linienzug der x, y, z auf die Axen der x', y', z', so erhält man ähnlicherweise:

$$
(2) \quad \begin{aligned}
x' &= ax + by + cz, & a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0,\\
y' &= a'x + b'y + c'z, & b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0,\\
z' &= a''x + b''y + c''z, & c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0.
\end{aligned}
$$

Das Bildungsgesetz der drei ersten Gleichungen jeder Gruppe folgt dem leicht verständlichen Schema:

	x'	y'	z'
x	a	a'	a''
y	b	b'	b''
z	c	c'	c''

Auch erhält man die drei ersten Gleichungen der zweiten Gruppe aus den drei ersten der ersten, indem man letztere der Reihe nach mit a, b, c multiplicirt und mit Rücksicht auf die 6 Nebengleichungen addirt. In ähnlicher Weise gehen die Gleichungen der ersten Gruppe aus denen der zweiten durch Multiplication dieser letzteren mit a, a', a'' und nachfolgender Addition hervor.

Die directe Auflösung der Gleichungen (1) würde ergeben:

$$\begin{aligned}
\varDelta . x' &= \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} z, \\
\varDelta . y' &= \begin{vmatrix} b'' & c'' \\ b & c \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c'' & a'' \\ c & a \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a & b \end{vmatrix} z, \quad \text{wo } \varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}. \\
\varDelta . z' &= \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} z.
\end{aligned}$$

Die Determinante $\varDelta$ der neun Coefficienten $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ hat den Werth 1 oder -1, je nach Beschaffenheit der beiden Coordinatensysteme. Nimmt man nämlich auf den drei Coordinatenaxen der x', y', z' in der Einheit der Entfernung vom Ursprung die Punkte A, B, C an, so sind $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ ihre Coordinaten und daher stellt nach einem bekannten Satze die Determinante $\varDelta$ den sechsfachen Inhalt des Tetraeders $OABC$ dar. Der Absolutwerth dieses Tetraeders ist aber $\frac{1}{6}$. Durch Vergleichung der Auflösung mit den Gleichungen (2) folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} &= \varDelta . a, & \begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & a'' \end{vmatrix} &= \varDelta . b, & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} &= \varDelta . c \\
\begin{vmatrix} b'' & a'' \\ b & c \end{vmatrix} &= \varDelta . a', & \begin{vmatrix} c'' & a'' \\ c & a \end{vmatrix} &= \varDelta . b', & \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a & b \end{vmatrix} &= \varDelta . c' \\
\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} &= \varDelta . a'', & \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} &= \varDelta . b'', & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} &= \varDelta . c''.
\end{aligned}$$

Sind nun die beiden Coordinatensysteme so beschaffen, dass, wenn die positiven Axen der x' und y' mit den positiven Axen der x, y zur Coïncidenz gebracht werden, auch die positiven Axen der z, z' sich decken, so nennt man die Coordinatensysteme consentirend (congruent), fallen aber in dieser Lage der x'- und y'-Axen die positive z'- und die negative z-Axe zusammen, so heissen sie dissentirend (symmetrisch gleich). Im ersten Falle hat $\varDelta$ den Werth $+1$, im zweiten Falle den Werth -1. Denn für den Fall des Consentirens haben für das Zusammenfallen der Axen die 9 Cosinusse die Werthe:

$$\begin{aligned}
a &= 1, & b &= 0, & c &= 0 \\
a' &= 0, & b' &= 1, & c' &= 0 \\
a'' &= 0, & b'' &= 0, & c'' &= 1
\end{aligned}$$

und hiemit reducirt sich z. B. die Gleichung $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b \end{vmatrix} = \varDelta . c''$ auf $1 = \varDelta$; für den Fall des Dissentirens ist aber

$$\begin{array}{lll} a = 1, & b = 0, & c = 0, \\ a' = 0, & b' = 1, & c' = 0, \\ a'' = 0, & b'' = 0, & c'' = -1, \end{array}$$

wodurch dieselbe Gleichung übergeht in $-1 = \varDelta$.

In der Mechanik wendet man vorzugsweise consentirende Coordinatensysteme an und werden wir daher $\varDelta = 1$ setzen.

§. 8. Die Geschwindigkeit v des Systempunktes $(x', y', z'; x, y, z)$ kann sowohl parallel den beweglichen Axen der x, y, z, als auch parallel den festen Axen der x, y, z in drei Componenten $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}; v_x, v_y, v_z$ zerlegt werden (Fig. 117). Die letzteren Componenten sind

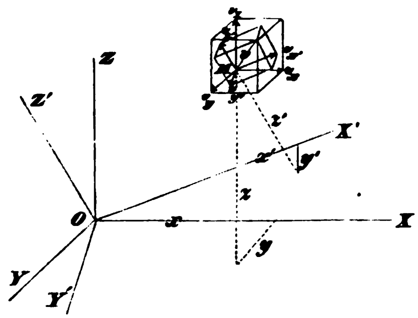

Fig. 117.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

und findet man sie durch Differentation der Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen nach t, wenn man bedenkt, dass x', y', z' von t unabhängig sind. Die Ausführung dieser Differentiation liefert

$$(1) \qquad \begin{aligned} v_x &= x' \frac{da}{dt} + y' \frac{da'}{dt} + z' \frac{da''}{dt}, \\ v_y &= x' \frac{db}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{db''}{dt}, \\ v_z &= x' \frac{dc}{dt} + y' \frac{dc'}{dt} + z' \frac{dc''}{dt}, \end{aligned}$$

wozu sich die Nebengleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} & a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} = 0, \\ & a' \frac{da'}{dt} + b' \frac{db'}{dt} + c' \frac{dc'}{dt} = 0, \\ & a'' \frac{da''}{dt} + b'' \frac{db''}{dt} + c'' \frac{dc''}{dt} = 0, \\ & \left(a \frac{da'}{dt} + b \frac{db'}{dt} + c \frac{dc'}{dt}\right) + \left(a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt}\right) = 0, \\ & \left(a' \frac{da''}{dt} + b' \frac{db''}{dt} + c' \frac{dc''}{dt}\right) + \left(a'' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{dc'}{dt}\right) = 0, \\ & \left(a'' \frac{da}{dt} + b'' \frac{db}{dt} + c'' \frac{dc}{dt}\right) + \left(a \frac{da''}{dt} + b \frac{db''}{dt} + c \frac{dc''}{dt}\right) = 0 \end{aligned}$$

gesellen. In Bezug auf die drei letzten derselben wollen wir die Abkürzungen einführen:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt} &= -\left(a\frac{da'}{dt}+b\frac{db'}{dt}+c\frac{dc'}{dt}\right)=r,\\
a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt} &= -\left(a'\frac{da''}{dt}+b'\frac{db''}{dt}+c'\frac{dc''}{dt}\right)=p,\\
a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt} &= -\left(a''\frac{da}{dt}+b''\frac{db}{dt}+c''\frac{dc}{dt}\right)=q.
\end{aligned}
$$

Die Componenten $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ der Geschwindigkeit v parallel den beweglichen Axen erhält man, indem man den Linienzug der v_x, v_y, v_z und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit v auf die beweglichen Axen projicirt, nämlich

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
v_{x'} &= a\,v_x+b\,v_y+c\,v_z\,,\\
v_{y'} &= a'v_x+b'v_y+c'v_z\,,\\
v_{z'} &= a''v_x+b''v_y+c''v_z\,.
\end{aligned}
$$

Entwickelt man diese Grössen, indem man die Ausdrücke (1) einsetzt, nach x', y', z' ordnet und die Gleichungen (2) und (3) zu Hülfe nimmt, so nehmen sie die Form an:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
v_{x'} &= qz'-ry' = \begin{vmatrix} q & r \\ y' & z' \end{vmatrix},\\
v_{y'} &= rx'-pz' = \begin{vmatrix} r & p \\ z' & x' \end{vmatrix},\\
v_{z'} &= py'-qx' = \begin{vmatrix} p & q \\ x' & y' \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Für die Systempunkte x', y', z', welche zur Zeit t auf der Momentanaxe liegen, ist $v=0$, also auch $v_{x'}=v_{y'}=v_{z'}=0$; daher sind

$$
\begin{aligned}
qz'-ry' &= 0,\\
rx'-pz' &= 0,\\
py'-qx' &= 0,
\end{aligned}
$$

oder in anderer Form

$$\frac{x'}{p}=\frac{y'}{q}=\frac{z'}{r}$$

die Gleichungen der Geraden (Γ) des Systems, welche zur Zeit t Momentanaxe ist, in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem. Hierdurch ist die Lage dieser Geraden im System bestimmt. Sie bildet mit den Axen der x', y', z' Winkel α', β', γ', für welche

$$\frac{\cos\alpha'}{p}=\frac{\cos\beta'}{q}=\frac{\cos\gamma'}{r}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

ist.

Für das Quadrat der Geschwindigkeit v des Systempunktes (x', y', z') erhält man, da $v^2 = v_{x'}^2 + v_{y'}^2 + v_{z'}^2$ ist,

$$v^2 = (qz' - ry')^2 + (rx' - pz')^2 + (py' - qx')^2$$
$$= (p^2 + q^2 + r^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (px' + qy' + rz')^2.$$

Bezeichnet man (Fig. 118) die Entfernung des Punktes $(x'y'z')$ vom Rotationscentrum O mit d, den Winkel zwischen d und der Momentanaxe mit ε und setzt

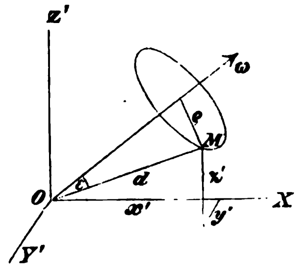

Fig. 118.

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$

so wird

$$d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \cos\varepsilon = \frac{px' + qy' + rz'}{\omega d}$$

und hiermit

$$v = \omega d \sin\varepsilon$$

oder da $d \sin\varepsilon = \varrho$ den Abstand des Systempunktes von der Momentanaxe darstellt,

$$v = \varrho\omega.$$

Hieraus ersieht man, dass ω nichts anderes, als die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe und p, q, r ihre Componenten um die beweglichen Axen sind.

§. 9. Zu den Formeln (5) des vorigen Paragraphen für die Componenten der Geschwindigkeit eines Systempunktes parallel den beweglichen Axen kann man auf folgende Weise unmittelbar gelangen. Wir denken uns die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe auf dieser nach Grösse und Sinn aufgetragen, zerlegen sie in ihre Componenten p, q, r, welche in die Axen der x', y', z' fallen und bestimmen die Bestandtheile, welche jede derselben zur Bildung der Geschwindigkeitscomponenten $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$ liefert. Hiebei gelten, wie dies aus der Natur des Projicirens folgt, p, q, r als positiv oder negativ, je nachdem ihr Sinn mit dem Sinne der positiven oder negativen Coordinatenaxen übereinstimmt, in deren Richtung sie fallen. Ein positives p drückt demnach eine Winkelgeschwindigkeit um die x'-Axe aus, deren Sinn von der positiven x'-Axe aus gesehen in der $y'z'$-Ebene einer Drehung der positiven y'-Axe in die positive z'-Axe im Sinne der Uhrzeigerbewegung entspricht u. s. f.

Unter Voraussetzung dreier positiver Componenten p, q, r von ω, als des Normalfalles, auf welchen alle anderen Fälle mit Hülfe einer Zeichenänderung von selbst zurückkommen, sei nun zunächst $d\vartheta_{x'}$ die unendlich kleine Amplitude, um welche das System vermöge der Winkelgeschwindigkeit p um die x'-Axe sich im Zeitelemente dt umdrehen würde; man hat dann

$$p = \frac{d\vartheta_{x'}}{dt}.$$

Die Richtung von $d\vartheta_{x'}$ ist die Richtung der Tangente eines in der Einheit der Entfernung um die x'-Axe beschriebenen Kreisbogens, dessen Ebene zu dieser Axe senkrecht ist; sie bildet mit den Coordinatenaxen der x', y', z' der Reihe nach Winkel, deren Cosinusse $0, -\frac{z'}{\varrho'}, \frac{y'}{\varrho'}$ sind, wenn ϱ' die Entfernung des Systempunktes $(x'y'z')$ von der x'-Axe bedeutet. Die Geschwindigkeit, welche p diesem Punkte ertheilt, ist $\varrho' p$ und ihre Componenten parallel den Coordinatenaxen sind daher:

$$0 \, . \, p, \; -z'p, \; y'p.$$

Betrachtet man die Axen der x', y', z' in der Folge der Buchstaben als erste, zweite und dritte Axe, so ist das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke leicht zu übersehen. Sie sind alle proportional p, der Winkel-Geschwindigkeitscomponente um die erste Axe; die Componente der Geschwindigkeit v parallel der ersten Axe hat den Coefficienten Null, die Componenten parallel der zweiten und dritten Axe haben zu Coefficienten die zweite und dritte Coordinate in verwechselter Folge und erhält dabei die der zweiten Axe entsprechende Componente das Zeichen $(-)$, die der dritten Axe entsprechende das Zeichen $(+)$. Indem wir jetzt die Axen in der Ordnung y', z', x' als erste, zweite und dritte Axe ansehen, erhalten wir für die Componenten der Geschwindigkeit v, herrührend von q, parallel den Axen der x', y', z' nach demselben Bildungsgesetze

$$z'q, \; 0 \, . \, q, \; -x'q$$

und ebenso für die Ordnung z', x', y' die von r herrührenden Componenten:

$$-y'r, \; x'r, \; 0 \, . \, r.$$

Sammeln wir jetzt alle denselben Axen parallelen Bestandtheile, so erhalten wir für die Componenten der Geschwindigkeit v des Systempunktes $(x'y'z')$ parallel den Axen des x', y', z':

$$\begin{aligned} v_{x'} &= qz' - ry', \\ v_{y'} &= rx' - pz', \\ v_{z'} &= py' - qx', \end{aligned}$$

wie früher.

§. 10. Um die Lage der Momentanaxe gegen die Axen der x, y, z, welche nicht an der Bewegung des Systems theilnehmen, zu bestimmen, projiciren wir den Linienzug der p, q, r und des ω, letzteres im entgegengesetzten Sinn genommen, auf die Axen der x, y, z. Dies liefert uns, wenn ω mit diesen Axen die Winkel α, β, γ bildet:

$$\begin{aligned} \omega \cos \alpha &= ap + a'q + a''r, \\ \omega \cos \beta &= bp + b'q + b''r, \\ \omega \cos \gamma &= cp + c'q + c''r. \end{aligned}$$

Man kann übrigens die Frage nach den Componenten v_x, v_y, v_z der Geschwindigkeit v parallel den Axen der x, y, z und der Lage der Momentanaxe gegen diese Axen auch direkt behandeln. Setzt man nämlich in den Gleichungen (1) des §. 8. $v_x = v_y = v_z = 0$, so erhält man als Gleichungen für die Bestimmung der Momentanaxe:

$$x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt} = 0,$$
$$x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt} = 0,$$
$$x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt} = 0,$$

aus welchen man mit Hülfe von (2) in §. 7. x', y', z' eliminiren und mit Rücksicht auf die dortigen Nebengleichungen und die sich aus ihnen durch Differentiation ergebenden Folgerungen weiter erhält:

$$\left(b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt}\right)y + \left(c\frac{da}{dt} + c'\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt}\right)z = 0,$$
$$\left(c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}\right)z + \left(a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt}\right)x = 0,$$
$$\left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right)x + \left(b\frac{dc}{dt} + b'\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt}\right)y = 0,$$

welche Gleichungen sich in Form der folgenden Proportionen schreiben lassen:

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R},$$

wo abkürzend

$$a\frac{db}{dt} + a'\frac{db'}{dt} + a''\frac{db''}{dt} = -\left(b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt}\right) = R,$$
$$b\frac{dc}{dt} + b'\frac{dc'}{dt} + b''\frac{dc''}{dt} = -\left(c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}\right) = P,$$
$$c\frac{da}{dt} + c'\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt} = -\left(a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}\right) = Q$$

gesetzt ist.

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Momentanaxe mit den Axen der x, y, z bildet, so hat man

$$\frac{\cos\alpha}{P} = \frac{\cos\beta}{Q} = \frac{\cos\gamma}{R} = \frac{1}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

Die Grössen P, Q, R haben in Bezug auf die Axen der x, y, z eine ganz analoge Bedeutung, wie die Grössen p, q, r in Bezug auf die Axen der x', y', z'. Sie sind nämlich die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um Axen, die zur Zeit t mit den Axen der x, y, z zusammenfallen. Führt man nämlich in die Gleichungen (1) des §. 8. für x', y', z' ihre Werthe, sowie für die oben bezeichneten Combinationen der Grössen a, b, c, ... und ihrer Differentialquotienten die Grössen P, Q, R ein, so kommt, wenn man nach x, y, z ordnet

$$v_x = \frac{dx}{dt} = Qz - Ry,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = Rx - Pz,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = Py - Qx.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} v^2 &= (Qz - Ry)^2 + (Rx - Pz)^2 + (Py - Qx)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (Px + Qy + Rz)^2 \end{aligned}$$

und wenn man

$$P^2 + Q^2 + R^2 = V^2$$

setzt und den Winkel, welchen der Abstand $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ des Punktes (xyz) vom Punkte O mit der Momentanaxe bildet, mit λ bezeichnet, sodass

$$\cos\lambda = \frac{Px + Qy + Rz}{Vd}$$

wird, so folgt weiter

$$v = Vd \sin\lambda,$$

woraus man erkennt, dass V die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe ist, und das P, Q, R ihre Componenten um die Axen sind, welche mit den Axen der x, y, z zusammenfallen.

§. 11. Es ist noch von Interesse, die Bedeutung der Differentialquotienten $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, etc. kennen zu lernen. Nun hat man einerseits

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt},$$

andrerseits erhält man dieselben Componenten der Geschwindigkeit v, indem man die Componenten $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ in (5) des §. 8. auf die Axen der x, y, z projicirt, nämlich

$$\begin{aligned} v_x &= a(qz' - ry') + a'(rx' - pz') + a''(py' - qx'), \\ v_y &= b(qz' - ry') + b'(rx' - pz') + b''(py' - qx'), \\ v_z &= c(qz' - ry') + c'(rx' - pz') + c''(py' - qx'). \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von x', y', z' erhält man daher:

$$\frac{da}{dt} = a'r - a''q, \quad \frac{da'}{dt} = a''p - ar, \quad \frac{da''}{dt} = aq - a'p,$$

$$\frac{db}{dt} = b'r - b''q, \quad \frac{db'}{dt} = b''p - br, \quad \frac{db''}{dt} = bq - b'p,$$

$$\frac{dc}{dt} = c'r - c''q, \quad \frac{dc'}{dt} = c''p - cr, \quad \frac{dc''}{dt} = cq - c'p.$$

Man kann diese Formeln auch auf geometrischem Wege finden, wenn man bedenkt, dass a, a', a'' die Coordinaten eines auf der x-Axe in der Einheit der Entfernung von O liegenden Punktes in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem sind und dass also seine Geschwindigkeitscomponenten $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ nach Anleitung des §. 9. gefunden werden können u. s. w.

§. 12. Die neun Cosinusse a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', welche die Lage des beweglichen Coordinatensystems bestimmen, sind nicht von einander unabhängig, vielmehr bestehen zwischen ihnen sechs Relationen (S. §. 7.), vermöge welcher sie auf drei reducirbar sind. Euler hat zuerst gezeigt, wie man dieselben durch die trigonometrischen Functionen dreier Winkel ausdrücken kann, welche hinreichen, um die Lage des beweglichen Systems zu bestimmen. Diese Winkel sind: 1) der Winkel ψ, welchen die Knotenlinie der Ebenen der $x'y'$ und der xy mit der Axe der x bildet, 2) der Winkel ϑ, welchen diese beiden Ebenen oder also auch die beiden auf ihnen senkrechten Axen der z und z' mit einander einschliessen und 3) der Winkel φ, welcher von der Axe der x' und jener Knotenlinie gebildet wird. Den Sinn dieser Winkel wollen wir folgendermassen bestimmen. Wir denken uns das System der $x'y'z'$ zunächst zusammenfallend mit dem der xyz und drehen dasselbe um die z-Axe im positiven, von der positiven z-Axe aus gesehen, mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmenden Sinn, bis die positive x'-Axe mit dem beliebig wählbaren, aber ein für allemal fixirten positiven Sinn der Knotenlinie zusammenfällt, die Amplitude dieser Drehung ist der Winkel ψ und ihr Sinn der Sinn desselben; wir drehen hierauf das System um die Knotenlinie im positiven Sinne, bis die Ebene der $x'y'$ in ihre Lage gelangt; die Amplitude dieser Drehung ist der Winkel ϑ und der Sinn, in welchem dieser Winkel genommen wird, ist der Sinn dieser Drehung; wir drehen endlich das System um die z'-Axe in der Lage, welche sie nunmehr erlangt hat, im positiven Sinne, bezeichnen die Amplitude dieser Drehung mit φ und nehmen diesen Winkel im Sinne dieser Drehung. Durch die Folge dieser drei Drehungen ist das System der x', y', z' in seine definitive, durch die Winkel φ, ϑ, ψ bestimmte Lage gelangt. Um die Abhängigkeit der obigen neun Cosinusse von den drei Winkeln φ, ϑ, ψ zu erkennen, denken wir um das Rotationscentrum O mit der Einheit als Radius eine Kugel beschrieben (Fig. 119); auf ihr markiren die Axen der x, y, z die drei Ecken eines Octanten, die Axen der x', y', z' die eines zweiten Octanten, die erwähnte Knotenlinie einen Punkt K, den Schnittpunkt der Bogen xy und $x'y'$, welche die Ebenen der xy und $x'y'$ vorstellen. Man hat alsdann $xK = \psi$, $Kx' = \varphi$ und $zz' = \vartheta$ und erhält

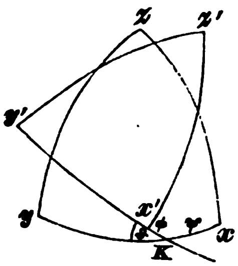

Fig. 119.

			aus den sphärischen Dreiecken
$a = \cos x'x$,	$b = \cos x'y$,	$c = \cos x'z$,	$x'Kx$, $x'Ky$, $x'Kz$,
$a' = \cos y'x$,	$b' = \cos y'y$,	$c' = \cos y'z$,	$y'Kx$, $y'Ky$, $y'Kz$,
$a'' = \cos z'x$,	$b'' = \cos z'y$,	$c'' = \cos z'z$,	$z'Kx$, $z'Ky$, $z'Kz$,

nämlich

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta,\quad a' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta$$
$$b = \cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta,\quad b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta$$
$$c = \sin\varphi\sin\vartheta,\quad c' = \cos\varphi\sin\vartheta$$
$$a'' = \sin\psi\sin\vartheta$$
$$b'' = -\cos\psi\sin\vartheta$$
$$c'' = \cos\vartheta.$$

§. 13. Man kann die Elementarbewegung des Systems um die Momentanaxe in drei unendlich kleine Rotationen um die Axen OK, Oz, Oz' auflösen; dadurch zerfällt die Winkelgeschwindigkeit ω in drei Componenten ω_ϑ, ω_ψ, ω_φ um diese Axen, deren Werthe sind:

$$\omega_\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt},\quad \omega_\psi = \frac{d\psi}{dt},\quad \omega_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Indem man diese Winkelgeschwindigkeiten auf ihren Axen nach Grösse und Sinn aufträgt und den Linienzug derselben in Verbindung mit der auf der Momentanaxe aufgetragenen Winkelgeschwindigkeit ω, diese in entgegengesetztem Sinne genommen, auf die Axen der x', y', z' projicirt, erhält man p, q, r ausgedrückt durch ω_ϑ, ω_ψ, ω_φ, nämlich:

$$p = -\omega_\vartheta\cos\varphi + \omega_\psi\sin\varphi\sin\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi + \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\vartheta$$

$$q = -\omega_\vartheta\sin\varphi + \omega_\psi\cos\varphi\sin\vartheta = -\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta$$

$$r = \omega_\varphi + \omega_\psi\cos\vartheta = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta.$$

Indem man diese Gleichungen nach ω_ϑ, ω_ψ, ω_φ auflöst, oder auch, indem man den Linienzug der p, q, r, $-\omega$ auf die Axen OK, Oz, Oz'

projicirt, erhält man weiter ω_ϑ, ω_ψ, ω_φ ausgedrückt durch p, q, r, nämlich:

$$\omega_\vartheta = p \cos\varphi - q \sin\varphi$$
$$\omega_\psi \sin\vartheta = p \sin\varphi + q \cos\varphi$$
$$\omega_\varphi \sin\vartheta = r \sin\vartheta - p \sin\varphi \cos\vartheta - q \cos\varphi \cos\vartheta .$$

§. 14. Während des Zeitelementes dt beschreibt der Radiusvector $OM = \varrho$ eines Systempunktes M einen unendlich kleinen Sector $OMM' = dS$; derselbe ist als ein unendlich kleines gleichschenkliges Dreieck anzusehen, dessen eine Seite das Bogenelement $MM' = ds$ der Bahn des Systempunktes ist, und dessen beiden andre Seiten die nach den Endpunkten M und M' dieses Elementes gezogenen Radienvectoren $OM = OM' = \varrho$ sind. Dieser Sector wird in einem mit dem Sinne, in welchem das Bogenelement durchlaufen wird, übereinstimmenden Sinne beschrieben. Die Fläche desselben, dividirt durch das Zeitelement, wird die Sectorengeschwindigkeit oder **Flächengeschwindigkeit** des Systempunktes M in Bezug auf das Rotationscentrum genannt. Bezeichnen wir sie mit η, sowie den unendlich kleinen Winkel MOM' der beiden Radienvectoren mit $d\vartheta$, so wird

$$\eta = \frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2} \varrho^2 \frac{d\vartheta}{dt} .$$

Errichten wir in O senkrecht auf die Ebene des Sectors dS eine Gerade und zwar nach der Seite dieser Ebene, von welcher aus gesehen der Sector übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung beschrieben erscheint, so soll diese Gerade die Axe der Sectorengeschwindigkeit heissen. In Bezug auf sie stellt $\frac{d\vartheta}{dt}$ eine Winkelgeschwindigkeit dar. Die Grösse η tragen wir auf dieser Axe in ihrem Sinne als Länge auf.

Bezeichnet r den Abstand des Punktes M von der Momentanaxe, so hat man

$$\varrho \frac{d\vartheta}{dt} = r\omega$$

und besteht zwischen der Sectorengeschwindigkeit η des Punktes M, seinen Abständen ϱ und r vom Rotationscentrum und der Momentanaxe, sowie der Winkelgeschwindigkeit ω um letztere oder auch der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ des Systempunktes die Gleichung

$$\eta = \tfrac{1}{2} \varrho r \omega = \tfrac{1}{2} \varrho v .$$

Es wird demnach die Sectorengeschwindigkeit durch den Inhalt des Dreiecks dargestellt, welches die auf der Tangente der Bahn des Systempunktes aufgetragene Geschwindigkeit v als

Basis mit dem Rotationscentrum als gegenüberliegende Ecke bildet.

Während einer endlichen Zeit beschreibt der Radiusvector ϱ eines Systempunktes M einen sphärischen Ausschnitt einer Kegelfläche, von welchem dS das Differential ist. Die Sectorengeschwindigkeit ist im Laufe der Bewegung nach Grösse und Axenrichtung im Allgemeinen veränderlich.

Projiciren wir das bewegliche System auf eine Ebene, welche an der Bewegung nicht Theil nimmt, z. B. auf die xy-Ebene, so wird das projicirte System im Allgemeinen ein veränderliches ebenes System sein. Die Projection m des Punktes M beschreibt im Zeitelement das Bogenelement mm' und die Projection ϱ_1 des Radiusvectors ϱ den unendlich kleinen Sector mOm', dessen Inhalt $\frac{1}{2}\varrho_1^2 d\vartheta_1$ ist, wenn $d\vartheta_1$ die Projection des unendlich kleinen Winkels $d\vartheta$ bezeichnet. Der Winkel ϑ_1, dessen Differential $d\vartheta_1$ ist, kann als der Winkel aufgefasst werden, den ϱ_1 mit der Axe der x bildet und es sind daher die Coordinaten x, y des Punktes m durch die Gleichungen $x = \varrho_1 \cos\vartheta_1$, $y = \varrho_1 \sin\vartheta_1$ bestimmt, aus welchen

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{y}{x}, \quad \varrho_1^2 = x^2 + y^2$$

und hiermit weiter

$$d\vartheta_1 = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

und also

$$\varrho_1^2 d\vartheta_1 = x\,dy - y\,dx$$

folgt. Daher würde die Sectorengeschwindigkeit des Punktes m in der xy-Ebene sein:

$$\tfrac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{d\vartheta_1}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Wir wollen nun mit dS_x, dS_y, dS_z die Projectionen des Elementarsectors dS auf die Ebenen der yz, zx und xy und die den drei Projectionsbewegungen von M in diesen Ebenen entsprechenden Sectorengeschwindigkeiten mit η_x, η_y, η_z bezeichnen. Unter Anwendung der symmetrischen Vertauschung der Buchstaben giebt uns dann die vorstehende Betrachtung sofort:

$$\eta_x = \frac{dS_x}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}(yv_z - zv_y),$$

$$\eta_y = \frac{dS_y}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}(zv_x - xv_z),$$

$$\eta_z = \frac{dS_z}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}(xv_y - yv_x).$$

Die Axen dieser drei Sectorengeschwindigkeiten sind die Axen der x, y, z. Bildet nun die Axe von η mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ, so wird nach bekannten Sätzen der Geometrie

$$\frac{\cos\alpha}{dS_x} = \frac{\cos\beta}{dS_y} = \frac{\cos\gamma}{dS_z} = \frac{1}{dS},$$
$$dS^2 = dS_x^2 + dS_y^2 + dS_z^2$$

und folglich auch

$$\frac{\cos\alpha}{\eta_x} = \frac{\cos\beta}{\eta_y} = \frac{\cos\gamma}{\eta_z} = \frac{1}{\eta},$$
$$\eta^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2.$$

VII. Capitel.

Die Windungsbewegung des unveränderlichen Systems und ihre Geschwindigkeiten.

§. 1. Nachdem wir im IV. und VI. Capitel die specielleren Bewegungen des unveränderlichen Systems, die ebene oder Parallelbewegung und die sphärische Bewegung, bei welchen die Systempunkte sämmtlich congruente oder ähnliche Bahnen beschreiben, erläutert haben, schreiten wir zur Betrachtung der allgemeinsten Bewegung eines solchen Systems, die wir die Windungsbewegung nennen wollen. Sie ist dadurch charakterisirt, dass je zwei aufeinanderfolgende Lagen des beweglichen Systems im Allgemeinen keinen Doppelpunkt besitzen. Zum Verständniss derselben dienen uns die Sätze über die Aequivalenz der Rotationen und Winkelgeschwindigkeiten mit der Schraubenbewegung und der Schraubengeschwindigkeit.

§. 2. Es seien Σ_1, Σ_2, Σ_3 . . . eine Reihe von Lagen, welche das bewegliche System Σ während seiner Bewegung durchläuft, von welchen keine zwei aufeinanderfolgende einen Doppelpunkt besitzen. Die Bewegung, welche Σ aus der Lage Σ_1 nach Σ_2 führt, ist aequivalent einer Schraubenbewegung von der Amplitude ϑ_1 und der Translation τ_1 um eine gewisse Axe C_1, die Bewegung aus der Lage Σ_2 nach Σ_3 ist ebenso äquivalent einer zweiten Schraubenbewegung (ϑ_2, τ_2) um eine zweite Axe C_2 u. s. f. Construiren wir alle diese Axen und ertheilen dem Systeme Σ statt seiner wirklichen Bewegung nach und nach die Schraubenbewegungen (ϑ_1, τ_1), (ϑ_2, τ_2), (ϑ_2, τ_3) . . ., so ergibt sich eine Bewegung, welche mit der wirklich stattfindenden in den Lagen Σ_1, Σ_2, Σ_3 . . . übereinstimmt, im Uebrigen aber im Allgemeinen von ihr abweicht. Schaltet man aber zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser Lagen andere Lagen des beweglichen Systems ein und wiederholt die Construction der Schraubenbewegungen, wobei sowohl die Amplituden, als auch die Translationen und nicht minder die Axen sich ändern, so ergibt sich eine Bewegung, welche sich der wirklichen Bewegung weit inniger anschliesst. Bei Fortsetzung dieses Prozesses häufen sich die Axen immer dichter und dichter, nehmen die Amplituden und Translationen, weil die Lagen des Systems immer näher aneinanderrücken, ohne Ende ab und nähert sich der Ort aller Axen einer bestimmten geradlinigen Fläche, die ganze Bewegung aber der wirklich stattfindenden Bewegung ohne Ende als ihrer Grenze. Durch die Vollziehung dieses Grenzüberganges ergibt sich daher der Satz:

Die Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent einer continuirlichen Folge verschwindend kleiner Schraubenbewegungen um die Erzeugungslinien einer bestimmten geradlinigen Fläche (C) des absoluten Raumes.

Während das System die Schraubenbewegung um die Axe C_1 erleidet, fällt eine bestimmte Linie Γ_1 des Systems mit C_1 zusammen und verschiebt sich in Folge der Translationscomponente der Schraubenbewegung in ihr; durch die folgende Schraubenbewegung um C_2 verlässt Γ_1 diese Linie, während derselben fällt aber eine zweite Linie Γ_2 des Systems mit C_2 zusammen; ebenso während der Bewegung um C_3 eine dritte Linie Γ_3 mit C_3 u. s. f. Der geometrische Ort aller dieser Geraden Γ, welche nach und nach mit den Schraubenaxen C zusammenfallen und in diesen gleiten, ist in der Grenze eine bestimmte geradlinige Fläche (Γ) des beweglichen Systems. Beide Flächen (C) und (Γ) berühren sich während der Bewegung längs der zusammenfallenden Erzeugungslinien C_1 und Γ_1, C_2 und Γ_2 u. s. f., d. h. sie haben längs diesen in allen Punkten gemeinschaftliche Tangentenebenen. Denn durch die Schraubenbewegung um C_1 z. B. gelangt Γ_2 in die Axe C_2, während Γ_1 in C_1 bleibt und C_1 erst in dem Momente verlässt, in welchem Γ_2 in C_2 eintritt; mithin haben die Flächen in diesem Moment zwei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien gemein, und berühren sich folglich längs der ersten von ihnen. Man hat daher weiter den Satz:

Die Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems ist äquivalent dem Gleiten und Rollen einer bestimmten geradlinigen Fläche (Γ) des beweglichen Systems auf einer bestimmten geradlinigen Fläche (C) des absoluten Raumes.

Sind die beiden Flächen Kegelflächen mit gemeinsamem Mittelpunkt, so ist das Gleiten ausgeschlossen und reducirt sich die Bewegung der Flächen auf das blosse Rollen der einen auf der andern; die Bewegung ist die in Cap. VI behandelte Rotation des Systems um einen Punkt. — Sind die Flächen Cylinderflächen, welche nicht auf einander gleiten, sondern blos rollen, so ist die Bewegung die in Cap. V behandelte Parallelbewegung.

Es sei A ein beliebiger Punkt des beweglichen Systems und seien $A_1, A_2, A_3 \ldots$ die Orte, welche er in $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots$ der Reihe nach einnimmt. Durch die Schraubenbewegung um C_1 gelangt er von A_1 nach A_2, durch die um C_2 von A_2 nach A_3 u. s. f. Ziehen wir durch $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Axen $c_1, c_2, c_3 \ldots$ resp. parallel den Schraubenaxen $C_1, C_2, C_3 \ldots$, so ist nach Cap. I, §. 13 die Schraubenbewegung um C_1 aequivalent der Rotation ϑ_1 um c_1 in Verbindung mit der Translation des Systems gleich A_1A_2, die Schraubenbewegung um C_2 aequivalent der Rotation ϑ_2 um c_2 und der Translation A_2A_3, u. s. f. Daher der weitere Satz:

Die Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems ist aequivalent der (im Allgemeinen) krummlinigen Translation des Systems, welche durch die Bahn eines beliebigen seiner Punkte angegeben wird, in Verbindung mit einer continuirlichen Rotationsfolge um Axen, welche durch die aufeinanderfolgenden Orte dieses Punktes parallel den ihnen entsprechenden Lagen der Schraubenaxe gelegt werden.

Während der Bewegung des Systems beschreibt der Punkt A die Bahn $A_1A_2A_3\ldots$ und fallen mit den Axen $c_1, c_2, c_3\ldots$ gewisse Linien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\ldots$ des Systems zusammen, welche sämmtlich durch A hindurchgehen und eine gewisse Kegelfläche (γ) bilden, deren Mittelpunkt A ist. Durch die Rotation um (c_1, γ_1) wird γ_2 parallel c_2 und durch die Translation A_1A_2 wird γ_2 parallel mit sich in die Axe c_2 geschoben; während der Rotation um (c_2, γ_2) wird γ_3 parallel c_3 und durch die Translation A_2A_3 mit c_3 vereinigt etc. Der Kegel (γ) erleidet daher die Translationsfolge $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ und die Rotationsfolge $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\ldots$ um $c_1, c_2, c_3\ldots$

Denkt man sich ein bewegliches Hülfssystem Σ', welches mit Σ_1 ursprünglich zusammenfällt und nach und nach die Translationen A_1A_2, $A_2A_3\ldots$ erleidet, und zieht durch den Punkt A', welcher in Σ_1 mit A_1 und A zusammenfällt, Gerade $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'\ldots$ parallel zu $c_1, c_2, c_3\ldots$, so bilden diese in Σ' eine Kegelfläche (γ'), deren Erzeugungslinien während der Translation von Σ' nach und nach mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ zusammenfallen. In diesem Hülfssystem bewegt sich Σ so, dass durch die Rotation ϑ_1 um γ_1 die Gerade γ_2' in γ_2 eintritt, durch die Rotation ϑ_2 um γ_2 die Gerade γ_3' mit γ_3 vereinigt wird u. s. f., so dass der Kegel (γ) auf dem Kegel (γ') hinrollt und durch dies Rollen in Verbindung mit der Translation des Hülfssystems Σ' das System Σ nach und nach alle seine Lagen erreicht. Daher:

Die Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems ist aequivalent dem Rollen eines dem System angehörigen Kegels (γ) auf einem andern gleichfalls beweglichen, einem Hülfssystem angehörigen Kegel, welches eine Translation besitzt, welche durch die Bahn des Mittelpunktes des ersteren Kegels bezeichnet wird.

§. 3. Jeder Lage des beweglichen Systems entspricht eine bestimmte Gerade C der Fläche (C), um welche dasselbe eine unendlich kleine Schraubenbewegung ausführt, um in die folgende unendlich nahe Lage zu gelangen. Diese Gerade nennen wir die **Momentanaxe** für die fragliche Lage des Systems und die unendlich kleine Schraubenbewegung um sie die jener Lage entsprechende Elementarbewegung des Systems. Diese Elementarbewegung hat zwei Componenten, die Elementarrotation mit der Elementaramplitude $d\vartheta$ um C und die Elementartranslation $d\tau$ parallel C. Die Elementaramplitude $d\vartheta$, durch das Zeitelement dt dividirt, gibt die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ um die Momentanaxe, die Elementartranslation ebenso die Translationsgeschwindigkeit v_0 parallel derselben. Die Systempunkte im Abstande r von der Momentanaxe haben die Geschwindigkeit $v = \sqrt{v_0^2 + r^2\omega^2}$; die der Axe selbst insbesondere $v = v_0$. Die Momentanaxe kann füglich auch die Axe der Geschwindigkeiten genannt werden. Manche Autoren nennen sie auch die Polaxe und dem entsprechend die Flächen (C) und (Γ) die Polaxenflächen, auch wohl Axoïde*).

Das Verhältniss $p = \frac{d\tau}{d\vartheta} = \frac{v_0}{\omega}$ der Elementartranslation zur Elementaramplitude oder der Translationsgeschwindigkeit zur Winkelgeschwindigkeit nennen wir das Windungsverhältniss oder den Parameter der Elementarbewegung.

In Folge der Elementarbewegung beschreibt jeder Punkt des Systems ein Element seiner Bahn als Element einer gewissen gemeinen Cylinderschraube; ist daher die Momentanaxe und ihr Parameter bekannt, so hat die Aufgabe, die Tangente und Normalebene der Bahn zu bestimmen, keine Schwierigkeit. Die Cylinderschraube hat übrigens mit der Bahn des Punktes blos ein Element gemein und berührt sie folglich blos in der ersten Ordnung; sie ist wesentlich verschieden von der Schmiegungsschraubenlinie, welche die Curve weit inniger berührt**). Systempunkte gleichen Abstandes r von der Momentanaxe beschreiben Bogenelemente gleicher Neigung i gegen die Momentanaxe; die Neigung derselben ist Null für die Punkte der Axe selbst, nimmt proportional mit r zu und wird $\frac{1}{2}\pi$ für $r = \infty$. Es ist allgemein $\operatorname{tg} i = \frac{\omega r}{v_0} = \frac{r}{p}$.

§. 4. Die Momentanaxe mit den beiden auf ihr aufzutragenden Strecken, der Winkelgeschwindigkeit ω um sie und der Translationsgeschwindigkeit v_0 parallel zu ihr, besitzt alle Eigenschaften der Centralaxe eines Streckensystems mit der Resultanten R und dem Axenmomente G_0 (s. Th. I, Cap. IV)

*) Man hat Grund, mit der Wahl der vom Worte „Pol" abgeleiteten Benennungen vorsichtig zu sein, da dies Wort selbst bereits in sehr verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird. Die Bezeichnung „Axoid" ist unrichtig gebildet, die Flächen (C, Γ) sind keine „axenähnlichen Gebilde".

**) Vgl. meine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, Leipzig 1859", p. 84.

und bestimmt daher ebenso, wie dieses einen Complex ersten Grades. Sowie nämlich dort aus der Combination (R, G_0) für die Centralaxe μ_0 jede andere für einen beliebigen Stral μ im Abstande r von μ_0, nämlich (R, G), wo $G = (G_0^2 + R^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, hervorging, indem man das Paar $(R, -R)$ mit dem Arme r zufügte, so können wir auch hier die Combinaten (ω, v_0) für die Momentanaxe in eine ihr aequivalente umwandeln, indem wir durch irgend einen Punkt M einen Stral parallel zur Centralaxe ziehen und längs desselben die beiden sich tilgenden Grössen ω und $-\omega$ zufügen, welche in Verbindung mit (ω, v_0) liefern: ω auf dem Strale des Punktes M nebst v_0 parallel demselben und ein Paar $(\omega, -\omega)$, aequivalent einer Translationsgeschwindigkeit senkrecht zur Ebene, welche den Punkt M mit der Momentanaxe verbindet, gleich dem Momente ωr dieses Paares, wenn r der Abstand des Punktes M von der Momentanaxe ist. Die beiden Translationsgeschwindigkeiten v_0 und ωr liefern, da sie senkrecht zu einander sind, die Translationsgeschwindigkeit $(v_0^2 + \omega^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ mit der Neigung $\frac{\omega r}{v_0}$ gegen die Momentanaxe. Man sieht, dass die unveränderliche Resultante $R = \omega$ und das Paar $G = (G_0^2 + R^2 r^2)^{\frac{1}{2}} = (v_0^2 + \omega^2 r^2)^{\frac{1}{2}}$ d. h. dass R die Winkelgeschwindigkeit und das Moment G die Geschwindigkeit des Systempunktes M bedeutet, durch welchen der Parallelstral gezogen ist. Ebenso wie (R, G) aequivalent ist zwei Strecken (r, ϱ) längs zwei conjugirten Geraden, ist auch hier (ω, v_0) aequivalent zwei Winkelgeschwindigkeiten (ω_1, ω_2) um zwei conjugirte Geraden. Ferner sind die Normalebenen der Bahnen der Systempunkte M die Nullebenen und die Punkte M ihre Pole und die sämmtlichen Normalen der Bahnen der Punkte M bilden die Stralen des Complexes ersten Grades. Die Momentanaxe verdient daher den Namen der Centralaxe der Bewegung. Wir ziehen hieraus einige Folgerungen für die Bewegung einer Geraden und einer Ebene.

1. Die Normalebenen der Bahnelemente, welche die Punkte M einer Geraden g vermöge der Elementarbewegung beschreiben, schneiden sich alle in einer Geraden, nämlich in der zu g conjugirten Geraden g'. Daher sind die Tangenten an die Bahnen der Punkte M sämmtlich parallel der zu g' senkrechten Ebene und bilden ein hyperbolisches Paraboloid.

2. Die Elementarbewegung einer Geraden g ist aequivalent einer unendlich kleinen Rotation um die conjugirte Gerade g' und umgekehrt. Denn man kann die Elementarbewegung des Systems zerlegen in 2 Rotationen, eine um g, die andere um g'; die Rotation um g ertheilt aber dieser Geraden keine Bewegung, mithin reducirt sich ihre Bewegung auf die Rotation um g'. (Eine Gerade g kann auf unzählige

Arten durch Schraubenbewegung in eine andere Lage übergehen, unter diesen verschiedenen Arten des Ueberganges findet sich nur eine Rotation.)

Die Projectionen der Bahnelemente MM' der Punkte M einer Geraden g auf diese Gerade, sowie die Componenten der Geschwindigkeiten der Punkte M einer Geraden g längs dieser Geraden sind gleich. Denkt man sich nämlich die Gerade g durch Rotation um die conjugirte Gerade g' in ihre folgende Lage übergeführt und legt durch M eine Ebene senkrecht zu g', so fällt MM' in diese Ebene und ist, wenn O der Schnitt dieser Ebene mit g' und $d\vartheta$ die Amplitude der Rotation um g' ist, $MM' = OM \,.\, d\vartheta$. Projicirt man nun g auf diese Ebene, so sei α der Winkel, den MM', β der, welchen g mit seiner Projection γ bildet und λ der Winkel zwischen MM' und g. Dann hat man wegen der Rechtwinkligkeit der Ecke M für die Projection Mm von MM' auf g die Gleichungen

$$Mm = MM' \,.\, \cos\lambda = OM \,.\, \cos\lambda \,.\, d\vartheta = OM \,.\, \cos\alpha \cos\beta \,.\, d\vartheta.$$

Es ist aber der Winkel ψ den der Stral OM mit γ bildet $\psi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ und daher $Mm = OM \sin\psi \cos\beta d\vartheta$ und da $OM \,.\, \sin\psi = p$ die von O auf γ gefällte Normale ist, so wird $Mm = p \cos\beta \, d\vartheta$, also constant für alle Punkte M der Geraden g. Dividirt man mit dem Zeitelemente dt, so folgt die andere Hälfte des Satzes.

4. Ist eine Gerade g senkrecht zur Tangente der Bahn irgend eines ihrer Punkte, so ist sie zugleich senkrecht zu den Tangenten der Bahnen aller ihrer Punkte. Denn ist MM' senkrecht zu g, so ist seine Projection Mm auf g gleich Null und sind nach Satz 3 die Projectionen aller Elemente wie MM' gleich Null. Eine solche Gerade g kann nicht durch Rotation um ihre conjugirte g' in ihre folgende Lage gelangen. Denn die Normalebenen ihrer Punkte schneiden sich inihr selbst, sie fällt daher mit g' zusammen. Sie ist eine Doppellinie des Nullsystems.

5. In jeder Ebene des beweglichen Systems gibt es einen einzigen Punkt, dessen Geschwindigkeit senkrecht zu der Ebene ist, nämlich ihr Pol. In ihr gibt es eine Gerade, deren Punkte Geschwindigkeiten besitzen, welche in die Ebene fallen, die Charakteristik. Alle andern Punkte haben mehr oder weniger geneigte Geschwindigkeitsrichtungen. Die Bewegung der Ebene ist aequivalent einer unendlich kleinen Rotation um die Normale der Ebene im Pol in Verbindung mit einer Rotation um die Charakteristik.

6. Die Normalebenen der Bogenelemente, welche die Punkte einer Ebene in Folge der Elementarbewegung beschreiben, schneiden sich sämmtlich in einem Punkte, nämlich im Pol der Ebene. Denn die Schnittlinien der Normalebenen der Bogenelemente mit der Ebene der Punkte sind die Complexstralen der Ebene und laufen als solche durch ihren Pol.

7. Um die Lage und die Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 zweier conjugirter Geraden g_1, g_2 zu ermitteln, genügt es, die Betrachtungen von Cap. II, §. 16. umzukehren. Der kürzeste Abstand von g_1, g_2 schneidet die Momentanaxe C rechtwinklig in einem Punkte C. Sind A, B seine Fusspunkte auf g_1, g_2 so ist

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\operatorname{tg}(g_1 C)}{\operatorname{tg}(C g_2)} \quad \text{oder} \quad AC \,.\, \operatorname{tg}(Cg_2) = CB \,.\, \operatorname{tg}(g_1 C).$$

Durch die Elementarbewegung um die Momentanaxe erlangt der Punkt B eine Geschwindigkeitscomponente $CB \,.\, \omega$, herrührend von der Winkelgeschwindigkeit ω um C, senkrecht zu C und eine Componente v_0 parallel C, gleich der Translationsgeschwindigkeit des Systems. Die Tangente der Neigung ψ der Geschwindigkeit $v = \sqrt{v_0^2 + \overline{CB}^2 \,.\, \omega^2}$ des Punktes B gegen die Momentanaxe ist daher $\operatorname{tg}\psi = CB \cdot \frac{\omega}{v_0}$ oder es ist $CB \,.\, \omega = v_0 \operatorname{tg}\psi$. Fassen wir nun die Geschwindigkeit von B auf als erzeugt durch die Winkelgeschwindigkeiten ω_1. ω_2 um die conjugirten Graden g_1, g_2, so verdankt B seine Geschwindigkeit blos ω_1, da es g_2 angehört. Daher fällt v in eine Normalebene zu g_1 und ist v senkrecht zu g_1. Ziehen wir also durch B eine Parallele γ zu g_1, so sind die Winkel ψ und (γC) oder also auch ψ und $(g_1 C)$ Complementwinkel, also $\operatorname{tg}\psi \,.\, \operatorname{tg}(g_1 C) = 1$. Damit geht die Gleichung $CB \,.\, \omega = v_0 \operatorname{tg}\psi$ über in

$$CB \,.\, \operatorname{tg}(g_1 C) = \frac{v_0}{\omega}$$

und erhält man

$$AC \,.\, \operatorname{tg}(Cg_2) = CB \,.\, \operatorname{tg}(g_1 C) = \frac{v_0}{\omega}.$$

Nimmt man also die Axe g_1 willkürlich an, so hängt die Neigung (Cg_2) der zweiten Axe g_2 gegen die Momentanaxe nur von dem Abstande AC der ersten Axe g_1 von der Momentanaxe ab.

Sind die Axen g_1, g_2 zu einander senkrecht, d. h. ist jede die Richtung der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte, so ist

$$\operatorname{tg}(Cg_2) = \operatorname{tg}(g_1 C);$$

mithin

$$AC \,.\, CB = \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit ω_1 um g_1 hat man

$$\omega_1 \,.\, (AC + CB) = v \quad \text{oder} \quad \omega_1^2 \,.\, (AC + CB)^2 = v_0^2 + \overline{CB}^2 \,.\, \omega^2$$

und ebenso für die Winkelgeschwindigkeit ω_2 um g_2

$$\omega_2^2 \cdot \overline{AB}^2 = v_0^2 + \overline{AC}^2 \cdot \omega^2.$$

Da nun

$$CB = \frac{v_0}{\omega} \cdot \operatorname{cotg}(g_1 C) = \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{\cos(g_1 C)}{\sin(g_1 C)},$$

so erhält man hiemit:

$$\omega_1^2 = \frac{v_0^2 \omega^2}{[AC \cdot \omega \sin(g_1 C) + v_0 \cos(g_1 C)]^2},$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega^2 (v_0^2 + \overline{AC}^2 \cdot \omega^2) \sin^2(g_1 C)}{[AC \cdot \omega \sin(g_1 C) + v_0 \cos(g_1 C)]^2}.$$

Das Verhältniss der beiden Winkelgeschwindigkeiten ist:

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{v_0^2}{v_0^2 + \overline{AC}^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(g_1 C)}.$$

Es ist aber, wenn man die Bewegung von A als Rotation um g_2 auffasst

$$\frac{v_0^2}{v_0^2 + \overline{AC}^2 \cdot \omega^2} = \sin^2(C g_2);$$

mithin

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin(C g_2)}{\sin(g_1 C)}$$

in Uebereinstimmung mit Cap. II, §. 16 u. Cap. III, §. 26.

Endlich hat man

$$\operatorname{tg}(C g_2) = \frac{v_0}{\omega \cdot AC}$$

und also

$$\cos(C g_2) = \frac{\omega \cdot AC}{\sqrt{v_0^2 + \overline{AC}^2 \cdot \omega^2}}, \quad \sin(C g_2) = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \overline{AC}^2 \cdot \omega^2}}.$$

8. Als Constructionen für die Momentanaxe können die Cap. I, §. 14. und Cap. III, §. 27 angeführten gebraucht werden, erstere, indem man $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ durch die Bahnelemente dreier Punkte oder ihre Geschwindigkeiten vertreten lässt.

§. 5. Die individuelle Natur der Bewegung des Systems wird durch die beiden geradlinigen Flächen (C), (Γ) bestimmt, von denen die letztere auf der ersteren rollt und gleitet. So viele derartige Flächenpaare denkbar sind, so viele verschiedene Bewegungsarten des Systems sind möglich. Darunter gibt es jedoch Fälle von einer gewissen Unbestimmtheit. Denn nicht immer sind die Elemente der Schraubenbewegung, Translation und Amplitude, durch die Beschaffenheit der Flächen bestimmt und es können z. B. zwei Cylinder auf mannigfache Weise rollen und gleiten.

Die Bewegungsarten des Systems lassen sich eintheilen nach dem Gesichtspunkte, dass die Flächen (C), (Γ) beide windschief, oder beide abwickelbar sind. In jedem Momente berühren sich diese Flächen längs einer Erzeugungslinie, der Momentanaxe, d. h. sie haben zwei aufeinanderfolgende Erzeugungslinien nebst den zwischen diesen enthaltenen Flächenelementen gemein. Daher können eine abwickelbare und eine windschiefe Fläche nicht Flächen (C) und (Γ) sein; denn die Flächenelemente der ersteren fallen in ein und dieselbe Ebene, die der andern nicht. Ebenso können nicht alle Arten abwickelbare Flächen auf einander rollen und gleiten, z. B. eine Kegelfläche und eine Cylinderfläche. Wir wollen jetzt die Bedingungen aufsuchen, welche erfüllt sein müssen, damit Rollen und Gleiten für zwei windschiefe Flächen auf einander möglich sei.

Es sei g (Fig. 120) eine Erzeugungslinie einer windschiefen Fläche, g' eine ihr unendlich nahe, welche sie unter dem unendlich kleinen Winkel $d\sigma$ kreuzt und von ihr den kürzesten Abstand dp hat. In allen Punkten A von g errichten wir Perpendikel auf g, welche g' in den Punkten B' schneiden. Die Ebenen, welche g und diese Perpendikel AB' enthalten, sind die Tangentenebenen in den Punkten A längs g. In dem Ebenenbüschel der Tangentenebenen der Fläche längs der Erzeugungslinie g ist eine ausgezeichnete, die Centralebene des Büschels; sie ist diejenige, welche den kürzesten Abstand A_0B_0 von g, g' enthält. Ziehen wir durch den Fusspunkt A_0 des kürzesten Abstandes, den Centralpunkt von g, eine Gerade γ parallel g', fällen von B auf γ das Perpendikel BC und verbinden C mit A, so stellt in dem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC der Winkel B die Neigung ϑ der Tangentenebene in A gegen die Centralebene dar. Es ist daher

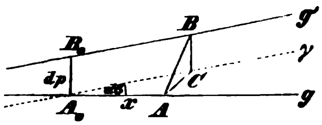

Fig. 120.

$$\operatorname{tg} \vartheta = AC : CB$$

d. h.

$$\operatorname{tg} \vartheta = A_0A \,.\, d\sigma : dp$$

oder wenn wir $A_0A = x$ setzen,

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{d\sigma}{dp} \cdot x = \frac{x}{\varkappa}.$$

Das Verhältniss $\frac{dp}{d\sigma}$ stellt nämlich eine Länge dar, die wir mit $\varkappa$ bezeichnen und den Parameter der Erzeugungslinie g der windschiefen Fläche nennen. Derselbe ist das Verhältniss des kürzesten Abstandes dp von der nächsten Erzeugungslinie zum Kreuzungswinkel $d\sigma$ beider Erzeugungslinien. Für $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ wird $x = \varkappa$, wodurch eine weitere Bedeutung von $\varkappa$ gegeben ist. Für die Tangentenebene in einem zweiten Punkte A' von g' seien x' und ϑ' der Abstand vom Centralpunkte und die Neigung der Tangentenebene gegen die Centralebene; für ihn ist

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{x'}{\varkappa}$$

und mithin besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta \,.\, \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{x x'}{\varkappa^2}.$$

Nehmen wir den Punkt A' so an, dass seine Tangentenebene auf der Tangentenebene des Punktes A senkrecht steht, so wird die Tangentenebene des Punktes A' Normalebene in A und die Tangentenebene von A Normalebene in A' und da in diesem Falle $\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta' = \pm 1$ werden muss, so folgt

$$x x' = \pm \varkappa^2 .$$

Jede Tangentenebene einer windschiefen Fläche ist zugleich Normalebene in einem Punkte der Erzeugungslinie, welche sie enthält und dieser Punkt und ihr Berührungspunkt gehören einer Punktinvolution an, für welche der Fusspunkt des kürzesten Abstandes der Centralpunkt ist. Da diese Involution durch den Centralpunkt und den Parameter $\varkappa$ bestimmt ist, so ist es auch die ihr entsprechende Involution der Tangentenebenen.

Sollen nun zwei windschiefe Flächen (C) und (Γ) sich längs einer Erzeugungslinie C berühren, so müssen sie den Ebenenbüschel aller Tangentenebenen gemein haben, d. h. die Centralpunkte beider Flächen auf der Berührungserzeugenden C müssen zusammenfallen und ihre Parameter müssen gleich sein. Diese Bedingung muss für alle Paare von entsprechenden Geraden C, Γ beider Flächen erfüllbar sein, wenn das Rollen und Gleiten der einen auf der andern möglich sein soll. Durch das Gleiten wird die eine Fläche so längs der Erzeugungslinie verschoben, dass die successiven Centralpunkte sich vereinigen, durch das Rollen werden die Centralebenen und folgenden Erzeugungslinien zur Coincidenz gebracht.

Der Ort der aufeinanderfolgenden Fusspunkte A_0 der kürzesten Abstände dp ist eine Curve auf der windschiefen Fläche, die Strictionslinie. Dieselbe ist im Allgemeinen schief geneigt gegen die Erzeugungslinien. Schneiden die Strictionslinien beider Flächen (C), (Γ) die Erzeugungslinien unter demselben Winkel, so ist das Gleiten Null und rollt die Fläche (Γ) blos auf der Fläche (C); sie wickelt sich auf ihr ab, ähnlich wie eine abwickelbare Fläche auf der andern.

Für abwickelbare Flächen wird der kürzeste Abstand $dp = 0$ und damit der Parameter $\varkappa = 0$. Der Centralpunkt wird der Schnittpunkt der Erzeugungslinie mit der folgenden. Da für eine Cylinderfläche der Centralpunkt im Unendlichen liegt, für eine Kegelfläche aber nicht, so können solche Flächen nicht auf einander rollen und längs der Berührungslinie gleiten.

Die vorstehenden Betrachtungen über die Tangentenebene windschiefer Flächen wurden von Chasles gegeben (Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches. (Liouville, Journal de mathém. T. II (1837), p. 413); die Anwendung auf die Flächen (C), (Γ) rührt von Bour her (Cours de Mécanique et Machines, Cinématique, p. 138).

§. 6. Die beiden auf einander folgenden Lagen des beweglichen Systems, die, aus welcher heraus und die, in welche dasselbe durch die Elementarbewegung geführt wird, geben ausser dem Complexe ersten Grades der sämmtlichen Normalen aller Bahnelemente noch zu einem Complexe zweiten Grades Veranlassung. Derselbe wird von den Tangenten der Bahnen als Complexstralen gebildet. Dieselben sind die Verbindungslinien der homologen Punkte der beiden congruenten Systeme, welche jene Lagen bilden. Um dies zu erweisen, haben wir mit Rücksicht auf Th. I, Cap. V, §. 8. nur zu zeigen, dass die sämmtlichen Stralen einer beliebigen Ebene einen Kegelschnitt, als Linie 2. Classe, umhüllen und dass die Stralen eines Punktes einen Kegel 2. Ordnung bilden. Es sei ε eine Ebene des ersten Systems, ε' die ihr homologe des zweiten und seien a, b' die beiden in ihrer Schnittlinie vereinigten, im Allgemeinen nicht homologen Geraden. Der Geraden b' in ε' ist homolog eine gewisse Gerade b in ε. Beide Geraden b, b' enthalten congruente homologe Punktreihen, liegend in ε. Die Stralen, welche deren homologe Punkte verbinden, umhüllen eine Parabel. Da ε eine beliebige Ebene ist, so ist hiemit der erste Theil des Satzes bewiesen.

Es sei ferner P ein Punkt des ersten Systems, P' der ihm homologe und seien a, b' die beiden Stralen, welche in die Linie PP' hineinfallen. Dem Strale b' des Stralenbündels P' entspricht ein Stral b von P und dem Ebenenbüschel um b' der Ebenenbüschel um b. Diese beiden Ebenenbüschel sind congruent und erzeugen daher die Schnittlinien ihrer homologen Ebenenpaare einen Kegel 2. Grades, welcher b und b' enthält und P zum Mittelpunkte hat. Jede Schnittlinie homologer Ebenen α, α' ist aber zugleich Verbindungslinie homologer Punkte. Denn als eine Linie g von α ist sie einer Linie g' von α' homolog und da g und g' sich schneiden, weil sie beide α' angehören, so entspricht ihrem Schnittpunkt G' als einem Punkt des zweiten Systems ein gewisser Punkt G des ersten, welcher, da G' auf g' liegt, auf g liegen muss. Daher ist g Verbindungslinie homologer Punkte G, G'.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass die **Richtungen der Geschwindigkeiten im beweglichen System, welche durch einen Punkt gehen, einen Kegel 2. Grades bilden und die Richtungen derselben, welche in eine Ebene fallen, eine Parabel berühren.**

Die Punkte A des Systems, deren Geschwindigkeitsrichtun-

gen durch einen Punkt P gehen, gehören einer cubischen Ellipse an. Denn dem Punkte P als einem Punkte Q' des zweiten Systems entspricht ein gewisser Punkt Q des ersten Systems, welcher ihm unendlich nah liegt und dem Stralenbündel Q' das ihm congruente Q. Die Stralen des letzteren gehen durch die Punkte A, die des ersteren durch die homologen Punkte A'. Die Tangenten AA' gehen aber alle durch $P(Q')$. Daher schneiden sich die Stralen beider Bündel in den Punkten A' oder in der Grenze in den Punkten A. Der Ort der Punkte A ist also die Curve, in welcher sich die Stralen zweier congruenter Stralenbündel schneiden, welche überhaupt einander begegnen. Diese Curve ist der Schnitt zweier Kegel zweiten Grades (denn die Complexstralen, welche durch P gehen, liegen auf einem solchen und ihm ist ein ebensolcher homolog), welche die Schnittlinie PQ gemein haben.

Sie ist vom dritten Grade, weil der Gesammtschnitt beider Kegel, der aus ihr und dieser Scheitellinie besteht, vierten Grades ist. Die Curve hat nur einen unendlich fernen Punkt. Denkt man sich nämlich mit dem Stralenbündel Q concentrisch ein anderes Q'', welches $Q'(P)$ congruent und parallel ist, so haben Q und Q'' nur einen Doppelstral. Denn hätten sie zwei solche, so hätten sie nach Cap. I. § 9. lauter Doppelstralen. Daher haben Q und Q' auch nur einen Parallelstral und mithin hat unsere Curve nur einen unendlich fernen Punkt. Eine solche heisst aber eine cubische Ellipse.

§. 7. Ein freier Punkt ist nach allen Richtungen des Raumes beweglich; eine Bedingung, welcher er unterworfen wird, beschränkt seine Beweglichkeit. Diese Bedingung kann aber so beschaffen sein, dass sie ihn auf eine bestimmte Fläche als geometrischen Ort zwingt, oder dass sie ihm zwar Beweglichkeit in einem gewissen Theile des Raumes gestattet, ihm aber versagt, in gewisse andere Theile desselben einzudringen. Bedingungen der ersten Art kann man zwingende, solche der letzteren einseitig hindernde Bedingungen nennen. Die Bedingung, dass der Punkt constante Summe seiner Abstände von zwei festen Punkten haben solle, ist eine zwingende; sie nöthigt ihn auf einem Rotationsellipsoid zu bleiben; die Bedingung, dass diese Summe kleiner als eine gegebene Grösse sein solle, hindert ihn in den Raum ausserhalb eines Rotationsellipsoids einzudringen, während sie ihm die Bewegung im Innern desselben gestattet. Wir wollen hier blos von den zwingenden Bedingungen reden und nur solche meinen, wenn wir das Wort „zwingend" nicht ausdrücklich hinzufügen.

Drei Bedingungen bestimmen die Unbeweglichkeit eines Punktes, zwei gestatten ihm Beweglichkeit auf einer Linie, eine, Beweglichkeit auf einer Fläche. Eine Gerade ist unbeweglich, wenn zwei ihrer Punkte es sind. Die Unbeweglichkeit des einen erfordert 3 Bedingungen; da der andere bereits der Bedingung genügt, constanten Abstand von jenem zu besitzen, so sind für seine Unbeweglichkeit blos noch zwei, im Ganzen also fünf Bedingungen für die Unbeweglichkeit einer Geraden in allen ihren Punkten erforderlich. Vier Bedingungen gestatten Bewegung der Geraden, so dass alle Punkte bestimmte Bahnen beschreiben, drei, dass die Punkte auf bestimmten Flächen zu bleiben genöthigt sind. Soll die Gerade nur eine feste Lage haben, in ihrer Situationslinie aber gleiten können, so fällt von den 5 Bedingungen, welche die Unbeweglichkeit ihrer Punkte bestimmen, eine hinweg und genügen 4 Bedingungen; drei Bedingungen gestatten ihr Bewegung im Raume. Sechs Bedingungen bestimmen die Unbeweglichkeit eines unveränderlichen Systems. Denn dasselbe liegt fest, sobald drei nicht in gerader Linie liegende Punkte desselben fest sind. Jeder derselben würde für sich hiezu 3, sie alle zusammen also 9 Bedingungen fordern; da aber vermöge der Unveränderlichkeit ihrer Verbindung unter einander bereits drei Bedingungen bestehen, nämlich die, dass ihre drei Abstände von einander constant bleiben, so erübrigen blos 6 Bedingungen für die Unbeweglichkeit des Systems.

Fünf Bedingungen gestatten dem System Beweglichkeit; jeder Punkt beschreibt eine bestimmte Linie. Vier Bedingungen gestatten Beweglichkeit auf unendlich viele Arten; jeder Punkt bewegt sich auf einer Fläche (gewisse Punkte beschreiben dabei immer dieselben Bahnen, wie auch die Bewegung im Uebrigen abgeändert werden möge). Drei Bedingungen gestatten Bewegung so, dass ein Punkt eine beliebige Richtung einschlagen kann (dabei sind gewisse Punkte gezwungen, auf bestimmten Flächen zu bleiben).

Man unterscheidet verschiedene Grade des Zwanges und der Freiheit für Systeme und Punkte. Ein System ohne beschränkende Bedingung für seine Beweglichkeit ist vom nullten Grade des Zwanges und vom sechsten Grade der Freiheit (absolute Freiheit); ein solches mit einer Bedingung vom 1. Grad des Zwanges und dem 5. Grade der Freiheit, bei 2 Bedingungen vom 2. Grade des Zwanges und 4. Grade der Freiheit, bei 3 Bedingungen vom 3. Grade des Zwanges und 3. Grade der Freiheit, bei 4 Bedingungen vom 4. Grade des Zwangs und 2. Graden der Freiheit, bei 5 Bedingungen vom 5. Grade des Zwanges und 1. Grade der Freiheit; bei 6 Bedingungen ist das System unfrei. Der Grad des Zwanges und der Freiheit kann dabei aber für verschiedene Punkte des Systems verschieden sein.

Die Bedingungen der Beweglichkeit für das System können ausserordentlich mannigfaltig sein, z. B. für den ersten Grad der Freiheit können gegeben sein 5 Systempunkte P_1, $P_2 \ldots . P_5$, welche auf 5 Flächen F_1, $F_2, \ldots F_5$ zu bleiben gezwungen sind. Fallen hiebei 2 Punkte P_1, P_2

in einen Punkt zusammen, welcher sich auf den beiden Flächen F_1, F_2, d. h. auf deren Durchschnittslinie bewegt, so erhält man den Fall, dass 4 Punkte gegeben sind, von denen einer auf einer Curve, die drei anderen auf drei Flächen zu bleiben genöthigt sind. Fallen noch zwei andere Punkte in einen zusammen, so ergibt sich die Bewegung, bei welcher 2 Punkte Curven beschreiben und ein dritter auf einer Fläche bleibt. Lässt man drei Punkte in einen zusammenfallen, so wird derselbe fest; er befindet sich in einem der Durchschnittspunkte dreier Flächen, man erhält die Bewegung des Systems, wobei ein Punkt ruht, 2 andere auf gegebenen Flächen bleiben. Auch können die fünf Punkte verschieden sein, aber von den 5 Flächen, auf welchen sie sich bewegen 2 oder 3, 4 oder alle 5 in eine zusammenfallen. Eine andere Reihe von Fällen erhält man durch Umkehrung des ebenerwähnten allgemeinen Falles und fernere Specialisation. Es können nämlich 5 Flächen durch 5 gegebene Punkte gehen; zwei Flächen, d. h. ihre Schnittlinie durch einen Punkt, drei andere Flächen durch drei weitere Punkte gehen u. s. f. Andere Gruppen bilden sich, wenn die Berührung von Flächen mit Flächen und Curven in Betracht gezogen wird. Aehnliches gilt für die verschiedenen Grade der Freiheit.

§. 8. Es sind 5 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 eines unveränderlichen Systems gezwungen, sich auf 5 Flächen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 zu bewegen, man soll für irgend eine Lage des Systems die Momentanaxe C, die Winkelgeschwindigkeit und Translationsgeschwindigkeit für sie finden und ferner die Normalebene der Bahn eines beliebigen Punktes, die Normale der Fläche, welche eine beliebige Systemcurve beschreibt und die Berührungslinie bestimmen, längs welcher eine Systemfläche ihre Enveloppe berührt.

Man ziehe die fünf Normalen N_i der fünf Flächen F_i in den fünf Punkten P_i und bilde die fünf möglichen Combinationen derselben zu vieren. Jede Normale N_i ist eine Gerade des Systems, welche senkrecht ist zu der Bahn eines ihrer Punkte P_i; sie ist daher senkrecht zu den Bahnen aller ihrer Punkte (§. 4, Nr. 4) und mithin ein Stral des Complexes 1. Grades, welcher durch die Elementarbewegung des Systems bestimmt ist. Jede der 5 Combinationen zu vieren wird von zwei Geraden geschnitten; es seien $(L_1 L_1')$, $(L_2 L_2')$, $(L_3 L_3')$, $(L_4 L_4')$, $(L_5 L_5')$ die diesen Combinationen zugehörigen 5 Paare Transversalen. Wählt man eine Gerade eines solchen Paares zu der einen von zwei conjugirten Rotationsaxen, z. B. L_1, so ist die zweite L_1', die andere, ihr conjugirte Rotationsaxe, weil sie die 4 Complexstralen der Combination schneiden muss. Der kürzeste Abstand d_1 beider schneidet die Centralaxe des Complexes rechtwinklig. Ebenso schneidet der kürzeste Abstand d_2 von $(L_2 L_2')$ dieselbe rechtwinklig. Daher ist der kürzeste Abstand von d_1, d_2 die Centralaxe C selbst. Das Windungsverhältniss $\frac{v_0}{\omega}$ ist gleich dem kürzesten Abstande zwischen C und L multiplicirt mit $\operatorname{tg}(CL')$.

Zieht man durch irgend einen Systempunkt M die 5 Geraden N_i, welche die 5 Geradenpaare $(L_i L_i')$ schneiden, so sind sie Complexstralen und senkrecht zu der Bahn des Punktes M. Sie fallen daher alle fünf in die Normalebene der Bahn von M und zwei von ihnen genügen, um diese Ebene zu bestimmen. Der Satz, dass fünf Gerade eines Punktes, welche fünf Paar conjugirter Geraden eines Complexes schneiden, in einer Ebene liegen, wurde zuerst von Sylvester (Comptes rendus T. 52, p. 743 (1861)) gefunden.

Um die Normale in einem Punkte M der Fläche (M) zu finden, welche eine Curve (m) des Systems beschreibt, bedenke man, dass dieselbe in der Normalebene der Curve (m) im Punkte M und in der Normalebene der Bahn des Punktes M, welche auf der Fläche (M) liegt, enthalten sein und also die Schnittlinie dieser beiden Normalebenen sein muss.

Die Curve, längs welcher eine Systemfläche ihre Enveloppe berührt, ist die Schnittlinie der Fläche mit ihrer folgenden Lage. Da die Punkte dieser Curve Bogenelemente beschreiben, welche auf der Fläche liegen, so sind sie die Fusspunkte der Normalen der Fläche, welche zwei conjugirte Gerade schneiden.

Die vorstehende Lösung der Aufgabe ist auch für die Fälle brauchbar, bei welchen ein Systempunkt eine gegebene Curve beschreibt. Man kann diese Curve als Schnitt irgend zweier Flächen ansehen, welche sich in ihr schneiden. Man kann also zwei beliebige Normalen der Curve ziehen und mit ihnen weiter construiren.

§. 9. Es sind vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 des beweglichen Systems gegeben, welche sich auf vier festen Flächen F_1, F_2, F_3, F_4 bewegen; man soll für irgend eine Lage des Systems die Normale der Fläche (M) finden, auf welcher sich ein beliebiger Systempunkt M bewegt und die sämmtlichen Momentanaxen für die möglichen Bewegungen des Systems bestimmen.

Die vier Normalen N_i der vier Flächen F_i in den vier Punkten P_i sind Gerade, welche senkrecht sind zu den Bahnen ihrer Punkte. Denkt man sich daher irgend eine der möglichen Bewegungen des Systems, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so sind sie vier Stralen des Complexes, welcher durch die Centralaxe dieser Bewegung und deren Parameter $\frac{v^0}{\omega}$ bestimmt ist. Sie sind daher gemeinschaftliche Stralen aller Complexe, deren Centralaxen den unendlich vielen verschiedenen möglichen Bewegungen des Systems entsprechen. Diese vier Geraden werden von 2 Transversalen (L, L') geschnitten, welche, wie beim vorigen Problem conjugirte Rotationsaxen sein müssen und zwar gemeinschaftlich für alle möglichen Bewegungen. Eine Gerade, welche man von M so zieht, dass sie L, L' schneidet, ist ein Complexstral für alle Complexe, mithin Normale für alle Bogenelemente, welche M beschreiben kann, d. h. Normale der Fläche (M).

Das geometrische Stralengebilde, welches aus den, zweien Complexen 1. Grades gemeinsamen Stralen besteht, heisst nach Plücker eine Congruenz. Vier Stralen bestimmen die Congruenz. Es gibt unzählige Complexe, welche die Stralen der Congruenz gemein haben. Sie alle bilden eine Gruppe, welche nach Plücker eine zweigliedrige Gruppe von Complexen heisst, indem zwei dieser Complexe genügen, um die Congruenz zu bestimmen. Die zwei Geraden, welche die vier die Congruenz bestimmenden Stralen schneiden, heissen die Directricen, ihr kürzester Abstand die Axe und die Ebene, welche diese Axe rechtwinklig halbirt, die Centralebene der Congruenz. Die Congruenz besteht aus allen Stralen, welche die Directricen schneiden. In jedem Complexe, welcher die Congruenz enthält, sind die Directricen ein Paar conjugirte Gerade. Jeder solche Complex hat eine Centralaxe und alle diese Axen bilden eine gewisse cubische geradlinige Fläche, die Axenfläche der zweigliedrigen Gruppe.

Um die Centralaxe irgend eines der Complexe zu finden, bedenken wir, dass sie den kürzesten Abstand der Directricen L, L' rechtwinklig schneidet und ihn in dem Verhältniss der Tangenten der Winkel theilt, welche sie mit den Directricen der Congruenz bildet. Beschreiben wir also um den kürzesten Abstand $AA' = 2d$ der Directricen mit beliebigem Radius einen Kreiscylinder und legen an ihn eine Tangentenebene, welche L, L' in den Punkten Q, Q' schneidet; der kürzeste Abstand CC' von AA' und QQ' wird eine Centralaxe sein. Denn projicirt man die Figur auf die Centralebene der Congruenz (Fig. 121) und bezeichnet mit kleinen Buchstaben die Projectionen der mit den entsprechenden grossen Buchstaben bezeichneten Punkte etc., so ist

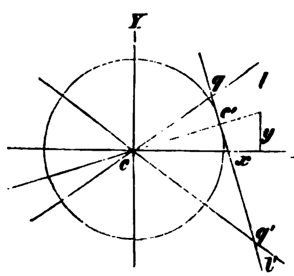

Fig. 121.

$$\frac{\operatorname{tg}(LC)}{\operatorname{tg}(CL')} = \frac{qc'}{c'q'} = \frac{AC}{CA'}.$$

Wählt man die Ebenen, welche durch die Axe der Congruenz gehen und die Winkel (LL') halbiren, zusammen mit der Centralebene zu Coordinatenebenen, so dass die Axe der Congruenz die z-Axe ist und bezeichnet mit φ den Winkel, den cc' mit der x-Axe bildet, so besteht für irgend einen Punkt (xyz) der Centralaxe CC' eines Complexes die Relation

$$\frac{AC}{CA'} = \frac{d+z}{d-z} = \frac{\operatorname{tg}(\sigma+\varphi)}{\operatorname{tg}(\sigma-\varphi)},$$

wo 2σ den Winkel (LL') bedeutet. Hieraus folgt

$$z = \frac{d}{\sin 2\sigma} \cdot \sin 2\varphi.$$

Es ist aber

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2xy}{r^2}$$

und daher die Gleichung der Fläche aller Centralaxen der Complexe

$$z(x^2+y^2) = \frac{2d}{\sin 2\sigma} \cdot xy.$$

Diese Axenfläche wurde von Plücker (Philosoph. Transact., Vol. 155, p. 756 (1865) und Neue Geometrie des Raumes, S. 97 [1868]) gefunden; ihre Bedeutung für die Mechanik bemerkte zuerst Ball (The Theory of screws, a geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a rigid body. Transact. of the R. Irish Academy, Vol. XXV (Science), p. 157 (1871) und: Theory of screws; a study in dynamics of a rigid body. Dublin 1876). Ball nennt sie nach Cayley's Vorschlag „Cylindroid".

Als Lösung der Aufgabe erhalten wir also das Resultat:

Ein System, von welchem vier Punkte auf vier gegebene Flächen gezwungen sind, kann sich nur so bewegen, dass die Normalen der Bahnen aller Systempunkte zwei Gerade schneiden. Die Punkte des Systems bewegen sich auf Flächen mit Ausnahme der Punkte dieser beiden Geraden, welche immer dieselben Linienelemente beschreiben, wie auch im Uebrigen die Elementarbewegung des Systems beschaffen sein mag. (Denn jede von ihnen rotirt um die andere.) Die Momentanaxen für alle möglichen Elementarbewegungen erfüllen ein Cylindroid, die Axenfläche der Congruenz, welche durch die Normalen der vier gegebenen Flächen bestimmt ist und deren Directricen die beiden diese vier Normalen schneidenden Geraden sind.

Die Lösung der Aufgabe genügt auch für die Fälle, dass ein Punkt auf einer Curve und zwei Punkte auf Flächen, oder zwei Punkte auf Curven laufen, welche man durch das Zusammenfallen von je zwei Punkten von den vier gegebenen Punkten erhält.

§. 10. Wenn drei Punkte P_1, P_2, P_3 des beweglichen Systems sich auf drei gegebenen Flächen F_1, F_2, F_3 bewegen, so kann im Allgemeinen jeder Punkt des Systems sich nach jeder Richtung des Raumes bewegen. Denn erst durch das Hinzufügen einer vierten Bedingung wird er auf eine bestimmte Fläche genöthigt. Die drei Normalen N_1, N_2, N_3 der drei Flächen in den Punkten P_1, P_2, P_3 sind gemeinschaftliche Stralen aller Complexe, deren Centralaxen Momentanaxen der verschiedenen möglichen Bewegungen des Systems sind. Würden wir eine vierte Bedingung zufügen, indem wir einen vierten Punkt auf eine Fläche nöthigten, so erhielten wir eine Congruenz, welcher die vier Flächennormalen angehörten; die Directricen derselben wären conjugirte Rotationsaxen und schnitten alle vier. Da wir die vierte Bedingung beliebig modificiren können, so erhalten wir unzählige Congruenzen, deren Directricen alle die drei Normalen N_1, N_2, N_3 schneiden. Hieraus folgt, dass jedes Paar Erzeugungslinien L, L' des durch die drei Normalen N bestimmten einfachen Hyperboloids, welche nicht zu derselben Schaar, wie die N gehören, conjugirte Axen für die möglichen Bewegungen des Systems sind. Dies Hyperboloid gehört daher den sämmtlichen Complexen an, welche den möglichen Bewegungen zugehören. Drei solche Complexe bestimmen aber das Hyperboloid. Denn drei der Complexe, Ω_1, Ω_2, Ω_3 bestimmen zu zweien drei Congruenzen Σ_{12}, Σ_{23}, Σ_{31} mit drei Paar Directricen (L_1, L_1'), (L_2, L_2'), (L_3, L_3'). Diese sechs Directricen schneiden die gemeinsamen Stralen aller drei Complexe, insbesondere also drei von ihnen, z. B. L_1, L_2, L_3; daher bilden die gemeinsamen Stralen der drei Complexe die eine Schaar eines Hyperboloids, zu dessen anderer Schaar die Directricen L gehören. Plücker nennt die Gesammtheit aller Complexe, welche die Stralen einer Schaar eines Hyperboloids gemein haben, eine dreigliedrige Gruppe von Complexen, das Hyperboloid, ihre gemeinsame Linienfläche, wird auch ihr Regulus genannt.

Ein beliebiger Punkt des Systems kann jede beliebige Bewegungsrichtung haben, nur die Punkte des Hyperboloids sind genöthigt auf bestimmten Flächen zu bleiben. Denn jede Gerade, welche durch einen Systempunkt hindurchgehend, zwei Directricen schneidet, ist eine Normale einer der für ihn möglichen Bewegungsrichtungen. Liegt er aber auf dem Hyperboloid, so kann man durch ihn nur eine Gerade ziehen, welche irgend zwei der Directricen schneidet, weil diese Directricen die eine Schaar Geraden des Hyperboloids bilden, daher gibt es für alle seine Bewegungsrichtungen nur eine, allen gemeinsame Normale, mithin kann es sich nur auf einer Fläche bewegen.

Die Momentanaxen aller möglichen Bewegungen des Systems bilden eine Doppelschaar von Cylindroiden, von denen jedes über zwei Erzeugungslinien des Hyperboloids, welche der Schaar der L angehören, construirt werden kann.

§. 11. Sind zwei Punkte P_1, P_2 gegeben, welche auf zwei gegebenen Flächen F_1, F_2 zu bleiben genöthigt sind, so sind die Normalen N_1, N_2

dieser Flächen in P_1, P_2 Gerade, deren Punkte sich senkrecht zu ihnen bewegen. Eine dritte Bedingung lieferte ein Hyperboloid, dessen Erzeugungslinien, welche N_1, N_2 schneiden, paarweise conjugirte Rotationsaxen sein könnten für die dann möglichen Bewegungen. Da diese dritte Bedingung willkürlich ist, so ist es auch das Hyperboloid und sind je zwei Gerade, welche N_1, N_2 schneiden, conjugirte Axen. Alle conjugirten Axen bilden daher eine Congruenz, deren Directricen N_1, N_2 sind. Die Momentanaxen erfüllen eine vierfache Schaar von Cylindroiden.

Ist endlich nur ein Punkt P_1 genöthigt auf einer Fläche F_1 zu bleiben, so wird von der Congruenz des eben behandelten Falles die Directrix N_2 unbestimmt und können also je zwei Gerade L, L', welche die Normale von F_1 in P_1 schneiden, als conjugirte Rotationsaxen für eine mögliche Bewegung des Systems gewählt werden. Alle diese Geraden bilden einen Complex, indess einen speciellen, nämlich einen solchen der aus allen Geraden besteht, welche eine gegebene Gerade schneiden (im Endlichen oder im Unendlichen).

Aus dem Gange der Entwicklungen der §§. 8 u. ffg. ersieht man, wenn man ihn umgekehrt geht, dass eine der obigen Bedingungen für die Bewegungen des Systems die wählbaren Paare conjugirter Axen auf die Geraden eines Complexes beschränkt, zwei Bedingungen auf die Stralen einer Congruenz, drei auf die eine Schaar Erzeugungslinien eines Hyperboloids, d. h. auf die conjugirten Geraden einer dreigliedrigen Gruppe von Complexen, vier auf die conjugirten Geraden einer zweigliedrigen Gruppe von Complexen, fünf auf die conjugirten Geraden eines einzigen Complexes.

Die Untersuchungen über die Bewegung unveränderlicher Systeme unter Bedingungen, welche die Beweglichkeit einzelner Punkte beschränken, verdankt man Mannheim, dessen Arbeiten über diesen Gegenstand grundlegend sind. Seine Hauptschrift ist: Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales. (Mém. des Savans étrangers, T. XX, p. 1, oder Journal de l'Ecole polytéchn. Cah. XLIII, pp. 57—121.) Sie rührt aus dem Jahre 1869 her; sie benutzt noch nicht formell die Theorie der Complexe und Congruenzen. Eine vollständige Theorie, welche zeigt, dass jede Bedingung, welche die Bewegung des Systems beschränkt, durch einen Complex ausgedrückt werden kann, gab zuerst Somoff (Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable, assujetties à des équations de conditions quelconques de forme linéaire. (Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St. Pétersburg, 4/16. Avril 1872 und: Theoret. Mechanik, übers. von A. Ziwet, I. Theil, Cap. XVI, p. 371.) Eine „Zusammenstellung der Sätze von den übrigbleibenden Bewegungen eines Körpers, der in einigen Punkten seiner Oberfläche durch normale Stützen unterstützt wird, etc.“ gab Okatow

(Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XVIII, p. 224 (1873)). Die oben erwähnten Arbeiten von Ball sind von ganz besonderer Bedeutung, wir werden aber zweckmässig erst später, bei Gelegenheit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, auf sie näher eingehen.

§. 12. Beispiele zur weiteren Ausführung.

1. Ein unveränderliches System bewegt sich so, dass ein Punkt desselben eine feste Curve doppelter Krümmung beschreibt, eine Gerade dieses Punktes fortwährend Tangente an dieselbe und eine durch sie gehende Ebene Schmiegungsebene bleibt. Unter den fünf Bedingungen der Bewegung ist eine doppelte; der Punkt, welcher die Curve beschreibt, vertritt die Stelle von zwei Punkten, welche sich auf zwei Flächen bewegen, deren Schnittlinie die Curve ist. Zerlegt man die Elementarbewegung in eine Translation gleich dem Bogenelemente der Curve und eine Rotation um eine durch den Endpunkt des Bogenelementes gehende Axe, so sieht man leicht, dass die Ebene parallel den beiden auf einander folgenden Hauptnormalen senkrecht zur Momentanaxe sein muss und dass diese also die rectificirende Gerade ist, welche senkrecht auf dieser Ebene steht (Ebene der ganzen Krümmung). Die Translation der Elementarbewegung ist daher die Projection des Bogenelementes auf die rectificirende Gerade und die Amplitude der Winkel zweier Hauptnormalen (Winkel der ganzen Krümmung). Die Momentanaxe fällt in die rectificirende Ebene (Ebene der Tangente und Binormalen) und bildet mit der Tangente einen Winkel, dessen Tangente $\frac{r}{\varrho}$ ist, wo ϱ und r den Krümmungs- und Schmiegungshalbmesser der Curve bedeuten*). Die Charakteristik und der Pol der Schmiegungsebene sind die Tangente und die Krümmungsaxe mit den Amplituden $d\sigma$ und $d\tau$, nämlich dem Contingenzwinkel und dem Schmiegungswinkel. Die Momentanaxe ist die Axe einer Cylinderschraubenlinie, welche sich der Curve so innig als möglich anschmiegt.

2. Eine Curve doppelter Krümmung K' rollt auf einer andern K so, dass die Schmiegungsebenen beider fortwährend zusammenfallen. Dies Rollen ist auf zwei Arten möglich, nämlich so, dass die Krümmungskreise der Curven auf entgegengesetzte Seiten oder auf dieselbe Seite der Tangente fallen. Sind $d\tau$, $d\tau'$ die Contingenzwinkel, $d\sigma$, $d\sigma'$ die Schmiegungswinkel der Curven, so ist die Rotationscomponente um die Binormale $d\tau \pm d\tau'$, um die Tangente $d\sigma \pm d\sigma'$ und mithin um die Momentanaxe, welche in

*) Vgl. meine Schrift: Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, in rein geometrischer Darstellung. Leipzig, B. G. Teubner, 1859, S. 82, sowie S. 21 u. 51.

die rectificirende Ebene fällt, $[(d\tau \pm d\tau')^2 + (d\sigma \pm d\sigma')^2]^{\frac{1}{2}}$. Die Tangente der Neigung dieser Axe gegen die Tangente ist $\dfrac{d\tau \pm d\tau'}{d\sigma \pm d\sigma'}$.

3. Ein System bewegt sich so, dass drei zu einander rechtwinklige Ebenen fortwährend ein festes Ellipsoid berühren.

4. Ein System bewegt sich so, dass drei bestimmte Punkte einer seiner Geraden sich auf drei festen Ebenen bewegen.

§. 13. Ausser der Geschwindigkeit der Systempunkte, welche mit Hülfe der Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe und der Translationsgeschwindigkeit v_0 parallel zu ihr dargestellt wird, kommt die **Wechselgeschwindigkeit** der Momentanaxe in Betracht. Statt der unendlich vielen Momentanaxen, welche die Fläche (C) bilden, kann man sich eine einzige bewegliche denken, welche im Laufe der Bewegung nach und nach die Lage aller einnimmt. Der Uebergang dieser Axe aus der, der Zeit t entsprechenden Lage C in die Lage C', welche der Zeit $t+dt$ entspricht, erfolgt selbst wieder durch eine (ideelle) Schraubenbewegung, deren Axe die Linie des kürzesten Abstandes von C und C' ist, nämlich eine Translation in der Richtung des kürzesten Abstandes um die Länge de desselben und eine Rotation um dieselbe von der Amplitude, gleich dem Winkel $d\sigma$, welchen C und C' bilden. Die Wechselgeschwindigkeit hat daher die Componenten

$$u = \frac{de}{dt}, \quad \psi = \frac{d\sigma}{dt},$$

von denen die erstere, die Translationsgeschwindigkeit, auch die **Orthogonalgeschwindigkeit** des Systems genannt wird.

§. 14. Zur analytischen Behandlung von Problemen der Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems bedient man sich eines dem absoluten Raume angehörigen Coordinatensystems der x, y, z und eines beweglichen, mit dem System fest verbundenen der x', y', z'.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprunges, so werden:

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + \xi, & \xi &= ax' + a'y' + a''z', & x' &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, & \xi &= x - x_1\\
y &= y_1 + \eta, & \eta &= bx' + b'y' + b''z', & y' &= a'\,\xi + b'\,\eta + c'\,\zeta, & \eta &= y - y_1\\
z &= z_1 + \zeta, & \zeta &= cx' + c'y' + c''z', & z' &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, & \zeta &= z - z_1,
\end{aligned}$$

wo ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes (x, y, z) in Bezug auf ein drittes, dem festen paralleles Coordinatensystem bedeuten, welches mit dem beweglichen den Ursprung gemein hat. Alles was Cap. VI, §§. 7. 8. 9. entwickelt wurde, gilt auch hier in Bezug auf die Coordinaten $\xi, \eta, \zeta, x', y', z'$, wenn ξ, η, ζ an die Stelle der dortigen x, y, z treten.

Die Differentiation dieser Gleichungen führt zur Kenntniss der Geschwindigkeiten. Nach §. 2. kann die Bewegung des Systems zerlegt werden in die Translationsbewegung, welche durch die Bewegung eines

Systempunktes angegeben wird und die Rotation um eine durch diesen Punkt gehende, zur Momentanaxe parallele Gerade. Diesen Systempunkt wählt man zum Ursprung O' des beweglichen Coordinatensystems der x', y', z' und zugleich zu dem der ξ, η, ζ. Die Geschwindigkeit irgend eines Systempunktes kann dann dargestellt werden durch die geometrische Summe der Geschwindigkeit des Punktes O' und der Geschwindigkeit, welche der Punkt durch die Winkelgeschwindigkeit ω um die zur Momentanaxe parallele Axe des Punktes O' erlangt. Die Untersuchungen des Cap. VI, §. 8. bestehen daher ungeändert auch hier, nur treten zu den Componenten der Geschwindigkeit dortselbst hier noch die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes O' hinzu.

§. 15. Um die relative Bewegung eines Punktes P in einem in Bewegung begriffenen unveränderlichen System Σ zu untersuchen, ertheilen wir ähnlich, wie in Cap. V in Bezug auf die relative Bewegung in der Ebene geschah, Punkt und System zusammen die entgegengesetzte Bewegung des Systems. Das System kommt dadurch zur Ruhe, die relative Bewegung des Punktes in ihm wird auf eine absolute reducirt und erscheint als die Resultante aus seiner absoluten Bewegung und der Bewegung des Systempunktes, der mit ihm zusammenfällt. Dieser Systempunkt wechselt von Moment zu Moment. In Folge dessen ist auch die relative Geschwindigkeit eines Punktes P in Bezug auf Σ die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit desselben und der entgegengesetzten Geschwindigkeit des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes.

Je nachdem die Elementarbewegung in jedem Momente eine Translation oder eine Rotation oder eine Schraubenbewegung ist, ergibt sich die relative Geschwindigkeit eines Punktes mehr oder weniger einfach.

Die analytische Behandlung des Problems der relativen Bewegung eines Punktes P kommt auf das Problem der Coordinatentransformation zurück. Die Coordinaten von P in Bezug auf ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem seien x, y, z; in Bezug auf ein dem System angehöriges zweites rechtwinkliges System seien sie x', y', z'. Beiderlei Coordinaten sind Functionen der Zeit t. Die Coordinaten des zur Zeit t mit P zusammenfallenden Systempunktes sind ebenfalls x', y', z', hängen aber nicht von t ab, weil dieser Punkt als dem System angehörig, seine Lage im System mit der Zeit nicht wechselt.

1. Hat das System blos eine Translationsbewegung, so bewegen sich die Axen der x', y', z' mit sich parallel und wenn man die festen Axen der x, y, z dieser Richtung gleichfalls parallel wählt und die Coordinaten des beweglichen Ursprungs mit x_1, y_1, z_1 bezeichnet, so bestehen zwischen den beiderlei Coordinaten die Gleichungen

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1, \quad z' = z - z_1,$$

welche die relativen Coordinaten x', y', z' von P durch die absoluten und die Coordinaten des beweglichen Ursprungs darstellen.

2. Hat das System eine Rotation um einen festen Punkt O, so hat man, indem man diesen sowohl zum Ursprung des festen Coordinatensystems der x, y, z als auch zu dem des beweglichen der x', y', z' wählt und die Richtungscosinusse der beweglichen Axen der x', y', z' gegen die festen resp. mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' bezeichnet, zwischen den absoluten Coordinaten x, y, z des Punktes P und seinen relativen x', y', z' die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
x = ax' + a'y' + a''z', & x' = a\,x + b\,y + c\,z, \\
y = bx' + b'y' + b''z', & y' = a'x + b'y + c'z, \\
z = cx' + c'y' + c''z'; & z' = a''x + b''y + c''z; \\
a^2 + b^2 + c^2 = 1, & a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\
a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\
a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \\
aa' + bb' + cc' = 0, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\
a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, & bc + b'c' + b''c'' = 0, \\
a''a + b''b + c''c = 0; & ca + c'a' + c''a'' = 0.
\end{array}$$

3. Im allgemeinsten Falle der Bewegung des Systems seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs und nehme man ein Coordinatensystem der ξ, η, ζ zu Hülfe, dessen Ursprung mit dem beweglichen Ursprung zusammenfällt, dessen Axen aber während der Bewegung mit den Axen der absoluten Coordinaten x, y, z fortwährend parallel bleiben. Man hat dann zwischen den absoluten Coordinaten x, y, z des Punktes P, dessen relativen x', y', z', den Coordinaten x_1, y_1, z_1 des beweglichen Ursprungs und den Hülfscoordinaten ξ, η, ζ von P die Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
x' = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, & \xi = x - x_1, \\
y' = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, & \eta = y - y_1, \\
z' = a''\xi + b''\eta + c''\zeta; & \zeta = z - z_1.
\end{array}$$

Die Differentiation der betreffenden Ausdrücke liefert in den drei Fällen die Componenten $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ der relativen Geschwindigkeit des Punktes P, nämlich im Falle 1):

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt},$$

im Falle 2):

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a\,\frac{dx}{dt} + b\,\frac{dy}{dt} + c\,\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\,\frac{da}{dt} + y\,\frac{db}{dt} + z\,\frac{dc}{dt}\right),$$
$$\frac{dy'}{dt} = \left(a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\,\frac{da'}{dt} + y\,\frac{db'}{dt} + z\,\frac{dc'}{dt}\right),$$
$$\frac{dz'}{dt} = \left(a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}\right) + \left(x\,\frac{da''}{dt} + y\,\frac{db''}{dt} + z\,\frac{dc''}{dt}\right).$$

Die Glieder, welche in den Klammern der ersten Verticalreihe stehen, stellen die Projectionssumme der absoluten Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ auf die beweglichen Axen der x', y', z', d. h. die Componenten der absoluten Geschwindigkeit von P parallel den beweglichen Axen dar. Die Glieder der zweiten Verticalreihe stellen, wie leicht gezeigt werden kann, die Componenten der Geschwindigkeit des mit P zusammenfallenden Systempunktes parallel den beweglichen Axen im umgekehrten Sinne genommen dar. Man gestaltet sie nämlich mit Hülfe der Gleichungen

$$x = ax' + a'y' + a''z', \quad a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} = 0,$$

$$y = bx' + b'y' + b''z', \quad a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt} = 0,$$

$$z = cx' + c'y' + c''z', \quad a''\frac{da''}{dt} + b''\frac{db''}{dt} + c''\frac{dc''}{dt} = 0,$$

$$a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt} = -\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right) = -r$$

$$a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt} = -\left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right) = -p$$

$$a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right) = -q$$

leicht so um, dass sie die Form annehmen:

$$\begin{array}{l} ry' - qz' \\ pz' - rx' \\ qx' - py'. \end{array}$$

Für den Systempunkt, welcher zur Zeit t mit dem Punkte $P(x, y, z)$ zusammenfällt, sind x', y', z' nach t constant, daher erhält man für ihn die Componenten der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ parallel den unbeweglichen Axen durch Differentiation der Gleichungen $x = ax' + a'y' + a''z'$, etc., indem man blos a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' als veränderlich ansieht, nämlich

$$x'\frac{da}{dt} + y'\frac{da'}{dt} + z'\frac{da''}{dt},$$

$$x'\frac{db}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{db''}{dt},$$

$$x'\frac{dc}{dt} + y'\frac{dc'}{dt} + z'\frac{dc''}{dt}.$$

Indem man diese Componenten auf die beweglichen Axen projicirt, d. h.

sie resp. mit a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' multiplicirt und addirt, erhält man nach Abkürzung mit Hülfe der Nebenrelationen die Ausdrücke

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx',$$

welches die vorhin entwickelten Grössen mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen sind.

Im Falle 3) hat man

$$\frac{dx'}{dt} = \left(a\,\frac{d\xi}{dt} + b\,\frac{d\eta}{dt} + c\,\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\xi\,\frac{da}{dt} + \eta\,\frac{db}{dt} + \zeta\,\frac{dc}{dt}\right),$$

$$\frac{dy'}{dt} = \left(a'\,\frac{d\xi}{dt} + b'\,\frac{d\eta}{dt} + c'\,\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\xi\,\frac{da'}{dt} + \eta\,\frac{db'}{dt} + \zeta\,\frac{dc'}{dt}\right),$$

$$\frac{dz'}{dt} = \left(a''\frac{d\xi}{dt} + b''\frac{d\eta}{dt} + c''\,\frac{d\zeta}{dt}\right) + \left(\xi\,\frac{da''}{dt} + \eta\,\frac{db''}{dt} + \zeta\,\frac{dc''}{dt}\right),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx_1}{dt},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}.$$

§. 16. Die relative Elementarbewegung eines Systems Σ_1 in einem andern Systeme Σ_2 erhält man, indem man dem Systeme Σ_1 zu seiner absoluten Elementarschraubenbewegung die entgegengesetzte absolute Elementarbewegung des Systems Σ_2 um dessen Momentanaxe ertheilt; die Elementarschraubenbewegung, welche aus der Vereinigung beider resultirt, ist die gesuchte relative Elementarschraubenbewegung von Σ_1 in Σ_2, ihre Axe die relative Momentanaxe C' und der Ort (C') aller relativen Momentanaxen eine gewisse relative Fläche (C') im System Σ_2, welches für die relative Bewegung von Σ_1 als ruhend anzusehen ist.

Mit der relativen Momentanaxe C' fällt eine gewisse Gerade Γ' von Σ_1 zusammen und sämmtliche Geraden dieser Art bilden eine gewisse Fläche (Γ') in Σ_1, welche über die Fläche (C') rollt und gleitet, um die relative Bewegung von Σ_1 gegen Σ_2 wie eine absolute zu bestimmen. Aus den absoluten Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 und den absoluten Translationsgeschwindigkeiten v_1, v_2 der Systeme Σ_1, Σ_2 mit den absoluten Momentanaxen C_1, C_2 lässt sich nach dem Gesagten die relative Winkelgeschwindigkeit ω' und die relative Translationsgeschwindigkeit v_1' mit der relativen Momentanaxe (C', Γ') von Σ_1 und ebenso auch die relative Winkelgeschwindigkeit ω'' und Translationsgeschwindigkeit v'' mit der relativen Momentanaxe (C'', Γ'') von Σ_2 finden. Die beiden Flächen (C'), (Γ') haben aber eine doppelte Bedeutung. Während nemlich für die relative Bewegung von Σ_1 in Σ_2 die Fläche (C') ruht und (Γ') sich über sie hinbewegt, ruht für die relative Bewegung von Σ_2 in Σ_1 die Fläche (Γ') und bewegt sich (C') über sie hin, d. h. es fällt (C'') mit (Γ') und (C') mit (Γ'') zusammen und findet im letzteren Falle Rollen und Gleiten im umgekehrten Sinne statt, wie im ersten Falle. Denn es liefern ω_1, v_1 in Verbindung mit $-\omega_2$, $-v_2$ die Momentanaxe C' mit $\omega' = [\omega_1] - [\omega_2]$, $v' = [v_1] - [v_2]$ als Geschwindigkeitscomponenten der Elementarbewegung um sie; andererseits aber ist für die Momentanaxe C'' ebenso $\omega'' = [\omega_2] - [\omega_1]$ und $v'' = [v_2] - [v_1]$. Es ist daher $[\omega''] = -[\omega']$ und $[v''] = -[v']$. Zugleich wird der kürzeste Abstand $C_1 C_2$ durch C' und der kürzeste Abstand $C_2 C_1$ durch C'' nach dem Verhältniss $-\frac{[\omega_1]}{[\omega_2]}$, resp. $-\frac{[\omega_2]}{[\omega_1]}$ getheilt, so dass C'' mit C' zusammenfällt.

§. 17. Beispiele.

1. **Zwei unveränderliche Systeme Σ_1, Σ_2 rotiren mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 um zwei Axen C_1, C_2, welche sich in einem Punkte O unter dem Winkel α schneiden; man soll die relativen Momentanaxen und ihre Winkelgeschwindigkeiten, die Lage dieser Axen und die relativen Flächen (C'), (Γ') bestimmen, für den Fall, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 : \omega_2$ während der Bewegung constant bleibt.**

Trägt man ω_1 auf C_1, $-\omega_2$ auf C_2 nach Grösse und Richtung von O aus auf, so stellt die Diagonale des über ihnen construirten Parallelogramms die relative Momentanaxe C' von Σ_1 in Σ_2 nebst ihrer Winkelgeschwindigkeit ω', letztere zugleich nach Grösse und Sinn dar. Diese Axe fällt in den Nebenwinkel von α und theilt diesen Winkel so, dass

$$\frac{\sin (C' C_1)}{\omega_2} = \frac{\sin (C' C_2)}{\omega_1} = \frac{\sin \alpha}{\omega'}, \quad \omega'^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1 \omega_2 \cos \alpha.$$

Bleibt das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 während der Bewegung constant, so behält auch die relative Momentanaxe C' dieselbe Lage gegen C_1, C_2 bei und ist daher der Ort aller Geraden Γ' von Σ_1, welche nach und nach in C' eintreten, ein Rotationskegel um C_1. Aehnliches gilt von der relativen Bewegung von Σ_2 in Σ_1. Der Ort der Momentanaxen im System Σ_2 bildet einen Rotationskegel um C_2, welcher den ebengenannten Kegel fortwährend längs der Geraden C' berührt. Die Kegel berühren sich auf entgegengesetzten Seiten oder auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangentenebene, je nachdem C' mit beiden Axen $C_1 C_2$ spitze Winkel oder mit der einen einen spitzen, mit der andern einen stumpfen Winkel bildet; bildet sie mit einer dieser Axen einen rechten Winkel, so geht der eine Kegel in eine Ebene über.

2. **Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass die Axen C_1, C_2 sich im kürzesten Abstande a von einander unter dem Winkel α kreuzen.** Wir tragen ω_1, ω_2 auf C_1, C_2 von den Fusspunkten A_1, A_2 des kürzesten Abstandes $A_1 A_2$ nach Grösse und Sinn auf. Um die relative Momentanaxe C' von Σ_1 in Σ_2 und ihre Winkelgeschwindigkeit ω' zu finden, haben wir ω_1 auf C_1 mit $-\omega_2$ auf C_2 zu verbinden.

Nach Cap. II, §. 15 (S. 168, u.) u. Cap. III, §. 26 theilt C' den kürzesten Abstand $A_1 A_2$ in C' so, dass

$$\frac{A_1 C'}{C' A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\omega_2 + \omega_1 \cos \alpha}{\omega_1 - \omega_2 \cos \alpha},$$

indem der dortige Winkel $ab = \pi - \alpha$ und die dortigen $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1$, $\frac{d\vartheta'}{dt} = -\omega_2$ sind. Die Winkel, welche C' mit C_1 und C_2 bildet und die Winkelgeschwindigkeit ω um C' folgen den Gleichungen

$$\frac{\sin C_1 C'}{-\omega_2} = \frac{\sin C' C_2}{\omega_1} = \frac{\sin \alpha}{\omega}, \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha$$

und die Translationsgeschwindigkeit τ der Momentanaxe wird

$$\tau = \frac{a\,\omega_1 \omega_2}{\omega} \sin \alpha .$$

Für rechtwinklige Kreuzung ist

$$\frac{A_1 C'}{C' A_2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 .$$

Bleibt während der ganzen Dauer der Bewegung das Verhältniss $\omega_1 : \omega_2$ der Winkelgeschwindigkeiten der Systeme um die absoluten Axen C_1, C_2 constant, so geht die Momentanaxe fortwährend durch denselben Punkt des kürzesten Abstandes und bleiben ihre Neigungen gegen die Axen C_1, C_2 gleichfalls dieselben; der Ort der Geraden im System Σ_1, welche nach und nach in die Momentanaxe eintreten, ist daher ein einfaches Rotationshyperboloid um die Axe C_1, dessen Kehlkreis den Radius $A_1 C'$ hat. Ebenso ist der entsprechende Ort für die relative Bewegung des Systemes Σ_2 in Bezug auf Σ_1 ein einfaches Rotationshyperboloid um die Axe C_2 mit dem Kehlradius $A_2 C'$. Diese zweite Fläche ist zugleich der Ort der relativen Momentanaxen für die relative Bewegung des Systems Σ_1, auf welchem das erste Hyperboloid rollt und gleitet, und die erste Fläche spielt dieselbe Rolle bezüglich der relativen Bewegung von Σ_2 in Bezug auf Σ_1. Beide Hyperboloide berühren sich während der Bewegung der Systeme beständig längs einer Erzeugungslinie.

Die vorstehenden Aufgaben nebst der zugehörigen in Cap. V, §. 9 sind von Wichtigkeit für die Theorie der Zahneingriffe cylindrischer, conischer und hyperboloidischer Räder. (Vgl. hierüber z. B. Belanger, Traité de cinématique S. 94, 129 u. 144 u. folg., sowie die Abhandlungen von Pützer: „Ueber den spiraloidischen Zahneingriff" in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Bd. IV. (1860), S. 231 u. 251 und Keller: „Beitrag zur Theorie der Bewegungsübertragung zwischen beliebig im Raum liegenden Axen." Ebend. Bd. XIV (1870).)

§. 18. Zwei unveränderliche Systeme, welche sich zugleich bewegen, werden, rein geometrisch aufgefasst, im Allgemeinen ineinander eindringen, so dass Punkte und Theile des einen zwischen Theile des andern gelangen, über diese hinweggehen, etc. Von den vielen Möglichkeiten, welche in dieser Hinsicht stattfinden können, wollen wir hier blos die für die relative Bewegung wichtige Betrachtung, dass zwei Flächen der Systeme fortwährend in Berührung bleiben, behandeln. Diese Flächen sind in der Regel die Oberflächen der physischen Körper, welche in den Anwendungen die unveränderlichen Systeme oder wenigstens Theile von ihnen repräsentiren.

Hinsichtlich der Berührung zweier Flächen, d. h. wenn dieselben gemeinschaftliche Tangentenebene und Normale und den Berührungspunkt der ersteren zum gemeinsamen Doppelpunkt ihrer Schnittcurven besitzen, sind insbesondere folgende Fälle hervorzuheben:

a. Die Berührung findet blos in einem einzigen Punkte statt, welcher während der Bewegung für beide Flächen nicht wechselt.

b. Die Berührung findet in einem einzigen Punkte statt, welcher zwar auf der einen Fläche immer derselbe bleibt, auf der anderen aber continuirlich wechselt (eine springende Bewegung ist ausgeschlossen), so dass die verschiedenen Punkte einer Curve der zweiten Fläche nach und nach mit demselben Punkte der ersten Fläche zur Berührung kommen. In diesem Falle gleitet jede Fläche an der andern hin.

c. Die Berührung findet in einem Punkte statt, welcher auf beiden Flächen continuirlich wechselt, so dass es auf jeder Fläche eine Curve gibt, deren Punkte nach und nach mit den Punkten der andern zur Berührung kommen. Die Tangenten dieser Curven in jedem Berührungspunkte der Flächen liegen in der gemeinsamen Tangentenebene der Flächen. Fallen sie zusammen und sind die vom Berührungspunkte auf beiden Curven durchlaufenen Bogen gleich, so findet Rollen der Flächen auf einander statt; sind diese Bogenlängen ungleich, Rollen und Gleiten. Schneidet die eine Tangente die andere, so gleiten die Flächen an einander. Der Fall b. ist alsdann eine Specialität dieses Falles, welche eintritt, wenn die eine Curve sich auf einen Punkt reducirt. Der Winkel der Tangenten kann während der Bewegung veränderlich sein und hie und da momentan zu Null werden, so dass ein Uebergang vom Gleiten ins Rollen und umgekehrt nicht ausgeschlossen ist.

d. Die Berührung findet in mehreren Punkten statt.

e. Die Flächen berühren sich in allen Punkten einer Linie.

f. Sie berühren sich mit allen ihren Punkten. In diesem Falle ist die Bewegung eine schleifende. Sie findet statt, wenn eine Ebene auf einer Ebene, eine Kugelfläche oder eine Schraubenfläche auf einer ihr congruenten Kugelfläche oder Schraubenfläche fortrückt.

Wir wollen sehen, wie diese Fälle in Folge der relativen Elementarbewegung zweier Systeme Σ_1, Σ_2 zu Stande kommen. Es seien S', S'' die beiden sich fortwährend berührenden Flächen. Es genügt, die relative Bewegung der einen Fläche gegen die andere zu untersuchen und reduciren wir die relative Bewegung von Σ_1 gegen Σ_2 auf eine absolute, indem wir Σ_1 zu seiner absoluten Bewegung die umgekehrte von Σ_2 zufügen und Σ_2 nebst der Fläche S'' ruhend, Σ_1 mit S' in Bewegung begriffen denken. Es sei C' die Momentanaxe dieser Bewegung von Σ_1, $d\vartheta$ und $d\tau$ seien die Elementaramplitude und Elementartranslation für irgend eine Lage von Σ_1, B einer der Berührungspunkte der Flächen S', S'' und BP sein Abstand von C'. Wir ersetzen die Elementarrotation um C' durch eine ihr gleiche um die durch B gehende, zu C' parallele Axe c' und fügen die hieraus entspringende Translation $r\,d\vartheta$, welche rechtwinklig zur Ebene $(C'c')$ ist, hinzu;

sie setzt sich mit $d\tau$ zu der resultirenden Translation $du = \sqrt{d\tau^2 + r^2 d\vartheta^2}$ zusammen, so dass $d\vartheta$ um c' und du die gesammte Elementarbewegung von Σ_1 darstellen. Im Berührungspunkt B haben nun die Flächen S', S'' ein Element in der Tangentenebene gemein. Damit dieselben nach Ausführung der Elementarbewegung sich in einem folgenden, dem Punkte B unendlich-nahen Punkte von Neuem berühren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Translation du der gemeinschaftlichen Tangentenebene in B parallel sei. In allen Fällen, in welchen $d\vartheta = 0$ ist, findet Gleiten der Flächen auf einander statt. Die Flächen berühren sich mit anderen und anderen Punkten, deren Tangentenebenen also jedesmal zusammenfallen; es geschieht dies aber allein in Folge einer Translation du. Ist die Translation $du = 0$, ohne dass $d\vartheta$ um c' verschwindet, so muss $d\tau = 0$ und $r = 0$ sein; es geht mithin die Momentanaxe C' durch den Punkt B. Durch Rotation um sie gelangen zwei folgende Punkte der Flächen zur Berührung in einem gemeinsamen Punkte B' und wenn jetzt wiederum die Translation Null ist, so rotirt das System um eine durch B' gehende Momentanaxe u. s. f. In allen solchen Fällen findet ein Rollen der Flächen auf einander ohne Gleiten statt. Es ist hiebei nicht nöthig, dass die Axen c' in die Tangentenebenen der Punkte B, B_1 fallen; findet dies nicht statt, so kann man die Rotation $d\vartheta$ um c' in zwei Componenten zerlegen, deren Axen in die gemeinschaftliche Normale und die Tangentenebene fallen. Die erstere dreht die Tangentenebene von S' in der Tangentenebene von S'', die zweite hebt sie aus dieser heraus. Die erstere verleiht der Bewegung von S' den Charakter der Bohrbewegung. In den Fällen des Rollens der Flächen gehen die Normalebenen der Bahnen aller Systempunkte durch die Momentanaxe. Sollen die Flächen S', S'' sich nicht blos in einem Punkte, sondern in mehreren berühren und soll in allen diesen ein Rollen derselben aufeinander stattfinden, so müssen alle auf der Momentanaxe liegen, und sollen die Flächen auf einander rollen und sich längs einer Linie berühren, so kann letztere nur eine Gerade sein, welche mit der Momentanaxe zusammenfällt. Es können daher nur geradlinige Flächen aufeinander rollen und sich dabei längs einer Linie berühren, diese Linie kann nur eine Erzeugungslinie sein.

In allen Fällen, in welchen du und $d\vartheta$ nicht Null sind, findet ein Rollen und Gleiten der Flächen S', S'' auf einander zugleich statt.

Einige Literatur über die Bewegung des unveränderlichen räumlichen Systems.

Die ersten Untersuchungen über die Bewegung eines räumlichen Systems rühren von D'Alembert und Euler her. Bei D'Alembert kommt in dem Traité de la précession des équinoxes (1749) zuerst in Bezug auf die Bewegung um einen festen Punkt eine axe instantané de rotation (p. 83) vor. Kurze Zeit nachher bewies Euler in der Abhandlung: Découverte d'un nouveau principe de Mécanique (Mém. de l'Académie de Berlin p. 1750, gedruckt 1752) gleichfalls die Existenz der Momentanaxe für die Rotation um einen Punkt und bediente sich derselben in seinen Schriften: Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable (Mém. de l'Acad. de Berlin p. 1758, gedr. 1765) und Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum (1765), dem dritten Theile seiner Mechanik, deren beide ersten bereits 1736 erschienen waren. In allen diesen Schriften ist blos von unendlich kleinen Bewegungen die Rede. Die Entdeckung des Satzes, dass ein System aus einer ersten Lage in jede andere durch eine Rotation in Verbindung mit einer Translation auf unendlich viele Arten übergeführt werden könne, gebührt Euler (Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. Novi Commentarii Acad. Petrop. a. 1775, T. XX, p. 199; 1776) und zum Theil Lexell (Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum. Ibid. p. 239—270), indem er gewisse analytische Schwierigkeiten des Problems überwand. D'Alembert bewies hierauf ebenfalls die von Euler gefundenen Resultate (Opusc. mathem. T. VII, p. 372, (a. 1780)).

Von den Euler-D'Alembert'schen Untersuchungen über die unendlich kleine Bewegung eines Systems war nur noch ein kleiner Schritt zur Auffindung der Elementarschraubenbewegung, nämlich die Erkenntniss, dass unter den unendlich vielen Combinationen von Rotation und Translation, welche das System in eine folgende Lage überführen können, eine sei, für welche die Translation parallel zur Rotationsaxe sei. Weder der eine, noch der andere grosse Mathematiker hat ihn gethan; vielmehr gebührt dies Verdienst dem Florentiner Giulio Mozzi, dessen Schrift: Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi (Napoli 1763) zuerst diesen Satz enthält. Die Entdeckung Mozzi's wurde weder von seinen Zeitgenossen beachtet, noch wurde sie weiter bekannt. Selbst Chasles kannte dieselbe nicht, fand vielmehr 1830 selbständig die Elementarschraubenbewegung (Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le deplacement fini, ou infiniment petit, d'un corps solide libre; communiqué à la Société philom. Séance du 5. Fevr. 1831. Bullet. des sciences mathémat. p. Férussac, Novemb. 1830). Auf Mozzi machte erst Giorgini 1836 aufmerksam (Memorie di matematica e di fisica della Società italiana T. XXI; Modena 1836). Die weiteren hieher gehörigen Schriften von Chasles und die seiner Commentatoren sind bereits S. 257 erwähnt. Neben Chasles' Forschungen sind die von Poinsot von besonderer Bedeutung geworden. Die Mechanik verdankt ihm die Einführung der Kräftepaare und die sich an sie anschliessende Reduction der Kräfte, insbesondere die für die Centralaxe. Die Analogie führte ihn fast von selbst auf die Reduction der Rotationen oder Winkelgeschwindigkeiten und die Elementarschraubenbewegung. In seiner Theorie nouvelle de la rotation des corps (Liouville, Journal de Mathémat. T. XVI, p. 9 und 289 (1851), auch separat erschienen 1852 in 4° und 8°), deren erste Bearbeitung er bereits 1834 der Pariser Academie in einer kleineren Abhandlung vorgelegt hatte, entwickelt er vollständig diese Idee, sowie die des Rollens der beiden Kegel aufeinander während der Bewegung des Systems, welches um einen Punkt rotirt. Seine Arbeit: Précession des équinoxes (1857) gibt hiezu die interessantesten Anwendungen. Die Idee der beiden geradlinigen Flächen, welche während der Bewegung des Systems auf einander rollen und gleiten, scheint indessen zuerst Poncelet erfasst zu haben.

Die Neuzeit hat den bisher genannten Entdeckungen Bedeutendes hinzugefügt. Die Theorie der Complexe von Plücker (Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1868) und die synthetisch-geometrischen Forschungen Möbius', die zahlreichen und tiefgehenden Arbeiten von Mannheim, sowie insbesondere auch die Arbeiten von Ball und Somoff (S. S. 300) haben die Lehre von der Bewegung und dem Geschwindigkeitszustande eines unveränderlichen Systems zu einem hohen Grade der Ausbildung geführt. Eine sehr werthvolle Uebersicht über die neuere Entwickelung dieser Theorien gibt Fiedler (Geometrie und Geomechanik. Eine Uebersicht zur Kennzeichnung ihres Zusammenhanges nach seiner gegenwärtigen Entwickelung. Vierteljahrschrift der Züricher naturforsch. Gesellschaft, Jahrg. 1876, p. 50—66).

VIII. Capitel.

Beschleunigung der Bewegung eines Punktes; Projectionen und Componenten derselben. Arbeit der Beschleunigung. Sectorenbeschleunigung.

§. 1. Die Geschwindigkeit eines Punktes ändert sich im Laufe der Bewegung continuirlich und zwar im Allgemeinen sowohl der Grösse, als auch der Richtung nach. Ist (Fig. 122) $MV = v$ die Geschwindigkeit in M zur Zeit t, $M'V' = v'$ die in M' zur Zeit $t + \Delta t$, so construire man an irgend einem Punkte O zwei Strecken OV, OV' geometrisch gleich v, v',

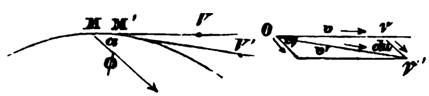

Fig. 122.

die Strecke VV' stellt dann die Aenderung der Geschwindigkeit v nach Grösse und Richtung dar. Sie ist die geometrische Differenz zwischen v' und v, d. h. die Geschwindigkeit, welche zu v hinzutreten müsste, um v in v' umzuändern. Mit abnehmendem Δt nähert sich M' dem Punkte M, verschwindet der Winkel $V'OV$ als der Contingenzwinkel der Bahn im Punkte M und gibt die verschwindende Differenz VV', das geometrische Differential von v, die unendlich kleine Componente an, welche zur Geschwindigkeit v, welche der Zeit t entspricht, hinzutritt, um die Geschwindigkeit v' für die Zeit $t + dt$ zu bilden. Diese unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente oder das geometrische Differential von v heisst die Elementarbeschleunigung von v zur Zeit t. Wir bezeichnen sie mit du und den Winkel, welchen sie mit der Richtung der Geschwindigkeit v bildet, mit α.

Würde nicht blos zur Zeit t, sondern in jedem Zeitelemente der auf t folgenden Zeiteinheit in der Richtung von du dieselbe unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente von neuem hinzutreten, so würde der Quotient $\frac{du}{dt}$ die totale Aenderungscomponente der Geschwindigkeit v während der auf die Zeit t folgenden Zeiteinheit darstellen, wenn die Geschwindigkeit während dieser fortwährend in derselben Weise sich änderte, wie im Zeitelemente dt, welches auf t folgt. Diese auf die Zeiteinheit bezogene Aenderungscomponente der Geschwindigkeit heisst die Beschleunigung des beweglichen Punktes zur Zeit t. Bezeichnen wir die Beschleunigung mit φ, so besteht demnach die Gleichung

$$\varphi = \frac{du}{dt} = \frac{d[v]}{dt}$$

und folgt aus ihr die Elementarbeschleunigung $du = \varphi dt = d[v]$. Die Richtung der Beschleunigung ist die Richtung der Elementarbeschleunigung. Die Beschleunigung φ ist die geometrische Derivirte der Geschwindigkeit nach der Zeit, wie die Elementarbeschleunigung das geometrische Differential derselben nach der Zeit ist. In den Ausdrücken „geometrische Derivirte" und „geometrisches Differential" sind die Beziehungen der Grösse, der Richtung und des Sinnes zugleichent halten.

Die Richtung der Beschleunigung, durch den beweglichen Punkt gezogen gedacht, fällt in die Ebene der beiden auf einander folgenden Tangenten, d. h. in die Schmiegungsebene der Bahn, welcher die Ebene des unendlich schmalen Parallelogramms OV' parallel ist. Der Sinn der Beschleunigung zeigt in der Schmiegungsebene nach der Seite der Tangente hin, auf welcher der Krümmungsmittelpunkt liegt. Denn nach dieser Seite hin wendet sich die Tangente.

Je nachdem der Winkel α, welchen die Beschleunigung mit der Geschwindigkeit bildet, kleiner, gleich oder grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, ist v' grösser, gleich oder kleiner als v, d. h. nimmt die Grösse der Geschwindigkeit v zu, bleibt ungeändert oder nimmt ab durch das Hinzutreten der Elementarbeschleunigung du. Umgekehrt: ändert die Geschwindigkeit ihre Grösse wachsend, bleibt ihre Grösse dieselbe oder nimmt sie ab, so ist α kleiner, gleich oder grösser als $\frac{1}{2}\pi$. Im Falle dass die Geschwindigkeit sich der Grösse nach nicht ändert, hat die Beschleunigung die Richtung der Hauptnormalen der Bahn (Normalen in der Schmiegungsebene) und ist ihr Sinn nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet.

Aendert die Geschwindigkeit zur Zeit t blos ihre Grösse, nicht ihre Richtung, d. h. fällt die Tangente des folgenden Punktes M' mit der Tangente von M zusammen, so fällt du in die Tangente und wird gleich dem Differentiale dv der Geschwindigkeit v im gewöhnlichen Sinne, nämlich dem Differentiale blos in Bezug auf Grösse und ebenso wird $\varphi = \frac{dv}{dt}$ die Derivirte von v in Bezug auf Grösse allein.

Der Hodograph Hamiltons (Cap. III, §. 5.) stellt die Aenderung der Geschwindigkeit sehr zweckmässig dar. Da sein Radiusvector die Geschwindigkeit v ist, so ist sein Bogenelement die Elementarbeschleunigung. Denkt man sich einen beweglichen Punkt den Hodographen beschreibend, so dass sein Radiusvector stets der Geschwindigkeit v des Hauptpunktes M geometrisch gleich bleibt, so ist seine Geschwindigkeit die Beschleunigung des Hauptpunktes.

§. 2. Beispiele.

1. Ein Punkt beschreibt mit constanter Geschwindigkeit einen Kreis vom Radius r, man soll seine Beschleunigung nach Grösse und Richtung bestimmen.

Da die Geschwindigkeit v constant ist, so ist das unendlich kleine Dreieck OVV' (Fig. 123) gleichschenklig und mithin VV' senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit. Daher ist die Beschleunigung normal zu dem Kreise und fortwährend nach dem Mittelpunkte desselben gerichtet. Hinsichtlich der Grösse φ der Beschleunigung erhält man aus jenem Dreiecke zunächst die Elementarbeschleunigung $du = \varphi dt = OV' \,.\, (VOV')$ oder da der Winkel VOV' der Contingenzwinkel des Kreises und gleich dem Winkel MCM' der beiden Normalen in den Endpunkten M, M'

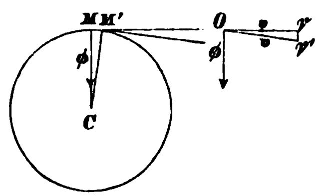

Fig. 123.

des Bogenelementes $MM' = ds$, also gleich $\frac{ds}{r}$ ist, $\varphi dt = v \cdot \frac{ds}{r}$. Es ist aber weiter $\frac{ds}{dt} = v$ und somit

$$\varphi = \frac{v^2}{r}.$$

Denkt man sich den beweglichen Punkt als einem System angehörig, welches um eine durch den Mittelpunkt gehende zur Kreisebene senkrechte Axe gleichförmig rotirt und bezeichnet die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation mit ω, so wird $v = \omega r$ und lässt sich die Beschleunigung auch durch den Ausdruck $\varphi = \omega^2 r$ darstellen. Die Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung eines Punktes ist nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet; sie ist die dritte Proportionale zum Radius und der Geschwindigkeit und kann durch das Produkt des Radius und des Quadrats der Winkelgeschwindigkeit dargestellt werden; der Hodograph ist ein Kreis vom Radius gleich der Geschwindigkeit.

2. Ein Punkt beschreibt eine Ellipse und zwar so, dass der Sector, welchen der von einem der beiden Brennpunkte nach dem beschreibenden Punkte gezogene Radiusvector während der Bewegung durchläuft, der Zeit proportional wächst, welches ist die Grösse und Richtung der Beschleunigug für diese Bewegung?

Ist der Sector der Zeit proportional, so ist die Sectorengeschwindigkeit (Cap. IV. §. 14) eine Constante c. Ist (Fig. 124) $MM' = ds = v dt$ und p das vom Ursprung F der Radienvectoren auf die Tangente gefällte Perpendikel, so ist der Elementarsector $MFM' = \frac{1}{2} p v dt$ und daher $\frac{1}{2} p v = c$ oder $v = \frac{2c}{p}$ d. h. für jede Bewegung, bei welcher die Sectorengeschwindigkeit in Bezug auf einen Punkt F constant ist, ist die Geschwindigkeit umgekehrt proportional ihrem Abstande von F.

Fällt man von M auf den folgenden Radiusvector FM' das Perpendikel MQ, so wird das unendlich kleine Dreieck FMQ' gleichschenklig und werden die

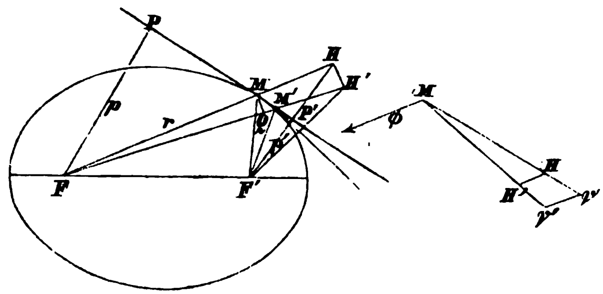

Fig. 124.

Winkel PMF und QMM' complementär; daher geben die rechtwinkligen Dreiecke PMF und QMM' die Proportion $FP : FM = MQ : MM'$ d. h. $p.ds = r.MQ$, wenn der Radiusvector $FM = r$ ist. Dieser Radiusvector rotirt um F mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω und wird $MQ = r\omega dt$. Hiemit gibt die eben entwickelte Gleichung $pv = r^2\omega$ oder $\omega = \frac{2c}{r^2}$ d. h. die Winkelgeschwindigkeit um den Ursprung der Sectoren ist dem Quadrate des Radiusvectors umgekehrt proportional.

Ist p' das von dem Brennpunkte F', welcher nicht Ursprung der Sectoren ist, wofür die Sectorengeschwindigkeit constant ist, auf die Tangente gefällte Perpendikel, so ist in der Ellipse $pp' = b^2$, wenn b die kleine Axe bedeutet. Hiemit geht der obige Ausdruck $v = 2c : p$ über in:

$$v = \frac{c}{b^2} \cdot 2p' = \frac{c}{b^2} \cdot F'H,$$

worin nach bekannten Sätzen $F'H = 2p'$ und FH die grosse Axe $2a$ der Ellipse ist. Für den folgenden Punkt M' ist ebenso

$$v' = \frac{c}{b^2} \cdot F'H'.$$

Die beiden Perpendikel $F'H$ und $F'H'$, welche von F' auf die Tangenten in M und M' gefällt werden, bilden mit HH' ein unendlich kleines Dreieck $F'HH'$, dessen Seiten $F'H$ und $F'H'$ den Geschwindigkeiten v, v' in den Punkten M, M' proportional sind. Zieht man daher durch den Punkt M, ausser der Tangente noch eine Gerade parallel zur Tangente des Punktes M' und trägt auf diese beiden Linien die Geschwindigkeiten v, v' als Längen MV, MV' auf, so erhält man ein weiteres Dreieck MVV', welches dem Dreieck $F'HH'$ ähnlich ist und zwar ist das Verhältniss der Seiten $c : b^2$. Die unendlich kleine Linie VV' des Dreiecks MVV' ist aber die Elementarbeschleunigung $du = \varphi dt$ für den Punkt M und erhält man daher

$$\varphi dt = \frac{c}{b^2} \cdot HH'.$$

Da $HH' = 2a\omega dt$ ist, so wird hiemit $\varphi = \frac{2ac}{b^2} \cdot \omega$ oder mit Hülfe des obigen Ausdruckes für die Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\varphi = \frac{4ac^2}{b^2\,r^2}.$$

Diesem Ausdrucke kann man noch eine etwas andre Form geben, indem man die Constante c durch die Umlaufszeit T darstellt. Es ist nämlich, da die Sectoren der Zeit proportional sind, $cT = \pi ab$, nämlich gleich dem Inhalt der ganzen Ellipse; hiemit erhält man

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Um die Richtung der Beschleunigung zu bestimmen, ist, da

$$FH = FH' = 2a,$$

das unendlich schmale Dreieck FHH' gleichschenklig und steht HH' in der Grenze senkrecht auf der Richtung des Radiusvectors FM. Lässt man daher das Dreieck $F'HH'$ um den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ sich umdrehen, so wird HH' parallel FM; da aber alsdann die Seiten des Dreiecks $F'HH'$ den homologen Seiten des Dreiecks MVV' parallel liegen, so folgt, dass die Richtung von VV' parallel zu FM ist und mithin die Beschleunigung in die Richtung des Radiusvectors fällt und nach dem Brennpunkte hinzeigt. Bei der vorliegenden elliptischen Bewegung ist die Beschleunigung fortwährend nach dem Brennpunkte hin gerichtet, welcher die Spitze des der Zeit proportionalen Sectors ist und ist dieselbe umgekehrt proportional dem Quadrate des Radiusvectors.

§. 3. Für die Projection der Bewegung eines Punktes M auf eine Axe X ändert die Geschwindigkeit v_x ihre Richtung nicht und ist daher die Beschleunigung $\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}$, nämlich gleich der Derivirten der Geschwindigkeit in Bezug auf Grösse. Projicirt man das Dreieck OVV' (Fig. 122), dessen Seiten v, du, v' sind auf die Axe, so ist, wenn die Elementarbeschleunigung du mit der Axe den Winkel α bildet, $v_x + du \,.\, \cos\alpha - v'_x = 0$, also $dv_x = du \,.\, \cos\alpha$ und

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \cos\alpha = \varphi\cos\alpha,$$

d. h. die Beschleunigung der Projectionsbewegung auf eine Axe ist die Projection der Beschleunigung der Hauptbewegung auf dieselbe.

Da nach Cap. III, §. 9. $v_x = \frac{dx}{dt}$ ist, so wird

$$\varphi_x = \frac{d^2x}{dt^2},$$

d. h. die Beschleunigung der Projectionsbewegung ist die zweite Derivirte der auf der Axe von einem beliebigen Anfangspunkte an gerechneten Abscisse.

Projicirt man die Bewegung eines Punktes M in der Ebene auf rechtwinklige Coordinatenaxen OX, OY und sind x, y die Coordinaten von M

zur Zeit t, so bestehen für die Beschleunigungen φ_x, φ_y der beiden Projectionsbewegungen und die Neigung α der Beschleunigung φ der Hauptbewegung die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \quad \varphi\cos\alpha = \varphi_x, \quad \varphi\sin\alpha = \varphi_y, \quad \varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\varphi_y}{\varphi_x}.$$

Construirt man von O aus als Pol der Radienvectoren $r' = v$ den Hodographen der Bewegung des Punktes $M(x, y)$ und sind x', y' die Coordinaten des Endpunktes m von r', sowie ds' das Bogenelement desselben, welches die Elementarbeschleunigung darstellt, so ist:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

$$\varphi = \frac{ds'}{dt} = \left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ebenso hat man für die Projectionen der räumlichen Bewegung eines Punktes $M(x, y, z)$ auf drei rechtwinklige Axen OX, OY, OZ, wenn α, β, γ die Richtungswinkel von φ sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\varphi_x} = \frac{\cos\beta}{\varphi_y} = \frac{\cos\gamma}{\varphi_z} = \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$$

und für den Hodographen die Gleichungen:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}, \quad \varphi = \left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Sind die Coordinaten des beweglichen Punktes M als Functionen der Zeit gegeben, so liefern zwei aufeinander folgende Differentiationen die Formelsysteme für die Geschwindigkeit v und Beschleunigung φ, sowie deren Richtungswinkel (a, b, c) und (α, β, γ), nämlich:

$$\begin{aligned} x &= \psi(t), & v_x &= \psi'(t), & v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \\ y &= \chi(t), & v_y &= \chi'(t), & \frac{\cos a}{v_x} &= \frac{\cos b}{v_y} = \frac{\cos c}{v_z} = \frac{1}{v}, \\ z &= \varpi(t), & v_z &= \varpi'(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \psi''(t), & \varphi^2 &= \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2, \\ \varphi_y &= \chi''(t), & \frac{\cos\alpha}{\varphi_x} &= \frac{\cos\beta}{\varphi_y} = \frac{\cos\gamma}{\varphi_z} = \frac{1}{\varphi}. \\ \varphi_z &= \varpi''(t), \end{aligned}$$

Ist aber die Beweguug des Punktes M nicht selbst gegeben, sondern sind blos $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ bekannte Functionen von allen oder einigen der Grössen $t, x, y, z, v_x, v_y, v_z$, so liefert das System der Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z$$

durch seine ersten Integrale den Geschwindigkeitszustand des Punktes M und durch seine zweiten Integrale die Coordinaten desselben als Functionen der Zeit t, wie später ausführlich erörtert werden soll. Man nennt diese Gleichungen die Gleichungen der Bewegung; sie wurden zuerst von Maclaurin aufgestellt (Treatise of Fluxions, 1742).

§. 4. Beispiele.

Die gleichförmige Kreisbewegung (vgl. Cap. III, §. 12.) wird auf eine Gerade, z. B. auf einen Durchmesser, projicirt, man soll die Beschleunigung der geradlinigen oscillatorischen Projectionsbewegung finden.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, r der Radius des Kreises, so ist die Beschleunigung $\varphi = \omega^2 r$ und nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet. Bezeichnet ψ den Winkel $M_0 CM$, welchen (s. Fig. 77, S. 197) der Radius CM, mit der Projectionsaxe bildet, so ist $\pi - \psi$ der Winkel der Beschleunigung φ mit dieser Axe und folglich die Beschleunigung der Projectionsbewegung

$$\varphi_x = -\omega^2 r \cos\psi,$$

oder wenn $Cm = x$ die Abscisse des Punktes M ist, $\varphi_x = -\omega^2 x$. Sie ist nach dem Kreismittelpunkte C gerichtet. Man hat daher für die oscillatorische Bewegung die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich auch aus der Formel $\frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t$, da $r \cos \omega t = x$ ist.

Für die geradlinige oscillatorische Bewegung eines Punktes, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ist, ist die Beschleunigung dem Abstande des beweglichen Punktes von einem festen Punkte der Geraden, nämlich von der Projection des Kreismittelpunktes, proportional und fortwährend nach diesem Punkte hin gerichtet; sie wechselt den Sinn, so oft der bewegliche Punkt durch das feste Centrum hindurchgeht und ist unabhängig von der Oscillationsamplitude.

Umgekehrt kann jede geradlinige Bewegung, für welche die Beschleunigung nach einem festen Punkte der Geraden gerichtet und der Entfernung von diesem proportional, nämlich $\varphi_x = \varkappa x$ ist, als die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung um den festen Punkt als Mittelpunkt angesehen werden. Die Winkelgeschwindigkeit derselben ist $\omega = \sqrt{\varkappa}$ und die Oscillationsdauer $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varkappa}}$. Der Durchmesser des Kreises ist der Abstand der beiden äussersten Lagen, welche der Punkt während seiner Bewegung erreicht (die Oscillationsamplitude).

Projicirt man die gleichförmige Kreisbewegung auf zwei zu einander rechtwinklige Axen des Mittelpunktes als Axen der x, y, so hat man für die beiden Projectionsbewegungen die Gleichungen

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t,$$

aus welchen die Geschwindigkeiten derselben

$$v_x = -\omega r \sin \omega t, \quad v_y = \omega r \cos \omega t,$$

sowie deren Beschleunigungen

$$\varphi_x = -\omega^2 x, \quad \varphi_y = -\omega^2 y$$

folgen. Beide Bewegungen sind an sich identisch, nur sind ihre Perioden so verschoben, dass die Maxima der Abstände, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (im absoluten Sinne genommen) der einen mit den Minimis der entsprechenden Abstände, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des andern gleichzeitig eintreten.

§. 5. Wird die Bewegung eines Punktes auf eine Ebene projicirt, so folgt aus der Projection des Dreiecks OVV' (Fig. 122), dass die Beschleunigung der Projectionsbewegung die Projection der Beschleunigung der Hauptbewegung ist.

Die gleichförmige Kreisbewegung eines Punktes wird auf eine Ebene projicirt, man soll die Beschleunigung der Projectionsbewegung finden.

Die Projection der kreisförmigen Bahn des Punktes M ist (Fig. 125) die elliptische Bahn des Projectionspunktes m, der Mittelpunkt c derselben die Projection des Mittelpunktes C jener; die grosse Axe $2a$ der Ellipse liegt parallel der Schnittlinie der Ebenen beider Curven und ist gleich dem Durchmesser $2a$ des Kreises, die kleine Axe $2b$ fällt in die Ebene des Neigungswinkels α beider Ebenen und ist $b = a \cos \alpha$. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, so ist $v = a\omega$ die Geschwindigkeit des Punktes M und $\varphi = a\omega^2$ seine Beschleunigung und hat die Richtung MC nach dem Kreismittelpunkt. Die Beschleunigung ψ der elliptischen Bewegung ist die Projection von φ und folglich nach dem Mittelpunkte c der Ellipse gerichtet und hat die Grösse $\psi = \varphi \cos(\varphi, \psi) = r\omega^2$, wenn der Radiusvector cm der Ellipse mit r bezeichnet wird; sie ist der Entfernung vom Mittelpunkte proportional.

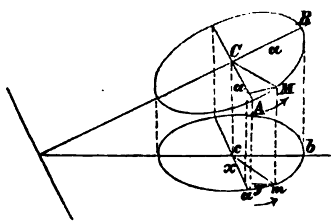

Fig. 125.

Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist die Sectorengeschwindigkeit c für den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung der Sectoren constant $c = \pi a^2 : T$, wenn T die Umlaufszeit bedeutet, welche durch die Winkelgeschwindigkeit ω mit Hülfe von $\omega T = 2\pi$ ausgedrückt werden kann. Da der Sector der Kreisbewegung, welcher in einer endlichen oder unendlich kleinen Zeit beschrieben wird, dieser Zeit proportional ist und die Sectoren der Ellipse die Projectionen der Sectoren des Kreises sind, so sind auch diese der Zeit proportional und ist für die elliptische Bewegung die Sectorengeschwindigkeit constant, nämlich $c' = c \cos \alpha$. Da die Umlaufszeit für beide Bewegungen gleich gross ist, so hat man $c'T = \pi ab$. Man kann daher dem Ausdruck für die Beschleunigung ψ auch noch die Form geben:

$$\psi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = \frac{4c'^2}{a^2b^2} \cdot r = \frac{4c^2}{a^4} \cdot r.$$

Wählt man die Hauptaxenrichtungen ca und cb der Ellipse, als Axen der x, y, so sind die Coordinaten des Punktes m leicht als Functionen der Zeit zu erhalten. Ist nämlich M zur Zeit $t = 0$ in A, so wird $AM = a\omega t$ und der Inhalt des Dreiecks ACM gleich $\frac{1}{2}a^2 \sin \omega t$, der seiner Projection ist aber $\frac{1}{2}ay$; daher erhält man die Gleichung $y = b \sin \omega t$, zu welcher man $x = a \cos \omega t$ aus der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ der Ellipse findet. Für die Polarcoordinaten $cm = r$ und $\sphericalangle\, acm = \vartheta$ des Punktes m erhält man $r^2 = a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t$, $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \omega t$.

Aus dem Vorstehenden schliesst man leicht umgekehrt, dass, wenn ein Punkt eine Ellipse beschreibt unter Einfluss einer nach dem Mittelpunkt gerichteten Beschleunigung, diese dem Radiusvector proportional und dass die Sectorengeschwindigkeit der Bewegung constant sein muss. Denn es gibt immer einen Kreis, dessen Projection die Ellipse ist und in ihm eine Bewegung, welche der elliptischen Bewegung folgt; für diese ist alsdann die Beschleunigung nach dem Mittelpunkt gerichtet und dem Radius proportional, folglich die Geschwindigkeit der Kreisbewegung constant.

§. 6. Die Elementarbeschleunigung du kann als eine unendlich kleine Geschwindigkeit, wie jede Geschwindigkeit auf mannigfache Art in zwei oder mehrere Componenten zerlegt werden, deren geometrische Summe sie ist. Dasselbe gilt von der ihr proportionalen Beschleunigung $\varphi = \frac{du}{dt}$.

Eine besonders wichtige Zerlegung von φ ist ihre Zerlegung nach der Tangente und Hauptnormalen der Bahn oder die Zerlegung in die Tangential- und Normalbeschleunigung φ_t und φ_n. Bildet φ mit der Tangente den Winkel α, so ist (Fig. 126)

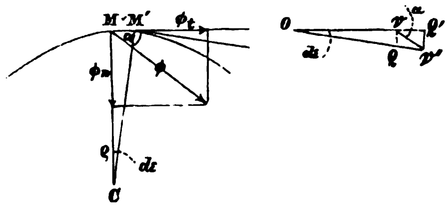

Fig. 126.

$$\varphi_t = \varphi \cos \alpha, \quad \varphi_n = \varphi \sin \alpha.$$

In dem mehrfach benutzten unendlich kleinen Dreieck OVV', dessen Ebene der Schmiegungsebene parallel, dessen Seiten die Geschwindigkeiten zu den Zeiten t und dt und die Elementarbeschleunigung du darstellen, fälle man von V oder V' die Perpendikel VQ, $V'Q'$ auf die Seiten OV, OV', so ist, da Winkel

$$V'VQ' = VV'O = \alpha$$

wird,

$$\cos \alpha = \frac{VQ'}{VV'} = \frac{OV' - OV}{VV'} = \frac{dv}{du} = \frac{1}{\varphi} \frac{dv}{dt},$$

$$\sin \alpha = \frac{VQ}{VV'} = \frac{OV \,.\, d\varepsilon}{VV'} = \frac{v\, d\varepsilon}{du} = \frac{v}{\varphi} \frac{d\varepsilon}{dt},$$

wo $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel bedeutet. Hiemit erhält man

$$\varphi_t = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi_n = v \frac{d\varepsilon}{dt},$$

$d\varepsilon$ ist zugleich der Winkel der beiden aufeinanderfolgenden Normalen MC, $M'C$ und stellt $\frac{d\varepsilon}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punktes um den Krümmungsmittelpunkt C dar. Dem Ausdrucke für φ_n kann man noch zwei andere Formen geben, wenn man die bekannte Beziehung zwischen Bogenelement, Contingenzwinkel und Krümmungshalbmesser in Verbindung mit dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit heranzieht, nämlich:

$$\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon}, \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Eliminirt man hiemit aus φ_n einmal $d\varepsilon$, das andremal v, so erhält man noch:

$$\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}, \quad \varphi_n = \varrho \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2.$$

Daher:

Die Beschleunigung eines Punktes kann in zwei Componenten zerfällt werden, in die Tangentialbeschleunigung und die Normalbeschleunigung, erstere längs der Tangente, letztere längs der Hauptnormalen nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet. Die Tangentialbeschleunigung ist die Derivirte nach Grösse von der Geschwindigkeit in Bezug auf Zeit, die Normalbeschleunigung ist der Quotient aus dem Quadrate der Geschwindigkeit durch den Krümmungshalbmesser, oder, was hiermit gleichbedeutend ist, das Produkt aus dem Krümmungshalbmesser und dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit um den Krümmungsmittelpunkt, oder auch das Product aus der Geschwindigkeit v und dieser Winkelgeschwindigkeit.

Die Normalbeschleunigung heisst auch die **Centripetalbeschleunigung**, weil sie nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet ist.

Die Zerlegung der Beschleunigung in ihre tangentielle und normale Componente ist vorzugsweise deswegen so wichtig, weil sie den Antheil, welchen die Beschleunigung an der Aenderung der Richtung der Geschwindigkeit hat, von dem trennt, den sie an der Aenderung ihrer Grösse nimmt. Der Ausdruck der Tangentialbeschleunigung enthält nichts, was sich auf die Krümmung der Bahn und mithin nichts, was sich auf die Abweichung der Tangente bezieht, dagegen enthält die Normalbeschleunigung das die Krümmung der Bahn bestimmende Element. Die Tangentialbeschleunigung beschleunigt daher den Punkt in seiner Bahn allein, d. h. verändert die Geschwindigkeit hinsichtlich der Grösse allein, die Normalbeschleunigung krümmt die Bahn, ohne Einfluss auf die Aenderung der Grösse der Geschwindigkeit zu haben. Ist daher eine Gleichung gegeben, welche φ_t als Function der Zeit oder des Abstandes ausdrückt, so kann man die Bewegung des Punktes in der Bahn unabhängig von der Kenntniss der Bahn untersuchen und bleibt dieselbe unverändert dieselbe, wenn die Normalbeschleunigung sich so ändert, dass die Bahn sich anders krümmt. Andererseits hängt aber die Normalbeschleunigung nicht blos von der Krümmung der Bahn, sondern auch von der Art der Bewegung des Punktes in der Bahn ab, denn ihr Ausdruck enthält neben dem Krümmungshalbmesser auch die Geschwindigkeit.

Ist die Bahn geradlinig, so wird $\varrho = \infty$, mithin

$$\varphi_t = \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi_n = 0, \quad \alpha = 0.$$

Die Beschleunigung reducirt sich auf die Tangentialbeschleunigung. Ist die Bewegung gleichförmig, also v constant, so wird

$$\varphi_t = 0, \quad \varphi_n = \frac{v^2}{\varrho} = \varphi, \quad \operatorname{tg} \alpha = \infty.$$

Die Richtung der Beschleunigung ist normal zur Bahn.

Aus den Gleichungen $\varphi_n = \varphi \sin \alpha = \frac{v^2}{\varrho}$ folgt $\varphi \varrho \sin \alpha = v^2$. Es ist aber $\varrho \sin \alpha$ die halbe Sehne $\frac{1}{2} c$, welche die Richtung der Beschleunigung, durch den beweglichen Punkt gezogen, in dem Krümmungskreise bestimmt (Beschleunigungssehne). Daher die Gleichung:

$$v^2 = \tfrac{1}{2} c \varphi,$$

d. h. **die Geschwindigkeit ist die mittlere Proportionale zwischen der Beschleunigung und der halben Beschleunigungssehne.** Ein Kreis um M mit der Geschwindigkeit v als Radius bestimmt auf der Richtung der Beschleunigung diesseits und jenseits von M zwei Punkte A, B, in Bezug auf welche der Endpunkt der Beschleunigung und die Mitte der Sehne c conjugirte harmonische Punkte sind.

§. 7. Während der bewegliche Punkt von M aus, wo er sich zur Zeit t befindet, mit veränderlicher Geschwindigkeit seine Bahn beschreibt und nach der Zeit $t + \vartheta$ in M' angelangt sein wird, wollen wir gleichzeitig einen zweiten Punkt von M abgehen lassen, welcher mit constanter Geschwindigkeit, nämlich mit der Geschwindigkeit v, welche der Hauptpunkt zur Zeit t in M besitzt, sich auf der Tangente bewegt und zur Zeit $t + \vartheta$ die Lage N erreicht haben mag. Die Verbindungslinie NM' beider Punkte, welche nach Grösse und Richtung mit ϑ veränderlich ist und mit ϑ verschwindet, steht mit der Beschleunigung φ in der doppelten Beziehung, dass **1) die Richtung von NM' bei abnehmendem ϑ sich der Richtung der Beschleunigung φ als ihrer Grenzlage nähert und 2) der Quotient des Abstandes NM' durch das halbe Quadrat von ϑ in der Grenze in die Grösse der Beschleunigung übergeht.** Die verschwindend kleine Strecke NM', welche die Abweichung des beweglichen Punktes von der Tangente in der Richtung der Beschleunigung misst, wird die **Deviation** δ des beweglichen Punktes genannt.

Zum Beweise genügt es, die Bewegungen der beiden Punkte während zweier auf t folgender Zeitelemente dt zu verfolgen. Während des ersten derselben beschreiben beide Punkte das Element $Mm = ds = v dt$, (Fig. 127), welches die Tangente in M mit dem Krümmungskreise gemein hat. Während des zweiten Zeitelementes dt durchläuft der Hauptpunkt das

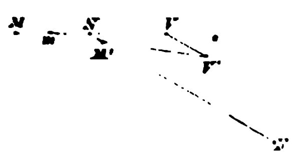

Fig. 127.

Bahnelement $mM' = (v + dv) dt$, welches zugleich der zweiten Tangente und dem Krümmungskreise angehört, während der zweite Punkt auf der ersten Tangente das Element $mN = vdt = Mm$ zurücklegt. In dem unendlich kleinen Dreiecke mNM' sind also die Seiten mN und mM' den Geschwindigkeiten v und $v + dv$ proportional, deren Richtungen sie besitzen. Construirt man daher mit $mV = v$, $mV' = v + dv$ das Dreieck mVV', so wird die Deviation NM' parallel der Elementarbeschleunigung $VV' = \varphi dt$.

Die Linie NM' schneidet nun den Krümmungskreis zum zweitenmale in einem Punkte F und ist daher, weil mN den Krümmungskreis berührt, $\overline{mN}^2 = \delta \,.\, \overline{NF}$.

Da aber NF die Richtung der Beschleunigung hat, so geht es in der Grenze in die Beschleunigungssehne c über, und da $mN = vdt$ ist, so erhält man die Relation $v^2 dt^2 = \delta \,.\, c$, welche in Verbindung mit $v^2 = \frac{1}{2} c\varphi$ (§. 6.) liefert:

$$\varphi = \frac{\delta}{\frac{1}{2} dt^2}.$$

Die hieraus folgende Gleichung

$$\delta = \tfrac{1}{2} \varphi dt^2,$$

zeigt, dass die Deviation des beweglichen Punktes ein unendlich Kleines zweiter Ordnung ist, und erhalten wird, indem man die halbe Beschleunigung mit dem Quadrate des Zeitelementes multiplicirt. Ein Punkt, welcher in der Richtung der Beschleunigung ohne Anfangsgeschwindigkeit sich während des Zeitelementes mit constanter Beschleunigung φ bewegen würde, würde in dieser Zeit den Weg δ zurücklegen. Denn ist ξ sein Abstand von M zur Zeit τ, so ist seine Beschleunigung $\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varphi$, mithin seine Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{dt} = \varphi \,.\, \tau$ und sein Abstand $\xi = \frac{1}{2}\varphi\tau^2$, mithin für $\tau = dt$ gleich $\frac{1}{2}\varphi dt^2 = \delta$. Man kann daher die Bewegung eines Punktes auf der krummlinigen Bahn während des Zeitelementes ansehen als aus zwei andern Bewegungen zusammengesetzt, einer gleichförmigen längs der Tangente von der Geschwindigkeit v, wie sie der Punkt zu Anfang des Zeitelementes besitzt, und einer gleichförmig veränderlichen in der Richtung der Beschleunigung, mit der Beschleunigung φ.

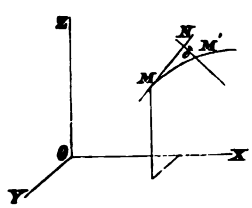

Fig. 128.

§. 8. Um den vorstehenden Satz analytisch zu erweisen, seien x, y, z die Coordinaten des beweglichen Punktes M (Fig. 128) zur Zeit t. Aus ihnen erhält man die Coordinaten des Punktes M', d. h. des Ortes des beweglichen Punktes zur Zeit $t + \vartheta$, indem man in x, y, z an die Stelle von t die Grösse $t + \vartheta$ treten lässt. Da ϑ bloss für sehr kleine Werthe in Anspruch genommen wird, so kann man die Coordinaten des Punktes M' nach dem Taylor'schen Satze in

Reihen entwickeln, welche nach ganzen Potenzen von ϑ fortschreiten, wodurch man erhält

$$x + \frac{dx}{dt}\cdot\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\vartheta^2 + \tfrac{1}{6}\frac{d^3x}{dt^3}\cdot\vartheta^3 + \cdots$$
$$y + \frac{dy}{dt}\cdot\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\vartheta^2 + \tfrac{1}{6}\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\vartheta^3 + \cdots$$
$$z + \frac{dz}{dt}\cdot\vartheta + \tfrac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\vartheta^2 + \tfrac{1}{6}\frac{d^3z}{dt^3}\cdot\vartheta^3 + \cdots$$

Die Coordinaten des Punktes N sind, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der Tangente in M sind, wegen $MN = v\vartheta$ gleich

$$x + v\vartheta\cos\alpha,\quad y + v\vartheta\cos\beta,\quad z + v\vartheta\cos\gamma$$

oder weil $v\cos\alpha$, $v\cos\beta$, $v\cos\gamma$ die Componenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ von v sind:

$$x + \frac{dx}{dt}\cdot\vartheta,\quad y + \frac{dy}{dt}\cdot\vartheta,\quad z + \frac{dz}{dt}\cdot\vartheta.$$

Subtrahirt man diese Coordinaten von den Coordinaten des Punktes M', so erhält man für die Projectionen der Linie NM' auf die Axen:

$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2\left[\frac{d^2x}{dt^2} + \tfrac{1}{3}\frac{d^3x}{dt^3}\vartheta + \cdots\right],$$
$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{3}\frac{d^3y}{dt^3}\vartheta + \cdots\right],$$
$$\tfrac{1}{2}\vartheta^2\left[\frac{d^2z}{dt^2} + \tfrac{1}{3}\frac{d^3z}{dt^3}\vartheta + \cdots\right],$$

deren Quadratsumme das Quadrat von NM' bildet. Hieraus folgt sofort beim Grenzenübergange für abnehmende ϑ:

$$\lim\left(\frac{NM'}{\frac{1}{2}\vartheta^2}\right) = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \varphi.$$

Die Cosinusse der Neigung von NM' gegen die Axen sind proportional den Projectionen von NM' auf diese Axen, also in der Grenze proportional den Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ d. h. den Componenten der Beschleunigung φ parallel diesen Axen. Daher hat NM' in der Grenzlage die Richtung der Beschleunigung.

§. 9. Eine andere gleichfalls wichtige Zerlegung der Beschleunigung ist die, deren Componenten parallel und senkrecht zur Richtung des Radiusvectors eines Polarcoordinatensystems (r, ϑ) sind.

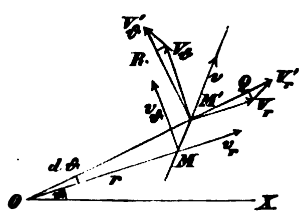

Fig. 129.

Die Componente $v_r = \frac{dr}{dt}$ der Geschwindigkeit längs des Radiusvectors besitzt eine Beschleunigung $V_r V_r'$ (Fig. 129), welche im Allgemeinen in zwei Componenten zerfällt, in eine QV_r' gleichfalls längs des Radiusvectors gleich $\frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ und eine andere V_rQ senkrecht zu ihm gleich $v_r\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}$. Die Componente

$v_\vartheta = r\frac{d\vartheta}{dt}$ der Geschwindigkeit aber, welche senkrecht zum Radiusvector ist, hat eine Beschleunigung, von deren Componenten die eine, $V_\vartheta R$, längs des Radiusvectors gerichtet, den Werth $r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$, die andere senkrecht zum Radiusvector, aber den Werth $\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ besitzt. Die beiden Bestandtheile der Beschleunigung, welche in die Richtung des Radiusvectors fallen, haben entgegengesetzten Sinn, $\frac{d^2r}{dt^2}$ abgewandt, $r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ dem Pole O zugewandt; sie liefern daher als Gesammtbeschleunigungscomponente φ_r längs des Radiusvectors die Differenz $\varphi_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$. Die beiden Beschleunigungsbestandtheile, deren Richtung senkrecht zum Radiusvector ist, nämlich $\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)$ haben gleichen Sinn und liefern als Gesammtcomponente φ_ϑ der Beschleunigung senkrecht zum Radiusvector die Summe

$$\varphi_\vartheta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Um diese Resultate analytisch zu erhalten, differentiire man die Gleichungen $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ zweimal nach t, welches liefert

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\cos\vartheta - \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right]\sin\vartheta$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\sin\vartheta + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right]\cos\vartheta$$

und projicire diese Beschleunigungscomponenten parallel den Axen der x, y auf den Radiusvector und eine zu ihm senkrechte Gerade. Die Componente parallel zum Radiusvector wird

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\vartheta = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

die senkrecht zu ihm

$$\frac{d^2y}{dt^2}\cos\vartheta + \frac{d^2x}{dt^2}\sin\vartheta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}.$$

§. 10. Für die Tangentialcomponente φ_t der Beschleunigung ist $\frac{dv}{dt} = \varphi_t$. Ist also φ_t als Function der Zeit dargestellt, so folgt, wenn v, t; v_0, t_0 zusammengehörige Werthepaare sind:

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t}\varphi_t\,.\,dt.$$

Die Aenderung, welche die Geschwindigkeit während irgend eines Zeitintervalles erleidet, ist gleich dem Integrale der Tangentialbeschleunigung, ausgedehnt über dasselbe Zeitintervall, d. h. gleich der Summe aller tangentiellen Elementarbeschleunigungen in dieser Zeit. Ist die Bewegung geradlinig, so ist $\varphi_t = \varphi$, da $\varphi_n = 0$ ist.

Aus den Gleichungen $\frac{dv}{dt} = \varphi_t$ und $\frac{ds}{dt} = v$ folgt durch Elimination von dt die Gleichung $v\frac{dv}{ds} = \varphi_t$ oder $d \,.\, \frac{1}{2} v^2 = \varphi_t \,.\, ds$. Wenn also φ_t als Function des Abstandes s von irgend einem Anfangspunkte auf der Bahn gedacht wird und man integrirt noch s zwischen den Grenzen s_0, s, welchen die Werthe v_0, v der Geschwindigkeit entsprechen, so kommt

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_{s_0}^{s} \varphi_t \,.\, ds.$$

Das Produkt aus der Tangentialbeschleunigung φ_t und dem Wege ds des Punktes im Zeitelemente, welches Produkt das Element des Integrales auf der rechten Seite dieser Gleichung bildet, wollen wir der Analogie mit späteren Begriffen wegen, die wir in der Theorie der Kräfte finden werden, die Elementararbeit der Beschleunigung und das Integral selbst, die Summe dieser Elementararbeiten, die totale Arbeit oder kurz die Arbeit der Beschleunigung längs des Weges $s - s_0$ nennen.

Die Aenderung, welche das halbe Quadrat der Geschwindigkeit beim Uebergang des Punktes aus einer ersten in eine zweite Lage erleidet, ist gleich der Arbeit der Beschleunigung längs des durchlaufenen Weges.

Ist α der Winkel, welchen die Beschleunigung φ mit der Tangente bildet, so ist die Elementararbeit $\varphi_t \,.\, ds = \varphi \cos \alpha \,.\, ds$. Indem man den Factor $\cos \alpha$ zu ds zieht, stellt $ds \cos \alpha$ die Projection des Elementarweges auf die Richtung der Beschleunigung dar. Man kann daher auch definiren: Die Elementararbeit der Beschleunigung ist das Produkt aus der Beschleunigung und der Projection des Elementarweges auf die Richtung derselben. Man pflegt sogar den Begriff der Elementararbeit noch dahin zu erweitern, dass an die Stelle des im Zeitelemente wirklich durchlaufenen Elementes ds eine andere unendlich kleine Linie irgend welcher Richtung, um welche der bewegliche Punkt ganz abgesehen von den wirklichen Umständen seiner Bewegung verschoben gedacht werden kann, tritt. Eine solche gedachte Verschiebung nennt man eine virtuelle Verschiebung und die ihr entsprechende Elementararbeit virtuelle Elementararbeit. Die Bezeichnung „virtuell“ (von *virtus*, die Fähigkeit, Möglichkeit) soll ausdrücken, dass diese Verschiebungen nur als möglich gedacht werden, nicht wirklich erfolgende zu sein brauchen. Statt „virtuelle Verschiebung" ist vielfach der weniger passende Ausdruck „virtuelle Geschwindigkeit" üblich.

Ist Fig. 130 MN eine wirkliche oder virtuelle Verschiebung des Punktes M in dem Sinne MN, so ist die entsprechende Elementararbeit:

$$\varphi \,.\, MN \,.\, \cos\alpha = \varphi \,.\, MQ = MQ' \,.\, MN\,.$$

Dieselbe ist positiv, Null oder negativ, je nachdem $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ oder $\alpha > \frac{1}{2}\pi$ ist. Im ersten Falle haben die Verschiebung und die Componente MQ' der Beschleunigung gleichen Sinn und erleidet der Punkt eine Beschleunigung im Sinne seiner Verschiebung, im letzten Falle haben beide entgegengesetzten Sinn und wird M im entgegengesetzten Sinn der Verschiebung beschleunigt; oder mit Zugrundelegung der Ausdrucksform $\varphi \,.\, MQ$: im ersten Falle fällt die Projection des Wegelementes MN auf die Richtung der Beschleunigung im Sinne dieser, im letzteren im entgegengesetzten. Im ersten Falle wird der Punkt in seiner Bahn beschleunigt, d. h. wächst seine Geschwindigkeit, im zweiten Falle wird er verzögert, nimmt die Geschwindigkeit ab.

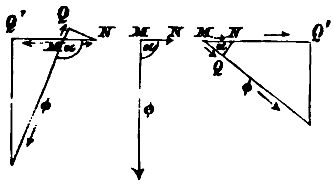

Fig. 130.

Man kann sich diese Beziehungen an dem Beispiele der jährlichen Bewegung der Erde verdeutlichen. Abgesehen von der Axendrehung und den Dimensionen der Erde beschreibt der Mittelpunkt derselben im Laufe des Jahres eine Ellipse, von deren Brennpunkten der eine der Sonnenmittelpunkt ist. Die Bewegung in dieser Ellipse befolgt die Gesetze der in §. 2. erläuterten elliptischen Bewegung und ist die Beschleunigung fortwährend nach jenem Brennpunkte gerichtet. In den Endpunkten der grossen Axe (Perihelium und Aphelium) ist die Richtung der Beschleunigung senkrecht gegen die Richtung der Tangente, in welche der Elementarweg fällt und während die Erde vom Perihelium zum Aphelium geht, ist der Winkel beider Richtungen stumpf, während sie vom Aphelium zum Perihelium zurückkehrt, ist er spitz. Im Perihelium und Aphelium ist die Elementararbeit der Beschleunigung Null, längs der Bahn vom Perihelium zum Aphelium ist sie negativ und nimmt folglich die Geschwindigkeit ab, längs der Bahn vom Aphelium zum Perihelium ist sie positiv und wächst also die Geschwindigkeit. Dies stimmt überein mit dem Satze, nach welchem die Geschwindigkeit umgekehrt proportional ihrem Abstande von dem Brennpunkte ist, nach welchem die Beschleunigung gerichtet ist.

Ist $\varphi \cos\alpha$ constant, so ist die totale Arbeit der Beschleunigung längs des Weges $s - s_0$ gleich $\int\limits_{s_0}^{s} \varphi \cos\alpha \, ds = (s - s_0)\, \varphi \cos\alpha$, nämlich gleich dem Produkte aus der constanten tangentiellen Beschleunigungscomponente und dem Wege des Punktes.

Ist die Beschleunigung ihrer Grösse nach constant, so ist die Arbeit $\int_{s_0}^{s} \varphi \cos \alpha \, ds = \varphi \int_{s_0}^{s} \cos \alpha \, . \, ds$ d. h. gleich dem Produkte aus der constanten Beschleunigung und der Summe der Projectionen der Wegelemente, d. h. der Projection des Weges auf die Richtung derselben.

Indem man $\varphi \cos \alpha$ als die Ordinate einer Curve für s als Abscisse construirt, kann man die totale Arbeit als den über der Basis $s - s_0$ stehenden Flächenraum dieser Curve erhalten, sei es durch directe Integration oder durch mechanische Quadratur. Der mittlere Werth $\overset{*}{\varphi}_t$ der Beschleunigungscomponente $\varphi_t = \varphi \cos \alpha$ ist daher gegeben durch die Gleichung:

$$(s - s_0) \, . \, \overset{*}{\varphi}_t = \int_{s_0}^{s} \varphi \cos \alpha \, ds \, .$$

Nach §. 7. ist $v^2 = \frac{1}{2} c \varphi$; also kann man den Satz von der Arbeit der Beschleunigung auch mit Hülfe der Werthe c, c_0 der Beschleunigungssehne, entsprechend v und v_0 darstellen, nämlich:

$$\tfrac{1}{2} c \varphi - \tfrac{1}{2} c_0 \varphi_0 = \int_{s}^{s_0} \varphi \cos \alpha \, . \, ds = \tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v^2 \, .$$

§. 11. Das Produkt aus einer Strecke $[a]$ und der Projection einer andern Strecke $[b]$ auf sie, nämlich die Grösse $ab \cos \alpha$, wenn α der Winkel zwischen a und b ist, ist eine für die Mechanik wichtige Grösse. Es wird von Grassmann **inneres Produkt** von a und b genannt und mit $[a|b]$ bezeichnet; Resal und Somoff nennen es **geometrisches Produkt** von a und b und schreiben dafür $\overline{ab}$. Für solche Produkte gilt der Satz: $\overline{ab} = \overline{ba}$. Denn es besteht, wenn (Fig. 131) $MA = a$, $MB = b$, $MA' = a \cos \alpha$, $MB' = b \cos \alpha$ ist, wegen des Antiparallelismus der Perpendikel AA' und BB' oder der Aehnlichkeit der Dreiecke MAA' und MBB' die Relation

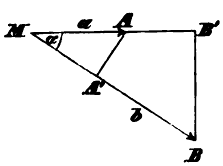

Fig. 131.

$$MA \, . \, MB' = MB \, . \, MA' \, .$$

Ferner, wenn

$$[s] = [a] + [b] + [c] + \cdots \text{ und } [s'] = [a'] + [b'] + [c'] + \cdots$$

zwei geometrische Summen sind, ist

$$\overline{ss'} = \overline{aa'} + \overline{ba'} + \overline{ca'} + \cdots + \overline{ab'} + \overline{bb'} + \overline{cb'} + \cdots$$

Denn es ist die Projection von s' auf s gleich der Summe der Projectionen von a', b', c' ... auf s, d. h.

$$ss' \cos (ss') = sa' \cos (sa') + sb' \cos (sb') + sc' \cos (sc') + \cdots$$

d. h.

$$\overline{ss'} = \overline{sa'} + \overline{sb'} + \overline{sc'} + \cdots$$

Es ist aber $\overline{sa'}$ das Produkt aus a' und der Projection von s auf a'; die Projection von s ist aber die Summe der Projectionen von $a, b, c, \ldots$ auf a'; daher $\overline{sa'} = \overline{aa'} + \overline{ba'} + \overline{ca'} + \cdots$ u. s. f. Reducirt sich $[s]$ oder $[s']$ auf ein einziges Glied $[a]$ oder $[a']$, so wird

$$\overline{ss'} = \overline{aa'} + \overline{ab'} + \overline{ac'} + \cdots = \overline{a'a} + \overline{a'b} + \overline{a'c} + \cdots$$

Die Elementararbeit der Beschleunigung $\varphi \cos \alpha \,.\, ds$ ist ein geometrisches Produkt aus φ und ds. Ist die Beschleunigung φ die Resultante verschiedener Beschleunigungen, nämlich $[\varphi] = [\varphi_1] + [\varphi_2] + \cdots$, so ist $\overline{\varphi \,.\, ds} = \overline{\varphi_1 ds} + \overline{\varphi_2 ds} + \cdots$ d. h. die Elementararbeit der Resultanten ist die Summe der Elementarbeiten der Componenten. Dasselbe findet statt, wenn $\overline{ds} = \overline{ds_1} + \overline{ds_2} + \cdots$, d. h. wenn die Elementarverschiebung die geometrische Summe von verschiedenen anderen Verschiebungen $ds_1, ds_2, \ldots$ ist.

§. 12. Die Elementararbeit $\varphi \cos \alpha \,.\, ds = \varphi \,.\, MN \,.\cos \alpha$ (Fig. 132) kann man umgestalten, indem man in M auf MN die Normale MO errichtet, und $MN = MO \,.\, d\vartheta$ als durch Rotation des Punktes M um irgend einen Punkt der Normalen beschrieben auffasst. Es ist nämlich in dem Ausdrucke der Elementararbeit $\varphi \,.\, MO \,.\cos \alpha \,.\, d\vartheta$ die Grösse $MO \,.\cos \alpha$ das von O auf φ gefällte Perpendikel p und dieselbe also gleich $\varphi p \,.\, d\vartheta$. Das Produkt φp ist aber das Moment der Beschleunigung in Bezug auf den Punkt O.

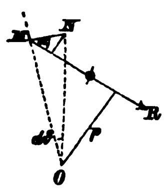
Fig. 132.

§. 13. Es seien (Fig. 133) $MV = v$, $M'V' = v' = v + dv$ die Geschwindigkeiten des beweglichen Punktes in M und M' zu den Zeiten t und $t + dt$, sowie $MQ = du = \varphi dt$ die Elementarbeschleunigung zur Zeit t, so dass die Diagonale MV' des Parallelogramms $MVV'Q$ gleich v' wird. Fällt man von einem Punkte O der Schmiegungsebene (der Ebene des Parallelogramms) die Perpendikel $OP = p$, $O\pi = \varpi$ und $OP_1 = p_1$ auf die Seiten und die Diagonale der Figur, so ist nach Th. I., Cap. III., §. 4 das Moment der Diagonale gleich der Summe der Momente der Seiten, nämlich

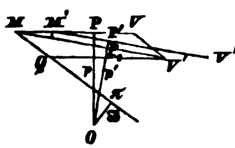
Fig. 133.

$$MV' \,.\, p_1 = MV \,.\, p + MQ \,.\, \varpi \,.$$

Es ist aber das auf $M'V'$ gefällte Perpendikel $OP' = p'$ nur um unendlich kleines, nämlich $ds\, d\varepsilon$, wenn $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel bedeutet, von p_1 verschieden, so dass $p_1 = p' + ds\, d\varepsilon$. Daher geht diese Gleichung in

$$v'(p' \pm ds\, d\varepsilon) = vp + \varphi dt \,.\, \varpi \quad \text{oder} \quad v'p' - vp \pm v' ds\, d\varepsilon = \varphi dt\, \varpi$$

über, woraus in der Grenze

$$d(vp) = \varphi \varpi dt \quad \text{oder} \quad \frac{d(vp)}{dt} = \varphi \varpi .$$

wird; d. h.:

Das Moment der Beschleunigung in Bezug auf irgend einen Punkt in der Schmiegungsebene der Bahn ist die Derivirte und das Moment der Elementarbeschleunigung ist das Differential des Momentes der Geschwindigkeit für denselben Punkt, nach der Zeit genommen.

Ist die Bahn eine ebene Curve, so liegt der Punkt O in allen Schmiegungsebenen, in diesem Falle kann die Gleichung integrirt werden und erhält man

$$vp - v_0 p_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi \varpi dt,$$

d. h.:

Bei jeder ebenen Bewegung ist die Aenderung des Momentes der Geschwindigkeit in Bezug auf irgend einen Punkt der Ebene der Bahn, welche dieselbe innerhalb des Zeitintervalles $t - t_0$ erleidet, gleich dem Integrale des Momentes der Elementarbeschleunigung ausgedehnt über dasselbe Zeitintervall.

Geht die Beschleunigung insbesondere fortwährend durch ein und denselben Punkt, so ist, wenn man diesen als Punkt O betrachtet $\varpi = 0$ und folglich

$$vp = v_0 p_0, \quad v = \frac{v_0 p_0}{p},$$

d. h.:

Bei jeder ebenen Bewegung, bei welcher die Beschleunigung fortwährend nach einem festen Punkte gerichtet ist, bleibt das Moment der Geschwindigkeit in Bezug auf diesen Punkt constant und ist mithin die Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Abstande der Tangente von diesem Punkte. Ein Beispiel hiezu bot die elliptische Bewegung, welche wir §. 2. behandelten, dar.

Berührt die Richtung der Beschleunigung fortwährend einen Kreis, so ist für dessen Mittelpunkt als Mittelpunkt der Momente ϖ constant und geht die obige Gleichung über in

$$vp - v_0 p_0 = \varpi \int_{t_0}^{t} \varphi dt.$$

Das Moment der Geschwindigkeit vp lässt sich noch etwas anders deuten.

Setzt man nämlich für v seinen Werth $\frac{ds}{dt}$, so wird dasselbe $vp = \frac{pds}{dt}$. Es ist aber pds der doppelte Inhalt des unendlich schmalen Sectors $OMM' = 2dS$ (Fig. 134), welchen der Radiusvector OM im Zeitelemente durchläuft, wo S den endlichen, in der Zeit $t - t_0$ durchlaufenen Sector bezeichnen soll. Man erhält nach §. 13.

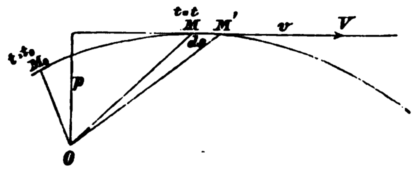

Fig. 134.

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \tfrac{1}{2} \varphi \varpi$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{dS}{dt} - \left(\frac{dS}{dt}\right)_{t_0} = \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \varphi \varpi \, dt,$$

d. h.: Die Aenderung der Sectorengeschwindigkeit während eines Zeitintervalles $t - t_0$ ist die Hälfte des Integrals vom Momente der Beschleunigung in Bezug auf den Pol der Radienvectoren.

Bezeichnen wir die Sectorengeschwindigkeit mit η, so dass

$$\eta = \frac{dS}{dt}$$

ist, so wird die Grösse

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Wir wollen diese Grösse, die Derivirte der Sectorengeschwindigkeit nach der Zeit, die Sectorenbeschleunigung nennen und sie mit ψ bezeichnen. Sie wird also definirt durch die Gleichung:

$$\psi = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen $\psi = \frac{d\eta}{dt}$, $\eta = \frac{dS}{dt}$ folgt durch Elimination von dt

$$\frac{d \,.\, \frac{1}{2}\eta^2}{dS} = \psi, \quad d \,.\, \tfrac{1}{2}\eta^2 = \psi dS,$$

und hieraus weiter:

$$\tfrac{1}{2}\eta^2 - \tfrac{1}{2}\eta_0^2 = \int_{S_0}^{S} \psi dS,$$

eine Gleichung, welche der Gleichung $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{s_0}^{s} \varphi ds$ als Analogon zur Seite steht. ψdS dürfte die Elementararbeit der Sectorenbewegung genannt werden.

Ist die Beschleunigung fortwährend nach einem festen Punkte gerichtet, so ist für diesen als Centrum, wegen $\varpi = 0$,

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{t_0},$$

d. h.:

Bei jeder ebenen Bewegung, für welche die Beschleunigung fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet ist, ist in Bezug auf dieses die Sectorengeschwindigkeit constant.

Aus dieser Gleichung folgt weiter, wenn diese Constante mit c bezeichnet wird

$$S - S_0 = c(t - t_0)$$

d. h.:

Bei derselben Bewegung ist der in irgend einem Zeitraume von dem Radiusvector, welcher vom festen Centrum nach dem beweglichen Punkte gezogen werden kann, durchlaufene Sector dieser Zeit proportional. Die constante Sectorengeschwindigkeit gibt den in der Zeiteinheit durchlaufenen Sector an.

Der letztere Satz führt den Namen des Princips der Flächen. Er kann umgekehrt werden, nämlich:

Ist bei einer ebenen Bewegung der vom Radiusvector durchlaufene Sector der Zeit proportional, so ist die Beschleunigung nach dem Ursprunge der Radienvectoren gerichtet.

Denn aus der Bedingung $S - S_0 = c(t - t_0)$ folgt $\frac{dS}{dt} = c$, $\frac{d^2S}{dt^2} = 0$, mithin $\frac{1}{2}\varphi\varpi = 0$ d. h. $\varpi = 0$.

Von den vorstehenden Sätzen werden wir später sehr nützliche Anwendungen machen; vorzugsweise werden sie auf die Projectionen räumlicher Bewegungen auf Ebenen Anwendung finden.

IX. Capitel.

Probleme der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

§. 1. Ist die Normalbeschleunigung φ_n der Bewegung eines Punktes gleich Null und reducirt sich folglich die totale Beschleunigung φ auf die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$, so ist die Bewegung geradlinig und der Hodograph eine gerade Linie, parallel der Bahn des Punktes. Für jede geradlinige Bewegung bestehen daher unabhängig von der individuellen Natur der Bewegung zwischen den vier Grössen s, v, φ, t, nämlich zwischen dem Abstande des beweglichen Punktes von irgend einem Punkte seiner Bahn, der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der Zeit die beiden Gleichungen: $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$. Tritt hiezu noch eine weitere Gleichung $\Phi(s, v, \varphi, t) = 0$ zwischen denselben Grössen, welche die individuelle Natur der Bewegung bestimmt, so dient das System dieser drei Gleichungen dazu, um drei dieser Grössen als Functionen der vierten zu finden. Durch dasselbe kann also die Aufgabe gelöst werden: die Beschaffenheit der durch die Gleichung $\Phi = 0$ definirten geradlinigen Bewegung analytisch zu erforschen. Die Lösung dieser Aufgabe kommt im Allgemeinen auf die Integration einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen zwei Variabeln zurück; eliminirt man nämlich aus dem System der drei Gleichungen die Grössen v und φ, so bleibt die Gleichung $\Phi\left(s, \frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}, t\right) = 0$ und nur in dem besonderen Falle, dass $\Phi = 0$ die Beschleunigung φ nicht enthält, wird dieselbe von der ersten Ordnung oder geht in eine algebraische Gleichung über, wenn in ihr ausser φ auch die Geschwindigkeit v fehlt. Die Integration dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung oder des Systems der drei Gleichungen führt zwei willkürliche Constanten ein und um diese zu bestimmen, müssen noch zwei weitere specielle Bedingungen gegeben sein. Diese findet man darin, dass für irgend eine Zeit t_0, deren Werth in den meisten Fällen gleich Null angenommen werden kann, die Werthe s_0, v_0 von s, v bekannt sind. Hat man nach Ausführung der Integration mit ihrer Hülfe diese Constanten bestimmt, so ist die Aufgabe über die Bewegung des Punktes im Allgemeinen als gelöst zu betrachten.

Die Gleichung $\Phi = 0$ umfasst 11 Spezialfälle, welche sich in drei Gruppen bringen lassen, je nachdem nämlich in ihr nur 2, oder 3 oder alle vier Grössen s, v, φ, t vorkommen. Die erste dieser Gruppen enthält 6 Einzelfälle, da zwei der vier Grössen auf 6 Arten mit einander verbunden werden können, die zweite 4 solche, da vier Grössen 4 Combinationen zu dreien bilden können, die dritte Gruppe enthält blos einen Fall. Diese Gruppen sind:

I. Gruppe:	II. Gruppe:	III. Gruppe:
1. $\Phi(\varphi, t) = 0$	1. $\Phi(\varphi, s, t) = 0$	1. $\Phi(\varphi, v, s, t) = 0$.
2. $\Phi(\varphi, s) = 0$	2. $\Phi(\varphi, v, t) = 0$	
3. $\Phi(\varphi, v) = 0$	3. $\Phi(\varphi, s, v) = 0$	
4. $\Phi(v, t) = 0$	4. $\Phi(s, v, t) = 0$	
5. $\Phi(v, s) = 0$		
6. $\Phi(s, t) = 0$		

Jeder dieser 11 Spezialfälle entspricht einer bestimmten Aufgabe.

I. Gruppe.

1. Fall. Aus der Gleichung $\Phi(\varphi, t) = 0$ ziehen wir $\varphi = F(t)$. Das zu integrirende Gleichungssystem:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = F(t)$$

löst die Aufgabe: *Wenn für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung φ als Function der Zeit gegeben ist, die Geschwindigkeit v und den Abstand s des beweglichen Punktes von einem beliebigen festen Anfangspunkte der Bahn als Functionen der Zeit zu finden.*

Aus der 2 und 3. Gleichung erhält man $\frac{dv}{dt} = F(t)$, mithin

$$v - v_0 = \int_{t}^{t_0} F(t)\, dt,$$

wenn v_0, t_0 ein Paar zusammengehörige Werthe von v und t sind. Indem man diese Gleichung mit der ersten verbindet, erhält man weiter

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)\, dt$$

und folglich

$$s - s_0 = v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} F(t)\, dt,$$

wenn s_0 der der Zeit t_0 entsprechende Werth von s ist.

Auch kann man unmittelbar die Gleichung $\frac{d^2 s}{dt^2} = F(t)$ behandeln, die durch Elimination von v und dv sich ergibt, was auf dasselbe hinauskommt.

2. Fall. Aus der Gleichung $\Phi(\varphi, s) = 0$ entnehmen wir $\varphi = F(s)$, so dass das zu integrirende Gleichungssystem:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = F(s)$$

die Aufgabe zum Gegenstande hat: *Wenn für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung φ als Function des Abstandes s des beweglichen Punktes von einem Punkte der Bahn gegeben ist, die Geschwindigkeit, welche der Punkt in dem Abstande s besitzt und die Zeit, welche derselbe gebraucht, um diesen Abstand zu erreichen, zu finden.*

Um die Geschwindigkeit v als Function von s zu finden, eliminiren wir dt, so dass $\frac{d \cdot \frac{1}{2} v^2}{ds} = F(s)$ und folglich $\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_{s_0}^{s} F(s)\, ds$ wird, wo v_0 und s_0 zusammengehörige Werthe von v und s sind. Diese Gleichung ist nichts anderes als der Satz über die Arbeit der Beschleunigung längs des Weges $s - s_0$. Aus derselben folgt v und mit dessen Hülfe aus der ersten, nämlich

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^{s} F(s)\, ds}$$

sofort

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} F(s)\,ds}},$$

wenn t_0 und s_0 zusammengehörige Werthe von t und s sind. Aus der letzten Gleichung folgt noch durch Umkehrung s als Function von t und hiermit auch v als Function dieser Grösse. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung wäre in diesem Falle $\frac{d^2 s}{dt^2} = F(s)$. Man reducirt sie auf die erste Ordnung durch die Substitution $\frac{ds}{dt} = v$, wodurch sie die Form $\frac{dv}{dt} = F(s)$ oder $\frac{v\,dv}{ds} = F(s)$ annimmt.

3. **Fall.** Die Gleichung $\Phi(\varphi, v) = 0$ liefert $\varphi = F(v)$ und hiermit das System

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = F(v),$$

dessen Integration die Aufgabe löst: **Wenn für eine geradlinige Bewegung die Beschleunigung als Function der Geschwindigkeit bekannt ist, die Abhängigkeit von Zeit und Abstand von der Geschwindigkeit darzustellen.**

Man erhält zunächst $\frac{dv}{dt} = F(v)$ und hieraus $t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)}$. Um s zu finden, eliminirt man dt, welches $\frac{v\,dv}{ds} = F(v)$ und $s - s_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)}$ gibt; hiermit sind v und s als Functionen von t zu finden. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems wäre: $\frac{d^2 s}{dt^2} = F\left(\frac{ds}{dt}\right)$.

4. **Fall.** Die Gleichung $\Phi(v, t) = 0$ liefert $v = F(t)$. Es ist in diesem Falle das Gleichungssystem

$$\frac{ds}{dt} = F(t), \quad F'(t) = \varphi, \quad v = F(t)$$

und bleibt blos s als Function von t zu finden, nämlich: $s - s_0 = \int_{t_0}^{t} F(t)\,dt$.

Die Beschleunigung ergibt sich durch Differentiation. Das Gleichungssystem löst die Aufgabe: **Wenn für eine geradlinige Bewegung die Geschwindigkeit als Function der Zeit gegeben ist, den Abstand s und die Beschleunigung φ gleichfalls als Functionen der Zeit zu finden.**

5. **Fall.** Die Gleichung $\Phi(v, s) = 0$ gibt $v = F(s)$ und hiermit

$$\frac{ds}{dt} = v = F(s), \quad \frac{dv}{dt} = \varphi$$

und der Sinn der Aufgabe ist: **Wenn für eine geradlinige Bewegung die Geschwindigkeit als Function des Abstandes gegeben ist, die Beschleunigung und Zeit als Functionen desselben darzustellen.**

Man hat $t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{F(s)}$ und $\varphi = F'(s) \cdot F(s)$. — Kann man aus der Gleichung $\Phi(v, s) = 0$ leicht $s = \psi(v)$ ziehen, so hat man das System

$$s = \psi(v), \quad \frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi$$

zu behandeln. Hierzu erhält man aus den beiden ersten Gleichungen $\psi'(v) \frac{dv}{dt} = v$, also $t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{\psi'(v)\, dv}{v}$ u. s. w.

6. Fall. Die Gleichung $\Phi(s, t) = 0$ gibt $s = F(t)$ und das Gleichungssystem erfordert blos die Differentiation, um v und φ als Functionen der Zeit darzustellen.

II. Gruppe.

1. Fall. $\Phi(\varphi, s, t) = 0$. Das zu integrirende Gleichungssystem löst die Aufgabe: Wenn für eine geradlinige Bewegung eine Relation zwischen der Beschleunigung, dem Abstande und der Zeit gegeben ist, die Natur der Bewegung zu untersuchen. Man gelangt zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, s, t\right) = 0$, durch deren einmalige Integration eine Gleichung der Form $F\left(\frac{ds}{dt}, s, t\right) = C$ gefunden wird. Die Constante bestimmt sich durch die Bedingung, dass $v = \frac{ds}{dt}$ in v_0 und s in s_0 für $t = t_0$ übergeht, so dass $F(v_0, s_0, t_0) = C$. Die zweite Integration liefert ein Resultat von der Form $\psi(s, t, C) = C'$ und wird der Werth von C' auf dieselbe Weise, wie der von C bestimmt, nämlich $\psi(s_0, t_0, C) = C'$. Im Allgemeinen gehört der vorliegende Fall zu den schwierigeren, da es keine allgemeinen Reductionsmittel gibt, welche die Gleichung der zweiten Ordnung auf die erste Ordnung zurückführt, wenn in derselben ausser der unabhängigen Variabeln t auch die zu bestimmende Function s selbst vorkommt.

2. Fall. $\Phi(\varphi, v, t) = 0$. Das Gleichungssystem, dessen Sinn die Lösung der Aufgabe verlangt: Wenn für eine geradlinige Bewegung eine Relation zwischen der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der Zeit gegeben ist, die Beschaffenheit der Bewegung zu erforschen, liefert die Gleichung $\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, t\right) = 0$, welche immer auf die erste Ordnung zurückgeführt wird, indem man den niedrigsten Differentialquotienten als neue Variable einführt, weil nämlich eine der Grössen s, t, hier s, fehlt. Diese Gleichung erster Ordnung ist: $\Phi\left(\frac{dv}{dt}, v, t\right) = 0$. Sie liefert $F(v, t) = C$, wobei $F(v_0, t_0) = C$ und weiter, indem man $v = \frac{ds}{dt}$ setzt und abermals integrirt: $\psi(s, t, C) = C'$, wobei $\psi(s_0, t_0, C) = C'$.

3. Fall. $\Phi(\varphi, s, v) = 0$. Das Gleichungssystem liefert die Gleichung zwei-

ter Ordnung $\Phi\left(\frac{d^2 s}{d t^2}, \frac{d s}{d t}, s\right) = 0$, sie sinkt auf die erste Ordnung herab, indem man $v = \frac{ds}{dt}$ als neue Variabele einführt, d. h. $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}$ setzt. Die so zu gewinnende Gleichung, welche auch aus dem System erhalten wird, indem man φ und t eliminirt, ist: $\Phi\left(v\,\frac{dv}{ds}, v, s\right) = 0$, u. s. w.

4. Fall. $\Phi(v, s, t) = 0$. Das Gleichungssystem erfordert blos die Integration der Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi\left(\frac{ds}{dt}, s, t\right) = 0$, das in dem Gleichungssystem ausgesprochene Problem also auch nur die Bestimmung einer Constanten, welche mit Hülfe von s_0, t_0 erfolgt. Die Bestimmung der Beschleunigung nimmt blos die Differentiation in Anspruch.

III. Gruppe.

Der einzige hier vorliegende Fall $\Phi(\varphi, v, s, t) = 0$, behandelt die Frage: Wenn für eine geradlinige Bewegung zwischen der Beschleunigung, der Geschwindigkeit, dem Abstande und der Zeit eine Relation gegeben ist, die Bewegung zu untersuchen. Die Gleichung zweiter Ordnung, das Resultat der Elimination von v und φ, ist $\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, s, t\right) = 0$. Sie ist im Allgemeinen nicht unmittelbar auf die erste Ordnung reducirbar, doch gibt es grössere Gruppen von Gleichungsformen dieser Art, wie die lineären und die homogenen Gleichungen, deren Integration nach bestimmten Principien geleistet werden kann. Die Bestimmung der beiden Integrationsconstanten erfolgt, wie früher.

§. 2. Beispiele.

1. Die Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung sei fortwährend Null. Das System $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi = 0$ liefert

$$v = v_0, \quad s - s_0 = v_0 t.$$

Die Bewegung ist gleichförmig.

2. Die Beschleunigung sei constant, gleich α und habe mit der Geschwindigkeit v_0 zur Zeit t_0 gleichen Sinn. Das Gleichungssystem $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi = \alpha$ gibt nach Gruppe I, Fall 1:

$$v - v_0 = \alpha(t - t_0), \quad s - s_0 = v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2.$$

Die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte. Die Elimination von t liefert $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \alpha(s - s_0)$; die von α liefert $s - s_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0)$. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man $t_0 = 0$ setzen, d. h. die Zeit von dem Momente an zählen, wo $v = v_0$. Die Formeln werden dann etwas einfacher, nämlich, wenn man zugleich noch die Abstände s von dem Punkte M_0 an zählt, in welchem sich der bewegliche Punkt zur Zeit $t = 0$ befindet (Anfangslage), wodurch $s_0 = 0$ wird:

$$v = v_0 + \alpha t, \quad s = v_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \quad s = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t, \quad \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \alpha s.$$

Ist insbesondere noch $v_0 = 0$, d. h. geht der Punkt von M_0 ohne Anfangsgeschwindigkeit ab, so ist $v = \alpha t$, $s = \frac{1}{2}\alpha t^2$, $s = \frac{1}{2}vt$, $\frac{1}{2}v^2 = \alpha s$.

Die Bewegung ist durch folgende Umstände charakterisirt: Die Geschwindigkeit wächst der Zeit proportional, ihre Zunahme beträgt für jede Zeiteinheit α; die Geschwindigkeitscurve ist eine gegen die Axe der t unter einem Winkel $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\alpha$ geneigte Gerade. Der Abstand s wird durch den Inhalt des Trapezes gemessen, welches von der Geschwindigkeitslinie, der Axe der t und den beiden Ordinaten v_0 und v gebildet wird; die Curve der Abstände s ist eine Parabel. Geht der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit ab, so wachsen die Abstände dem Quadrate der Zeit proportional und die in den aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten durchlaufenen Räume, wie die ungeraden Zahlen, es sind nämlich die Räume, welche resp. in der 1., 2., 3., ... t^{ten} Zeiteinheit durchlaufen werden $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{3}{2}\alpha$, $\frac{5}{2}\alpha$ ..... $\frac{1}{2}(2t-1)\alpha$. Die Arbeit der Beschleunigung längs des Weges s ist αs.

Die Physik lehrt, dass die Punkte der Körper, welche mit Translationsbewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit im luftleeren Raume aus mässigen Höhen zur Erde fallen, eine Bewegung besitzen, deren Projection auf die Vertikale des Ortes, von dem sie ausgehen, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung ist, und dass die Beschleunigung α derselben im Mittel 9,81 Meter beträgt. Ein Punkt, welcher von dieser nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Beschleunigung afficirt wird, heisst ein schwerer Punkt, weil die Ursache des Fallens zur Erde die Schwere heisst. Die Beschleunigung 9,81 heisst die Beschleunigung der Schwere und ihr Werth wird im Allgemeinen mit g bezeichnet. Derselbe variirt etwas mit der Erhebung über die Erdoberfläche oder vielmehr mit der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde und in Folge dessen mit der geographischen Breite, da die Erde keine Kugel ist. In der Theorie der Kräfte wird hiervon ausführlicher gehandelt werden. Für den fallenden schweren Punkt sind obige Formeln $v = v_0 + gt$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, $v^2 - v_0^2 = 2gs$ oder spezieller $v = gt$, $s = \frac{1}{2}gt^2$, $v^2 = 2gs$. An diese Gleichungen, von denen jede als eine Folge der beiden andern angesehen werden kann, knüpfen sich leichte Aufgaben zwischen den 4 Elementen g, t, v, s, sowie weitere zwischen den 5 Elementen g, v_0, t, v, s an.

3. Die Beschleunigung eines geradlinig sich bewegenden Punktes sei constant, aber von entgegengesetztem Sinne mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Um einen bestimmten Fall zu behandeln, sei der Punkt schwer, also $\alpha = g$ und v_0 vertikal aufwärts gerichtet. Für diese vertikal aufsteigende Bewegung hat man das Gleichungssystem: $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, $\varphi = -g$ und es sei ferner $v = v_0$ und $s = 0$ für $t = 0$. Aus demselben erhält man: $v - v_0 = -gt$, $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t$, $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = -gs$; die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte, die Geschwindigkeit nimmt in jeder Zeiteinheit um g ab und wechselt nach einer gewissen Zeit den Sinn; der durchlaufene Raum s wird erhalten, wenn man von dem Raume $v_0 t$, welchen der Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 gleichförmig in t Zeiteinheiten zurücklegen würde, den Raum $\frac{1}{2}gt^2$ abzieht, den er in derselben Zeit vertikal durchfallen würde. Die Arbeit der Beschleunigung ist während des Aufsteigens negativ, nämlich $-gs$. Hieran knüpfen sich folgende Fragen: *a*) Wie lange steigt der Punkt auf, d. h. wann wird seine Geschwindigkeit Null? Die Zeit T des Aufsteigens folgt aus $v_0 - gT = 0$ nämlich $T = \frac{v_0}{g}$, wie sich von selbst versteht, da die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit um g abnimmt, also nach $\frac{v_0}{g}$ Zeiteinheiten erschöpft ist. *b*) Wie hoch steigt der Punkt? Die Steighöhe H folgt aus $\frac{1}{2}v_0^2 - gH = 0$, ist also

$$H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2} v_0 T,$$

d. h. der Punkt steigt nur auf die Hälfte der Höhe, welche er in der Zeit T mit constanter Geschwindigkeit v_0 erreichen würde. Nach der Zeit T fällt der Punkt wieder, da ihn die Beschleunigung g fortwährend vertikal abwärts afficirt; von diesem Momente an ist die Bewegung die in Nr. 2. *c*) Wenn der Punkt, nachdem er $T = \frac{v_0}{g}$ Zeiteinheiten gestiegen, hierauf T Zeiteinheiten gefallen ist, welche Tiefe H' hat er erreicht? $H' = \frac{1}{2} g T^2 = \frac{1}{2} v_0 T = H$. Er ist mithin an dem Punkte wieder angelangt, von dem er ausging. *d*) Wenn er, nachdem er die Höhe H erstiegen, um H hierauf gefallen ist, welche Zeit ist während des Fallens verflossen? u. s. w. — Hieran lässt sich ein Schema für Aufgaben über v_0, g, s, v, t und v_0, g, H, T anreihen, wie unter Nr. 2. — Die Formel $H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ gibt Veranlassung zu einer vielfach üblichen Benennung. Vermöge derselben kann man nämlich zu jeder Geschwindigkeit die Höhe finden, welche ein Punkt mit ihr als Anfangsgeschwindigkeit ersteigen kann, oder was dasselbe ist, von welcher er ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgefallen sein müsste, um jene Geschwindigkeit durch die Beschleunigung der Schwere zu erlangen. Man nennt diese Höhe die Geschwindigkeitshöhe. Die Geschwindigkeitshöhe ist demnach der Quotient aus dem Quadrate der Geschwindigkeit durch die doppelte Beschleunigung der Schwere.

4. Ein Punkt sei zwei Beschleunigungen unterworfen, welche beide in die Richtung der Vertikalen fallen, die eine sei die Beschleunigung g der Schwere, welche ihn abwärts treibt, die andere ψ sei vertikal aufwärts gerichtet und sei dem Quadrate der Geschwindigkeit des Punktes proportional (Beschleunigung eines Widerstandes). Wenn nun der Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, welche Bewegung wird er annehmen?

Es sei $\psi = \varepsilon v^2$. Um ε durch g auszudrücken, sei k der Werth von v, bei welchem $\psi = \varepsilon k^2 = g$ werden würde. Die Elimination von ε gibt $\psi = g\,\frac{v^2}{k^2}$. Die Resultante beider Beschleunigungen ist, wenn ihr positiver Sinn vertikal abwärts gerechnet wird: $\varphi = g - \psi = g \cdot \frac{k^2 - v^2}{k^2}$ und hiermit ist also das Gleichungssystem des Problems:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = g\,\frac{k^2 - v^2}{k^2}.$$

Aus diesem suchen wir zunächst: 1. die Geschwindigkeit v als Function der Zeit, 2. den durchlaufenen Raum s als Function der Zeit und 3. denselben Raum als Function der Geschwindigkeit.

Für die Beantwortung der ersten Frage hat man die Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} = g\,\frac{k^2 - v^2}{k^2},$$

oder etwas zweckmässiger geschrieben:

$$\frac{2g}{k}\frac{dt}{dv} = \frac{2k}{k^2 - v^2} = \frac{k - v + k + v}{k^2 - v^2} = \frac{1}{k + v} + \frac{1}{k - v}$$

und hieraus mit Rücksicht darauf, dass $v = 0$ für $t = 0$ ist, durch Integration

$$t = \frac{k}{2g}\, l \cdot \frac{k+v}{k-v}\,.$$

Entnimmt man hieraus $\frac{k+v}{k-v} = e^{\frac{2g}{k}t}$, so erhält man leicht durch Addition und Substraction von 1, nachherige Division der Resultate in einander und schliessliche Multiplication mit $e^{-\frac{g}{k}t}$ im Zähler und Nenner

$$v = k \cdot \frac{e^{\frac{g}{k}t} - e^{-\frac{g}{k}t}}{e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}}.$$

Hinsichtlich der zweiten Frage erhält man mit diesem Werthe von v den Raum s aus der Gleichung $\frac{ds}{dt} = v$. Da der Zähler von v bis auf den Faktor $\frac{g}{k}$ der Differentialquotient des Nenners ist; so erhält man, indem man diesen Faktor zusetzt und mit dem reciproken Werthe $\frac{k}{g}$ desselben multiplicirt:

$$s = \frac{k^2}{g}\, l \cdot \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}\right).$$

Um endlich die gesuchte dritte Gleichung zu erlangen, würde man aus den beiden eben gefundenen t eliminiren können, allein man gelangt dazu ebenso leicht, wenn man aus dem gegebenen Gleichungssystem dt eliminirt und die dadurch erhaltene Gleichung $\frac{ds}{dv} = \frac{k^2}{2g} \cdot \frac{2v}{k^2 - v^2}$ mit Rücksicht auf die Nebenbedingung $v = 0$ für $t = 0$ integrirt. Dies Verfahren liefert

$$s = \frac{k^2}{2g}\, l \cdot \frac{k^2}{k^2 - v^2}.$$

Aus diesen Entwickelungen zieht man nun nachstehende Folgerungen:

Da die Exponentialgrösse $e^{-\frac{g}{k}t}$ mit wachsender Zeit sich der Null nähert, so nähert sich die Geschwindigkeit der Grösse k als Grenze und da k constant ist, so folgt, dass die Bewegung im weiteren Verlaufe sich immer mehr der gleichförmigen Beschaffenheit nähert. Es wurde oben k als die Geschwindigkeit eingeführt, bei welcher die Beschleunigung ψ des Widerstandes gleich g werden würde. Soll dies eintreten, so muss $\varphi = g - \psi = 0$, d. h. die Bewegung gleichförmig werden. Die geführte Untersuchung zeigt, dass dieser Zustand nicht wirklich erreicht wird, sondern nur eine asymptotische Annäherung an ihn stattfindet.

Für sehr grosse t findet man einen Näherungswerth für s, indem man $e^{-\frac{g}{k}t}$ der Null gleich setzt. Dadurch nimmt die Formel für s die Gestalt an

$$s = kt - \frac{k^2}{g}\, l 2.$$

Ein Punkt, welcher sich mit der Geschwindigkeit k gleichförmig von demselben Anfangspunkte aus, wie der gegebene bewegte, würde in der Zeit t den Raum kt durchlaufen, dieser Punkt wäre nach einer sehr grossen Zeit dem gegebenen Punkte um die Strecke $\frac{k^2}{g}\, l2$ vorausgeeilt.

Die Gleichung $\varphi = g \cdot \frac{k^2 - v^2}{k^2} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right)$ zeigt, dass für $k = \infty$ die hier vorliegende Bewegung in die Fallbewegung eines schweren Punktes übergehen muss, indem $\varphi = g$ wird. Es ist daher nicht uninteressant zu sehen, wie die Formeln für v und s in diesem Falle sich auf $v = gt$ und $s = \frac{1}{2}gt^2$ reduciren. Was zunächst v betrifft, welches für $k = \infty$ die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$ annimmt, so hat man, da der Nenner sich der Grenze 2 nähert, blos zu suchen:

$$lim \left\{ k\left(e^{\frac{g}{k}t} - e^{-\frac{g}{k}t}\right)\right\}.$$

Dies ist aber identisch mit

$$gt \cdot \lim \frac{e^{\frac{g}{k}t} - e^{-\frac{g}{k}t}}{\frac{g}{k}t} = gt \lim \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{\omega},\ \lim \omega = 0.$$

Die Differentiation von Zähler und Nenner zeigt, dass der Werth des Ausdrucks unter dem Zeichen *lim* die Zahl 2 ist; daher ist der Werth des ganzen Ausdruckes $2gt$ und damit reducirt sich v auf gt. Zu demselben Resultate führt auch die Gleichung $t = \cdot \frac{k}{2g}\, l\left(\frac{k+v}{k-v}\right)$; indem man sie nämlich auf die Form bringt: $gt = \frac{1}{2}\, l \frac{\left(1 + \frac{v}{k}\right)^k}{\left(1 - \frac{v}{k}\right)^k}$ und bedenkt, dass für wachsende k der Grenzwerth $\lim \left(1 \pm \frac{v}{k}\right)^k = e^{\pm v}$ ist.

Der Ausdruck für s als Function von t nimmt für $k = \infty$ gleichfalls die Form $\infty \cdot 0$ an, man findet aber seine Grenze leicht folgendermassen.

Man hat nämlich, indem man mit gt^2 multiplicirt und dividirt

$$\lim s = gt^2 \cdot \lim \frac{l \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\frac{g}{k}t} + e^{-\frac{g}{k}t}\right)}{\left(\frac{g}{k}t\right)^2} = gt^2 \,.\, \lim \frac{l \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right)}{\omega^2},\ \lim \omega = 0.$$

Der wahre Werth des Bruches unter dem Zeichen *lim* ist aber $\frac{1}{2}$ und daher ergibt sich schliesslich $s = \frac{1}{2}gt^2$.

Auch die dritte Gleichung kann leicht zur Grenze für wachsende k übergeführt werden. Schreibt man sie nämlich so:

$$2gs = l \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{-v^2}{k^2}\right)^{k^2}}$$

und bedenkt, dass $\lim \left(1 + \frac{u}{\omega}\right)^{\omega} = e^{u}$ ist, so erhält man: $2gs = l \cdot \frac{1}{e - v^2}$ oder $2gs = v^2$.

Die Arbeit der Beschleunigung $\varphi = g\,\frac{k^2 - v^2}{k^2}$ ergibt sich aus der Gleichung $s = \frac{k^2}{2g}\,l\,\frac{k^2}{k^2 - v^2}$, welche liefert: $\frac{k^2 - v^2}{k^2} = e^{-\frac{2gs}{k^2}} = \frac{1}{g}\cdot\varphi$ als:

$$\int\limits_0^s \varphi\,ds = g\int\limits_0^s e^{-\frac{2g}{k^2}s}\,ds = \tfrac{1}{2}k^2\left(1 - e^{-\frac{2g}{k^2}s}\right).$$

Da die Arbeit der Beschleunigung der Schwere gs ist, so ist die des Widerstandes $\frac{1}{2}k^2\left(1 - e^{-\frac{2g}{k^2}s}\right) - gs$. Die Arbeit von φ nähert sich mit wachsendem s der Grenze $\frac{1}{2}k^2$.

Es ist bekannt, dass, wenn ein Körper sich in einem flüssigen oder gasförmigen Mittel bewegt, seine Bewegung durch den Einfluss des Mittels modificirt wird und eine andere ist, als sie sein würde, wenn das Mittel nicht vorhanden wäre. Wenn der Körper als ein unveränderliches System angesehen wird, so besteht seine Bewegung jeden Augenblick aus einer Elementarschraubenbewegung, welche in die Translation eines seiner Punkte und eine Rotation um eine zur Schraubenaxe parallele, durch jenen Punkt gehende Axe zerfällt werden kann. Spätere Untersuchungen werden zeigen, dass man mit Vortheil einen bestimmten Punkt des Systems zu jenem Punkte wählt, den Schwerpunkt, oder Mittelpunkt der Massen und dass derselbe sich so bewegt, als ob an ihm sämmtliche, die verschiedenen Punkte des Systems afficirenden Beschleunigungen vereinigt wären und er die Masse des ganzen Systems enthielte. Wenn nun der Einfluss des widerstehenden Mittels den verschiedenen Punkten der Oberfläche verschiedene Beschleunigungen ertheilt, so setzen sich diese dennoch an jenem Punkte zu einer Resultanten zusammen und von dieser ist die Rede, wenn man von der Beschleunigung des Widerstandes redet. Uebrigens gelten diese Betrachtungen auch noch, wenn der Körper immer kleiner und kleiner angenommen und schliesslich zu einem Punkte wird. Diese Beschleunigung ist stets dem Sinne der Geschwindigkeit entgegengesetzt und wirkt also verzögernd. Sorgfältige Experimente haben gezeigt, dass dieselbe der Dichtigkeit ϱ des Mittels, d. h. der in der Volumeneinheit enthaltenen Menge Materie und einer Function Ω der Geschwindigkeit proportional ist, welche für nicht sehr langsame und sehr rasche Bewegungen v^2 ist, so dass die Beschleunigung ψ des Widerstandes durch $\psi = a\varrho\Omega$ ausgedrückt wird, worin der Coefficient a den Werth von ψ für $\varrho = 1$ und $\Omega = 1$ ausdrückt. Newton fand, dass für Kugeln dieser Coefficient der Oberfläche proportional ist und da diese selbst dem Quadrate ihres Radius r proportional ist, durch $a = br^2$ dargestellt werden kann, wodurch $\psi = br^2\varrho\Omega$ wird. Der Coefficient b hängt übrigens von der physischen Beschaffenheit der Kugel ab und ist umgekehrt proportional der Masse derselben, d. h. der Menge Materie, welche sie enthält. Ist daher δ die Menge Materie einer Volumeneinheit, so wäre

$$b = \frac{\beta}{\frac{4}{3}\pi r^3\,.\,\delta},$$

oder wenn man noch mit g multiplicirt und dividirt und $\frac{\beta}{g} = \lambda$ setzt,

$$b = g\,\frac{3\lambda}{4\delta\pi r^3}.$$

Hiermit wird

$$\psi = g \cdot \tfrac{3}{4}\frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\varrho}{\delta r} \cdot \Omega = g \frac{\gamma \varrho}{\delta r} \Omega,$$

wenn $\gamma = \frac{3}{4}\frac{\lambda}{\pi}$ und endlich $\psi = \frac{g}{k^2}\Omega$, wenn $k = \sqrt{\frac{\delta r}{\varrho \gamma}}$. Die letzte Gleichung gibt den Ausdruck für k, welcher in der obigen Untersuchung eine Rolle spielt; die Annahme $k = \infty$, welche die Fallbewegung im widerstehenden Mittel in die freie Fallbewegung im luftleeren Raume überführte, entspricht, wie man hieraus sieht, dem Werthe $\varrho = 0$, d. h. der Annahme, dass in jeder Volumeneinheit des Mediums keine Materie enthalten sei.

5. **Ein schwerer Punkt steige mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 im widerstehenden Mittel vertikal auf; die Beschleunigung des Widerstandes ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, welche Bewegung wird der Punkt annehmen?**

In diesem Falle haben die Beschleunigungen der Schwere und des Widerstandes gleichen, aber mit der Geschwindigkeit entgegengesetzten Sinn. Wird also der positive Sinn vertikal aufwärts gerechnet, so ist $\varphi = -g - g\frac{v^2}{k^2} = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}$ und hiermit das zu integrirende Gleichungssystem:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}.$$

Wir behandeln zunächst wieder die drei Fragen der vorigen Aufgabe. Um die Geschwindigkeit als Function der Zeit darzustellen, hat man aus $\frac{dv}{dt} = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}$ die Gleichung $\frac{g}{k}t = k\int_v^{v_0}\frac{dv}{k^2+v^2}$ d. h. $\frac{g}{k}t = \operatorname{Arctg}\frac{v_0}{k} - \operatorname{Arctg}\frac{v}{k}$ und hieraus $\operatorname{Arctg}\frac{v}{k} = \operatorname{Arctg}\frac{v_0}{k} - \frac{g}{k}t$ und folglich wenn man von beiden Seiten Tangenten nimmt: $\frac{v}{k} = \operatorname{tg}\left\{\operatorname{Arctg}\frac{v_0}{k} - \frac{g}{k}t\right\} = \dfrac{\frac{v_0}{k} - \operatorname{tg}\frac{g}{k}t}{1 + \frac{v_0}{k}\operatorname{tg}\frac{g}{k}t}$ und hiermit,

$$v = k \cdot \frac{v_0 \cos\frac{g}{k}t - k\sin\frac{g}{k}t}{v_0\sin\frac{g}{k}t + k\cos\frac{g}{k}t} = \frac{k^2}{g}\frac{d}{dt}l\left[v_0\sin\frac{g}{k}t + k\cos\frac{g}{k}t\right].$$

Hiermit liefert $\frac{ds}{dt} = v$ sofort s als Function von t, nämlich

$$s = \frac{k^2}{g}l \cdot \frac{1}{k}\left[v_0\sin\frac{g}{k}t + k\cos\frac{g}{k}t\right].$$

Den Ausdruck für s als Function von v erhält man durch die Gleichung $\frac{v\,dv}{ds} = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}$, nämlich $2gs = k^2\int_v^{v_0}\frac{d\,.\,v^2}{k^2+v^2}$ d. h.

$$s = \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}l \cdot \frac{k^2+v_0^2}{k^2+v^2}.$$

An diese Formeln lässt sich die Beantwortung folgender Fragen anknüpfen: *a*) Wie lange steigt der Punkt? Für die Zeit T des Aufsteigens ist in der ersten Gleichung $\frac{g}{k}\,t = \operatorname{Arctg}\frac{v_0}{k} - \operatorname{Arctg}\frac{v}{k}$ die Geschwindigkeit $v = 0$ zu setzen; dies liefert $T = \frac{k}{g}\cdot\operatorname{Arctg}\frac{v_0}{k}\cdot$ *b*) Bis zu welcher Höhe H steigt der Punkt auf? Man findet aus der Gleichung $s = \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}\,l\cdot\frac{k^2+v_0^2}{k^2+v^2}$ für $v = 0$ die Höhe

$$H = \frac{1}{2}\frac{k^2}{g}\,l\cdot\frac{k^2+v_0^2}{k^2}.$$

c) Wenn der Punkt auf der Höhe H angelangt, wieder zu fallen beginnt, mit welcher Geschwindigkeit v_1 langt er am Fusse der Höhe H an und welches ist das Verhältniss $\frac{v_1}{v}$? Der Formel $s = \frac{k^2}{2g}\,l\cdot\frac{k^2}{k^2-v^2}$ gemäss hat man hierfür

$$H = \frac{k^2}{2g}\,l\cdot\frac{k^2}{k^2-v_1^2},$$

woraus v_1 folgt. Durch Vergleichung dieses und des vorigen Ausdruckes für H ergibt sich für das Verhältniss der Geschwindigkeiten: $\frac{v_1}{v_0} = \frac{k}{\sqrt{v_0^2+k^2}}$, es ist mithin $v_1 < v_0$ und kommt der Punkt, nachdem er zur Höhe H aufgestiegen, am Fusse derselben mit einer kleineren Geschwindigkeit an, als die ist, mit welcher er von dort aufstieg. *c*) Welche Zeit T' braucht der Punkt, um die Höhe H zu durchfallen? Setzt man in der Formel $t = \frac{k}{2g}\,l\cdot\frac{k+v}{k-v}$ in Nr. 4 für v den Werth $v_1 = \frac{v_0 k}{\sqrt{v_0^2+k^2}}$ ein, so ergibt sich aus derselben

$$T' = \frac{k}{g}\,l\cdot\frac{v_0+\sqrt{v_0^2+k^2}}{k}.$$

Hiernach ist die ganze Zeit $\mathfrak{T}$, nach welcher der Punkt zu seinem Ausgangspunkte zurückgekehrt sein wird:

$$\mathfrak{T} = T + T' = \frac{k}{g}\left\{\operatorname{Arctg}\frac{v_0}{g} + l\cdot\frac{v_0+\sqrt{v_0^2+k^2}}{k}\right\}.$$

d) Welche Arbeit leistet die Beschleunigung φ längs des Weges s?

Die Vergleichung der Formeln für die Beschleunigung φ bei der vorliegenden und der vorigen Aufgabe, nämlich

$$\varphi = -g\frac{k^2+v^2}{k^2}, \qquad \varphi = g\frac{k^2-v^2}{k^2}$$

zeigt, dass man die eine Untersuchung in die Form der andern einkleiden kann, wenn man $k\sqrt{-1}$ für k setzt und den Sinn der Beschleunigung umkehrt, welches letztere erreicht wird, indem man $-g$ an die Stelle von g treten lässt. Die Exponentialfunctionen setzen sich dann in trigonometrische, und diese in jene um, die Logarithmen in Kreisfunctionen und umgekehrt. Durch Einführung der Gudermann'schen hyperbolischen Functionen kann dieses Umschlagen der Functionen in einander präciser ausgedrückt werden.

6. **Ein beweglicher Punkt wird von einer Beschleunigung afficirt, welche fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und dem**

Quadrate seines Abstandes von diesem umgekehrt proportional ist. Der Punkt hat keine Anfangsgeschwindigkeit, welches ist seine Bewegung?

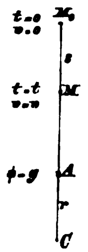

Fig. 135.

Ist $M_0 C = a$ (Fig. 135) die Entfernung des Punktes vom Centrum C zur Zeit $t = 0$ und $M_0 M = s$ der in der Zeit t durchlaufene Weg, so wird $\varphi = \frac{\varepsilon}{(a-s)^2}$. Ist $\varphi = g$ in der Entfernung $AC = r$, so dass also $g = \frac{\varepsilon}{r^2}$, so wird $\varphi = g \cdot \frac{r^2}{(a-s)^2}$, wenn ε eliminirt wird. Daher ist das Gleichungssystem des Problems:

$$\frac{ds}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = \varphi, \qquad \varphi = g \cdot \frac{r^2}{(a-s)^2}.$$

Durch Elimination von dt, oder, was dasselbe ist, durch Anwendung des Satzes von der Arbeit der Beschleunigung erhält man $d \cdot \frac{1}{2} v^2 = g r^2 \frac{ds}{(a-s)^2}$ und folglich, da $v = 0$ für $s = 0$ ist:

$$v^2 = 2 g r^2 \int_0^s \frac{ds}{(a-s)^2} = \frac{2 g r^2}{a} \cdot \frac{s}{a-s}.$$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt M in A ankommt, indem man $s = a - r = M_0 A = h$ setzt:

$$v = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}.$$

Ist daher die Entfernung h nicht beträchtlich, so ist a nur wenig von r verschieden; es ist dann die Geschwindigkeit v nahezu gleich $\sqrt{2gh}$, also ebenso gross, als wenn die Beschleunigung φ constant gleich g wäre.

Um die Relation zwischen s und t zu finden, hat man mit Hülfe der Gleichung $\frac{ds}{dt} = v$:

$$\sqrt{\frac{2 g r^2}{a}} \cdot dt = ds \sqrt{\frac{a-s}{s}} = ds \cdot \frac{a-s}{\sqrt{s(a-s)}} = \frac{\frac{1}{2} a \, ds}{\sqrt{as - s^2}} + \frac{(\frac{1}{2} a - s)\, ds}{\sqrt{as - s^2}}$$

$= d \,.\, \sqrt{as - s^2} + \frac{1}{2} a \, d \cdot \operatorname{Arc\,cos} \frac{\frac{1}{2} a - s}{\frac{1}{2} a}$ und folglich, da $s = 0$ für $t = 0$ ist:

$$\sqrt{\frac{2 g r^2}{a}} \cdot t = \tfrac{1}{2} a \operatorname{Arc\,cos} \frac{\frac{1}{2} a - s}{\frac{1}{2} a} + \sqrt{as - s^2}.$$

Diese Gleichung ist nicht auflösbar nach s, doch kann man durch folgende geometrische Construction zu jedem t das zugehörige s finden. Beschreibt man über dem Anfangsabstande $M_0 C = a$ (Fig. 136) als Durchmesser einen Kreis und errichtet im Endpunkte M von $M_0 M = s$ auf $M_0 C$ das Perpendikel Mm, so ist dessen Länge:

$$Mm = \sqrt{s(a-s)}$$

und der Bogen

$$M_0 m = \tfrac{1}{2} a \cdot \operatorname{Arc\,cos} \frac{\frac{1}{2} a - s}{\frac{1}{2} a},$$

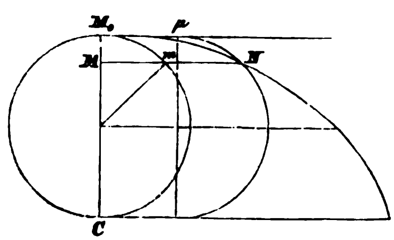

Fig. 136.

so dass, wenn der Kreis senkrecht zu $M_0 C$ um die Strecke $M_0 \mu = M_0 m$ parallel mit sich verschoben wird, wodurch der Punkt m nach N gelangt,

$$MN = \tfrac{1}{2} a \text{ Arc cos } \frac{\frac{1}{2} a - s}{\frac{1}{2} a} + \sqrt{as - s^2}$$

wird. Die Curve AN, welche von dem Punkte m beschrieben wird, wenn der Kreis sich um seinen Mittelpunkt dreht und parallel mit sich fortschreitet, oder was dasselbe ist, auf dem in C auf CM_0 errichteten Perpendikel rollt, ist eine Cycloïde und wenn die zur Abcisse $M_0 M = s$ gehörige Ordinate MN mit y bezeichnet wird, so wird $\sqrt{\frac{2gr^2}{a}} \cdot t = y$ die Länge, welche in die Figur einzutragen ist, um die der Zeit t entsprechende Strecke s zu bestimmen.

Die Newton'sche Theorie der Anziehung und die Beobachtung haben übereinstimmend gezeigt, dass die Beschleunigung der Schwere bei der Erhebung über die Oberfläche der Erde mit dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte derselben abnimmt. Unsere Aufgabe behandelt daher den Fall eines schweren Punktes im leeren Raume von beträchtlichen Höhen. Für den Fall des Punktes ins Innere der Erde gilt jedoch diese Entwickelung nicht, denn hierfür ist die Beschleunigung des fallenden Punktes nicht mehr umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte, sondern direkt proportional der ersten Potenz dieser Entfernung, wie später gezeigt werden wird.

7. Die Beschleunigung eines Punktes sei fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und der Entfernung des Punktes von demselben proportional; wenn nun der Punkt zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ und den Abstand a von dem Centrum besitzt, welches wird seine Bewegung sein? Ist x (Fig. 137) der Abstand vom Centrum zur Zeit t, so ist, wenn die Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Richtung $M_0 C$ nach dem Centrum hin von der Anfangslage aus als positiv gerechnet werden: $\varphi = k^2 x$, wo k^2 leicht durch g ausgedrückt werden kann. Das Gleichungssystem der Aufgabe ist daher, wenn $M_0 M = s$

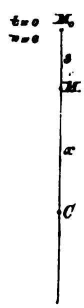

Fig. 137.

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = k^2 x, \text{ wobei } s + x = a.$$

Eliminirt man φ und v, so kommt zunächst $\frac{d^2 s}{dt^2} = k^2 x$, oder da $\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$ ist:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0.$$

Dieser linearen Gleichung mit constanten Coefficienten genügt als Particulärlösung $x = e^{\alpha t}$, wenn α eine Wurzel der quadratischen Gleichung $\alpha^2 + k^2 = 0$ ist, welche Gleichung sich durch Einsetzen der Exponentialfunction in die gegebene Differentialgleichung ergibt. Hieraus folgt $\alpha = \pm ki$ und mithin sind e^{kit} und e^{-kit} Partikulärlösungen. Aus beiden bildet sich daher das allgemeine Integral $x = Ce^{kti} + C' e^{-kti}$ mit den beiden Integrationsconstanten C, C'. Dasselbe kann, indem man die Exponentialfunctionen durch die gleichbedeutenden Verbindungen der geometrischen Functionen ersetzt, unter der Form $x = A \cos kt + B \sin kt$ dargestellt werden. Daher erhält man

$$x = a - s = A \cos kt + B \sin kt, \quad v = Ak \sin kt - Bk \cos kt$$

und die Bedingungsgleichungen für die Constanten sind, weil $v = 0$ und $s = 0$ für $t = 0$:

$$0 = a - A, \quad 0 = Bk.$$

Daher ist endlich:

$$s = a - a \cos kt, \quad x = a \cos kt, \quad v = ak \sin kt.$$

Die Bewegung ist die bereits im Cap. VIII, §. 4. erläuterte oscillirende Bewegung, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ist. Ihren Gesetzen würde ein Punkt folgen, welcher etwa durch eine enge Oeffnung ins Innere der Erde eindringen könnte.

Man kann die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$ auch mit Hülfe des Satzes über die Elementarbeit integriren. Denn es ist $d \cdot \frac{1}{2} v^2 = \varphi\, ds = -k^2 x\, dx$, also $v^2 = -k^2x^2 + C$ und da $v = 0$, für $s = 0$ ist: $v = k\sqrt{a^2 - x^2}$. Mit Hülfe von $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ ergibt sich dann weiter $kt = \text{Arc} \cos \frac{x}{a}$ d. h. $x = a \cos kt$.

§. 3. Unter den Aufgaben, welche hierher gehören und deren man eine reiche Auswahl in dem vortrefflichen Werke von *Jullien: Problèmes de mécanique rationnelle*, p. 264—292 findet, sind von besonderem Interesse die, welche dem Falle $\Phi(s, v, \varphi) = 0$ der zweiten Gruppe angehören. In diese Kategorie gehören viele Probleme über die geradlinige Bewegung eines Punktes im widerstehenden Mittel, für welches die Beschleunigung des Widerstandes eine bekannte Function der Geschwindigkeit ist. Für den besonderen Fall, dass $\varphi = f(s) + \Omega(s) \,.\, v^2$ ist, wo $f(s)$ und $\Omega(s)$ beliebige Functionen des Abstandes sind, ist die Differentialgleichung zweiter Ordnung des Problems, nämlich

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f(s) + \Omega(s) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

immer auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung reducirbar.

Setzt man nämlich $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = u$, so wird

$$2\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{du}{dt} = v\,\frac{du}{ds}, \text{ d. h. } \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{du}{ds}$$

und hiemit die Gleichung

$$\frac{du}{ds} - 2\,\Omega(s) \,.\, u - 2 f(s) = 0,$$

welche linear ist und leicht integrirt wird, indem man sie mit einer unbestimmten Function $\psi(s)$ multiplicirt und diese so bestimmt, dass

$$\psi(s)\,\frac{du}{ds} - 2\,\Omega(s)\,\psi(s) \,.\, u$$

die Form des Differentialquotienten eines Produkts

$$\frac{d(\lambda\mu)}{ds} = \lambda\,\frac{d\mu}{ds} + \mu\,\frac{d\lambda}{ds}$$

annimmt.

Auf einen anderen allgemeinen Fall wurde von Liouville (Journ. de Mathémat. I. Serie, T. VII, p. 134) aufmerksam gemacht, nämlich auf Probleme, welche die Gleichung erfüllen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + f(t)\,\frac{ds}{dt} + F(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0.$$

Sie kann nach der Methode der Variation der Constanten behandelt werden, indem man die Constante, welche das Integral der linearen Gleichung

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + f(t)\,\frac{ds}{dt} = 0$$

enthält, als Function von s ansieht.

§. 4. Die Hauptlehren über die geradlinige, wie über die krummlinige Bewegung eines Punktes wurden bereits 1686 von Newton in seinem Werke „*Principia philosophiae naturalis*“ mit Hülfe geometrischer Methoden entwickelt. Das Gleichungssystem $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{dv}{dt} = \varphi$, welches Aufgaben über die geradlinige Bewegung zu lösen geeignet ist, mit den gleichbedeutenden Formeln

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi, \quad \frac{d \cdot \frac{1}{2} v^2}{ds} = \varphi$$

findet sich zuerst bei Varignon (*Mém. de l'Acad. des sciences de Paris, année* 1700 p. 20). Die letztgenannte Formel, nach welcher die Beschleunigung der Derivirten des halben Quadrates der Geschwindigkeit gleich ist, wurde von Daniel Bernoulli angezweifelt, welcher annahm, dass die Beschleunigung der Derivirten einer anderen Potenz der Geschwindigkeit, als der zweiten proportional sein könne (*Commentarii Academ. Petropol. a.* 1727, p. 136). Euler widerlegte in seiner *Mechanica*, T. I, p. 62 seqq. diese irrige Ansicht.

X. Capitel.

Probleme der krummlinigen Bewegung eines Punktes.

§. 1. Für die Projectionen einer beliebigen Bewegung eines Punktes auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen bestehen die Relationen

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z; \quad \frac{dv_x}{dt} = \varphi_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = \varphi_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = \varphi_z.$$

Treten zu diesen noch drei Gleichungen hinzu, durch welche die Grössen $x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ den individuellen Bedingungen der Bewegung gemäss beschränkt werden, so dient das System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \varphi_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = \varphi_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = \varphi_z,$$

$$\Phi_1(x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0,$$
$$\Phi_2(x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0,$$
$$\Phi_3(x, y, z, t, v_x, v_y, v_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = 0,$$

dazu, die Beschaffenheit der durch die Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$

näher bestimmten Bewegung analytisch zu untersuchen. Indem man v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z eliminirt, erhält man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

vorausgesetzt, dass die Gleichungen $\Phi_x = 0, \ldots$ nach den Componenten der Beschleunigung auflösbar sind. In diesen sind X, Y, Z als drei aus den Bedingungen der Bewegung abzuleitende Functionen von

$x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ anzusehen. Man nennt diese drei Gleichungen die Gleichungen der Bewegung des Punktes und gelangt durch ihre Integration zu den Componenten der Geschwindigkeit und den Coordinaten des beweglichen Punktes als Functionen der Zeit, während sie selbst die Componenten der Beschleunigung bestimmen. Die Integration dieser Gleichungen führt 6 willkürliche Constanten ein und wenn die Lösung der Aufgabe vollkommen allgemein sein soll, so muss sie dieselben nothwendig erhalten. Für die Bestimmung dieser Constanten müssen daher noch 6 weitere Bedingungen gegeben sein; dieselben findet man, sobald für irgend eine Zeit t_0 die Werthe der Coordinaten x_0, y_0, z_0 des beweglichen Punktes, also sein Ort und die Componenten seiner Geschwindigkeit $v_x^{(0)}$, $v_y^{(0)}$, $v_z^{(0)}$ bekannt sind. Gewöhnlich ist $t_0 = 0$ und sind also $x_0 y_0 z_0$, $v_x^{(0)}$, $v_y^{(0)}$, $v_z^{(0)}$ die Elemente, welche den sogenannten Anfangszustand der Bewegung bestimmen. Es kann der Fall eintreten, dass die Functionen X, Y, Z selbst noch unbekannte Bestandtheile enthalten; in diesen Fällen müssen noch weitere Bestimmungen vorhanden sein; derartige Fälle, zu welchen die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn oder auf einer gegebenen Fläche gehören, schliessen wir hier vorläufig aus, weil wir wenigstens die beiden eben bezeichneten von ihnen in zwei besonderen Capiteln behandeln werden.

§. 2. Um die Nothwendigkeit der 6 Integrationsconstanten darzuthun, wollen wir das System der Differentialgleichungen zweiter Ordnung bilden, welchem durch drei Gleichungen mit 6 Constanten C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 von der Form:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) &= 0, \\ F_2(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) &= 0, \\ F_3(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3) &= 0 \end{aligned}$$

genügt wird. Denkt man diese Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, wodurch sie die Form annehmen

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3), \\ y &= f_2(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3), \\ z &= f_3(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3), \end{aligned}$$

so liefert eine zweimalige Differentiation derselben

$$\frac{dx}{dt} = f'_1(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f''_1(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3),$$
$$\frac{dy}{dt} = f'_2(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = f''_2(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3),$$
$$\frac{dz}{dt} = f'_3(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = f''_3(t, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3).$$

Aus diesen 6 und den drei ursprünglichen Gleichungen kann man nun aber die 6 Constanten C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3 eliminiren und es bleiben alsdann drei Gleichungen von der Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Psi_1\left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Psi_2\left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \Psi_3\left(x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

welche jene Grössen nicht mehr enthalten und die Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind, welchen die gegebenen Gleichungen als Integrale entsprechen. Hieraus erhellt zunächst, dass die Integrale eines Systems dreier Differentialgleichungen der zweiten Ordnung sechs willkürliche Constanten enthalten können. Mehr als sechs können sie nicht enthalten, weil man aus 9 Gleichungen nur 6 Grössen eliminiren kann, wenn drei Gleichungen übrig bleiben sollen, welche frei von diesen sind und weil die Differentialgleichungen, welche durch die Combination der 9 Gleichungen wieder erhalten werden müssen, von ihnen frei sind. Weniger können sie auch nicht enthalten, weil sie sonst nicht die allgemeinen Lösungen darstellen würden, da eben bewiesen wurde, dass die Integrale 6 solche Constante enthalten können. Da die ursprünglichen Functionen F_1, F_2, F_3 willkürlich waren, so sind es folglich auch die aus ihnen abgeleiteten Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 und ist der Beweis allgemein, da die Existenz der Integrale der Differentialgleichungen anderweitig feststeht.

§. 3. Um das System der Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

zu integriren, sucht man aus ihnen Combinationen zu bilden, welche die Form haben $\frac{d.\psi}{dt} = 0$, d. h. deren eine Seite Null ist, während die andere ein vollständiges Differential einer Function von $x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ enthält. Gesetzt, man habe drei solche Combinationen ψ_1, ψ_2, ψ_3 gefunden, für welche also

$$\frac{d.\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d.\psi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d.\psi_3}{dt} = 0,$$

so können sie die gegebenen Bewegungsgleichungen vertreten und liefern durch ihre Integration die sogenannten drei ersten Integrale derselben, nämlich:

$$\psi_1 = D_1, \quad \psi_2 = D_2, \quad \psi_3 = D_3.$$

Aus ihnen würde man drei Gleichungen ziehen können von der Form:

$$\frac{dx}{dt} = \Psi_1(x, y, z, t, D_1, D_2, D_3),$$

$$\frac{dy}{dt} = \Psi_2(x, y, z, t, D_1, D_2, D_3),$$

$$\frac{dz}{dt} = \Psi_3(x, y, z, t, D_1, D_2, D_3).$$

Diese Gleichungen enthalten bereits 3 der willkürlichen Constanten. Bildet man nun aus ihnen drei neue Combinationen Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 von derselben Beschaffenheit, wie vorher, nämlich so, dass

$$\frac{d\,.\,\Xi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\,.\,\Xi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\,,\,\Xi_3}{dt} = 0,$$

so können sie diese drei ersten Integrale ersetzen und liefern durch ihre Integration die drei zweiten Integrale der Bewegungsgleichungen nämlich:

$$\Xi_1 = C_1, \quad \Xi_2 = C_2, \quad \Xi_3 = C_3,$$

welche jetzt die 6 willkürlichen Constanten enthalten, welche durch Einsetzen der Werthe

$$t = t_0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \frac{dx}{dt} = v_x^{(0)},\ \frac{dy}{dt} = v_y^{(0)},\ \frac{dz}{dt} = v_z^{(0)},$$

in die Gleichungen

$$\psi_1 = D_1,\ \psi_2 = D_2,\ \psi_3 = D_3,\quad \Xi_1 = C_1,\ \Xi_2 = C_2,\ \Xi_3 = C_3$$

bestimmt werden.

Die Hauptschwierigkeit der Integration der Bewegungsgleichungen beruht in der Auffindung der Functionen ψ_1, ψ_2, ψ_3, Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3. Hierfür dienen in vielen Fällen einige Sätze, welche den Namen der „Principe der Bewegung" führen. Diese Principe sind: 1) das Princip der Flächen, 2) das Princip der lebendigen Kraft, 3) das Princip des letzten Multiplicators. Die beiden ersten sind nichts anderes als analytische Einkleidungen specieller Fälle der Sätze über die Flächen und die Arbeit der Beschleunigung, welche wir im VIII. Capitel entwickelt haben, das dritte ist von Jacobi gefunden worden. Diesen Principien kann man ein weiteres anreihen, welches aber kein Integral der Bewegungsgleichungen, sondern nur einen anderen Ausdruck derselben gibt, das von Maupertuis bemerkte, mit dem nicht zu rechtfertigenden Namen belegte „Princip der kleinsten Wirkung".

Es braucht kaum erinnert zu werden, dass man die drei Bewegungsgleichungen auch ersetzen kann durch die andern

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi_t, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi_n,$$

welchen man die Ausdrücke für ϱ und die Richtungen der Tangente und Hauptnormale zuzufügen hat. Auf diese Weise behandelte man früher die Bewegungsprobleme, bevor Maclaurin die oben gegebenen Gleichungen $\frac{d^2x}{dt^2} = X$, u. s. w. aufstellte (*Treatise of Fluxions*, 1742).

Ebenso können in vielen Fällen ebener Bewegung mit Erfolg die Gleichungen für die Beschleunigungscomponenten φ_r, φ_ϑ längs des Radiusvectors und senkrecht zu demselben benutzt werden, nämlich

$$\varphi_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \quad \varphi_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

(S. Cap. VIII, §. 9.)

Endlich bemerken wir noch, dass für den Fall einer ebenen Bewegung, wenn man die Ebene derselben zu einer Coordinatenebene wählt, die drei Gleichungen der Bewegung sich auf zwei reduciren. Wählt man z. B. die Ebene der Bewegung zur xy-Ebene, so ist die dritte Bewegungsgleichung von selbst erfüllt, indem die Beschleunigung in der Richtung der z-Axe keine Componente besitzt und z zu jeder Zeit Null ist.

§. 4. Um zu dem Princip der Flächen zu gelangen, combinirt man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} &= yZ - zY, \\
z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} &= zX - xZ, \quad \text{d. h.} \\
x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} &= xY - yX,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} y & z \\ \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \\
\begin{vmatrix} z & x \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{d^2x}{dt^2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \\
\begin{vmatrix} x & y \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X & Y \\ x & y \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

indem man nämlich einerseits aus den Coordinaten und ihren zweiten Derivirten, andererseits aus den Coordinaten und den Grössen X, Y, Z die drei Determinanten bildet und resp. einander gleich setzt. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind vollständige Differentialquotienten, so dass man sie schreiben kann:

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = yZ - zY,$$
$$\frac{d}{dt}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = zX - xZ,$$
$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = xY - yX.$$

Ist nun die Beschleunigung φ so beschaffen, dass zwischen den Coordinaten x, y, z und ihren Componenten X, Y, Z eine oder zwei oder drei der Gleichungen

$$yZ - zY = 0,$$
$$zX - xZ = 0,$$
$$xY - yX = 0,$$

erfüllt sind, so liefert die Integration jener Gleichungscombinationen unmittelbar erste Integrale der Bewegungsgleichungen, nämlich

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = D_1,$$
$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = D_2,$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = D_3.$$

Jene drei Bedingungsgleichungen sind nicht von einander unabhängig, vielmehr ist jede eine Folge der beiden andern; so ist z. B. die dritte eine Folge der beiden ersten, wie man sieht, wenn man die erste mit x, die zweite mit y multiplicirt und sie hierauf von einander subtrahirt. Daher erhält man durch die fragliche Combination der Bewegungsgleichungen entweder ein oder drei erste Integrale. Die Bedeutung der Bedingungsgleichungen liegt am Tage. Die dritte z. B. ist identisch mit der Proportion:

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$$

und drückt aus, dass die Projection φ_{xy} der Beschleunigung φ auf die xy-Ebene, deren Componenten X, Y sind, fortwährend durch einen festen Punkt, den Coordinatenursprung, gehe oder das Moment $xY - yX$ von φ_{xy} in Bezug auf ihn verschwinde. Man kann auch sagen, dass diese Bedingung ausdrückt, dass die Beschleunigung φ die z-Axe schneiden müsse. Aehnliches bedeutet jede der beiden anderen Bedingungsgleichungen und sieht man ein, wie es kommt, dass, wenn zwei von ihnen erfüllt sind, die dritte gleichfalls erfüllt ist. Denn, wenn die Projection der Beschleunigung auf zwei Coordinatenebenen durch den Ursprung geht, so geht auch ihre Projection auf die dritte Coordinatenebene durch denselben Punkt. Sind zwei, also alle drei der Bedingungen erfüllt, so geht die Richtung der Beschleunigung selbst durch den Ursprung, d. h. also überhaupt durch einen festen Punkt und ist die Bewegung eine sogenannte Centralbewegung. In diesem Falle ist die Bahn des beweglichen Punktes immer eine ebene Curve, deren Ebene durch das Centrum hindurchgeht. Dies erhellt, wenn man die drei ersten Integrale der Bewegungsgleichungen mit x, y, z der Reihe nach multiplicirt und addirt, wodurch man erhält

$$D_1 x + D_2 y + D_3 z = 0,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, welche von den Coordinaten x, y, z des beweglichen Punktes unabhängig von der Zeit erfüllt wird, in welcher Ebene sich mithin dieser Punkt bewegen muss. Hieraus erhellt zugleich die Bedeutung der drei Constanten D_1, D_2, D_3, welche in den ersten Integralen der Bewegungsgleichungen vorkommen. Sie sind proportional den Cosinussen der Winkel, welche die Normale auf die Ebene der Bewegung mit den Coordinatenaxen bildet.

Es ist leicht, die Bedeutung der ersten Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung in unserem Falle vollständig zu erkennen. Das dritte dieser Integrale z. B. lässt sich so schreiben: $xdy - ydx = D_3 dt$ und drückt aus, dass die Projection des Elementarsectors, welchen das Bogenelement der Bahn mit den nach seinen Endpunkten vom Ursprung gezogenen Radienvectoren bildet, auf die xy-Ebene dem Zeitelemente proportional oder dass die Sectorengeschwindigkeit für die Projectionsbewegung in der xy-Ebene constant ist.

Ist daher $S - S_0$ der in der Zeit $t - t_0$ von dem Radiusvector durchlaufene Sector, dS das Differential desselben und bedeuten dS_z, dS_x, dS_y die Projectionen von dS auf die xy-, yz- und zx-Ebene, welche selbst Differentialien der Projectionen $S_z - S_z^{(0)}$, $S_x - S_x^{(0)}$, $S_y - S_y^{(0)}$ von $S - S_0$ sind, so kann man die drei ersten Integrale der Bewegungsgleichungen so schreiben:

$$\frac{dS_x}{dt} = \tfrac{1}{2} D_1, \quad \frac{dS_y}{dt} = \tfrac{1}{2} D_2, \quad \frac{dS_z}{dt} = \tfrac{1}{2} D_3.$$

Finden zwei dieser Gleichungen statt, so folgt die dritte von selbst, und da $dS^2 = dS_x^2 + dS_y^2 + dS_z^2$ ist, so gilt dasselbe für die Hauptbewegung, so dass

$$\frac{dS}{dt} = \tfrac{1}{2}\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}.$$

Die Grössen D_1, D_2, D_3 bedeuten die doppelten in der Zeiteinheit von den Projectionen des Radiusvectors durchlaufenen Sectoren.

Aus den so interpretirten Gleichungen erhält man als erste Integrale der Bewegungsgleichungen, nämlich:

$$S_x = C_1 + \tfrac{1}{2} D_1 t,$$
$$S_y = C_2 + \tfrac{1}{2} D_2 t,$$
$$S_z = C_3 + \tfrac{1}{2} D_3 t,$$

deren Constanten C_1, C_2, C_3 für $t = t_0$ mit Hülfe der Sectorenwerthe $S_x^{(0)}, S_y^{(0)}, S_z^{(0)}$ bestimmt werden, so dass also schliesslich

$$S_x - S_x^{(0)} = \tfrac{1}{2} D_1 (t - t_0),$$
$$S_y - S_y^{(0)} = \tfrac{1}{2} D_2 (t - t_0),$$
$$S_z - S_z^{(0)} = \tfrac{1}{2} D_3 (t - t_0)$$

und

$$S - S_0 = \tfrac{1}{2} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \,.\, (t - t_0)$$

wird. Die ersten Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung bedeuten also, dass der von der Projection des Radiusvectors durchlaufene Sector der Zeit proportional ist, in welcher er beschrieben wird.

Aus diesen Entwickelungen geht hervor, dass der Satz:

„Wenn für die Bewegung eines Punktes zwischen den Componenten X, Y, Z seiner Beschleunigung parallel drei rechtwinkligen Axen und den Coordinaten x, y, z desselben eine oder zwei der drei Relationen

$$yZ - zY = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad xY - yX = 0$$

bestehen, so können ein oder drei Integrale der Bewegungsgleichungen gefunden werden"
mit Recht den Namen des „Princips der Flächen" führt.

Umgekehrt kann man zeigen, dass, wenn für die Projection der Bewegung auf eine Ebene das Princip der Flächen gilt, die Projection der Beschleunigung auf diese Ebene durch den Coordinatenursprung geht. Denn ist z. B. $S_z - S_z^{(0)} = \alpha (t - t_0)$, so folgt durch Differentiation

$$x dy - y dx = \alpha dt \text{ und } x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \text{ d. h. } \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{x}{y},$$

woraus das Behauptete hervorgeht.

§. 5. Um zu dem Princip der lebendigen Kraft zu gelangen, combiniren wir die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

dadurch, dass wir sie der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ multipliciren und addiren; dies liefert

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2 z}{dt^2} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber der Differentialquotient nach t von

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}v^2;$$

daher kann man die Gleichung so schreiben:

$$\frac{d\,.\,\frac{1}{2}v^2}{dt}-\left[X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right]=0.$$

Ist nun U irgend eine Function von x, y, z und sind diese Variabeln selbst wieder Functionen von t, während U die Grösse t selbst nicht explicit enthält, so liefert die Differentiation nach t

$$\frac{dU}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Diese Form hat der in unserer Gleichung enthaltene Ausdruck

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt};$$

enthalten also die Componenten X, Y, Z blos die Coordinaten x, y, z, nicht aber die Zeit explicit und sind X, Y, Z die Differentialquotienten ein und derselben Function U, partiell genommen nach x, y, z, so dass

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

so wird

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}=\frac{dU}{dt}$$

und mithin geht unsere Combination der Bewegungsgleichungen über in

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2-U)}{dt}=0.$$

Sie liefert daher ein Integral derselben, nämlich

$$\tfrac{1}{2}v^2-U=h,$$

worin die Constante h durch die Werthe v_0, U_0 bestimmt wird, welche die Geschwindigkeit v und die Function U für die Coordinaten x_0, y_0, z_0 irgend einer Stelle der Bahn des beweglichen Punktes annehmen. Hiernach ist

$$\tfrac{1}{2}v_0^2-U_0=h$$

und folglich das gefundene Integral mit bestimmter Constante

$$\tfrac{1}{2}v^2-\tfrac{1}{2}v_0^2=U-U_0.$$

Wir haben daher den überaus wichtigen Satz:

Wenn die Componenten X, Y, Z die Zeit nicht explicit enthalten und eine Function U existirt, von welcher sie die partiellen Differentialquotienten resp. nach den Coordinaten x, y, z

genommen sind, so stellt die Gleichung $\frac{1}{2}v^2 = U + h$ ein Integral der Bewegungsgleichungen dar.

Die Bedingungen der Existenz der Function U sind bekanntlich

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

und sie selbst wird gefunden als das Integral des vollständigen Differentiales $Xdx + Ydy + Zdz$.

Da dx, dy, dz die Projectionen des Elementarweges ds des beweglichen Punktes auf die Richtungen der Beschleunigungscomponenten X, Y, Z sind, so sind Xdx, Ydy, Zdz die Elementararbeiten derselben und ist $Xdx + Ydy + Zdz$ die Elementararbeit ihrer Resultanten, der Beschleunigung φ. Es ist aber $Xdx + Ydy + Zdz = dU$, daher ist U die Function, deren totales Differential in Bezug auf die Coordinaten x, y, z die Elementararbeit der Beschleunigung darstellt, folglich ist $U - U_0$ selbst die totale Arbeit der Beschleunigung längs des Weges, auf welchem der Punkt von der Stelle $(x_0 y_0 z_0)$ zu der Stelle (x, y, z) gelangt. Demnach drückt das Integral in der Form $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = U - U_0$ nichts anderes aus, als den in Cap. VIII, §. 10. entwickelten Satz über die Arbeit der Beschleunigung.

Die Function U wird mit Rücksicht auf ihre Bedeutung für die Theorie der Kräfte die Kräftefunction genannt. In Folge einer nicht gerade sehr glücklich gewählten Bezeichnung von Leibnitz, deren Sinn gleichfalls erst in der Theorie der Kräfte erläutert werden wird, führt der obige Satz den Namen des Princips der lebendigen Kraft; zweckmässiger dürfte er das „Princip der Arbeit" heissen.

In dem besonderen Falle, dass $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ ist, welcher eintritt, wenn entweder die Beschleunigung Null, also $X = Y = Z = 0$ oder normal zur Bahn des Punktes ist, reducirt sich U auf eine Constante und bleibt in Folge dessen die Geschwindigkeit constant; in diesem Falle nennt man das Princip vielfach „Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft".

§. 6. Die Kräftefunction U ist eine Function der Coordinaten x, y, z; im Allgemeinen ändert dieselbe ihren Werth von Punkt zu Punkt. Alle Punkte des Raumes, in welchen die Kräftefunction U denselben Werth c besitzt, liegen auf einer Fläche $U = c$, welche eine Niveaufläche heisst. Lässt man die Constante c nach und nach alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man die ganze Schaar der Niveauflächen des Problems. Die Flächen dieser Schaar schneiden sich im Allgemeinen nicht und erzeugen also keine Enveloppe. Zwei aufeinanderfolgende Niveauflächen sind als parallele Flächen anzusehen. Durch jeden Punkt des Raumes geht im Allgemeinen eine solche Niveaufläche und durch sie wird die Beschleunigung eines beweglichen Punktes an jenem Orte bestimmt; denn die Componenten derselben sind die Werthe, welche die partiellen Differentialquotienten der Kräftefunction U in jenem Orte annehmen. Sind also x, y, z die Coordinaten des Punktes, so ist die Beschleunigung

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

und ihre Richtung (lmn) wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\cos l}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\cos m}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\cos n}{\frac{\partial U}{\partial z}} = \frac{1}{\varphi}.$$

Dies sind aber die Gleichungen für die Richtung der Normalen der Niveaufläche $U = c$, welche durch den Punkt x, y, z geht. Daher besteht der Satz:

Bei jeder Bewegung eines Punktes, für welche eine Kräftefunction existirt, ist die Beschleunigung des beweglichen Punktes in jedem Punkte der Bahn normal zu der Niveaufläche, welche durch denselben hindurchgeht.

Während der bewegliche Punkt seine Bahn beschreibt, geht er continuirlich von einer Niveauflächen zur andern über, die Richtung seiner Geschwindigkeit trifft dabei die Niveauflächen im Allgemeinen unter veränderlichem Winkel, aber die Richtung der Beschleunigung ist immer senkrecht zu der jedesmaligen Niveaufläche. Es sei (Fig. 138) $MM' = ds$ das Bogenelement der Bahn zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen, MF die Richtung der Normalen in M und N deren Schnittpunkt mit der zweiten Niveaufläche und stelle die Länge MF die Beschleunigung φ dar. Das unendlichkleine Dreieck MNM' ist bei N rechtwinklig, mithin ist MN die Projection des Bogenelementes MM' auf die Richtung der Beschleunigung und folglich $MF \,.\, MN$ die Elementararbeit der Beschleunigung. Daher ist

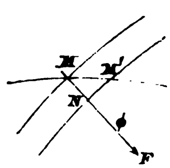

Fig. 138.

$$d \,.\, \tfrac{1}{2} v^2 = \varphi \,.\, \overline{MN} = dU,$$

d. h. Beim Uebergange des Punktes von einer Niveaufläche zur unmittelbar folgenden ist die Aenderung des halben Quadrates der Geschwindigkeit proportional der Dicke der Schicht zwischen beiden Niveauflächen, gemessen in der Richtung der Normalen des Punktes, von welchem aus der Uebergang erfolgt; diese Aenderung ist von der Richtung, in welcher der Punkt die Schicht durchdringt, unabhängig. Die Elementararbeit der Beschleunigung ist der Dicke der Schicht direct, die Beschleunigung ihr umgekehrt proportional.

Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = U - U_0$$

zeigt, dass die Geschwindigkeit v jedesmal denselben Werth annimmt, sobald dies mit der Kräftefunction der Fall ist. So oft daher der bewegliche Punkt im Laufe seiner Bewegung dieselbe Niveaufläche erreicht, hat er auch immer dieselbe Geschwindigkeit. Wenn also der Punkt von einer Stelle M_0 zu einer Stelle M gelangt, so ist die erlangte Geschwindigkeit von der Länge und der Form des Weges, auf welchem er dahin gelangt, unabhängig.

§. 7. Man kann eine Reihe von Fällen von vornherein bezeichnen, in welchen eine Kräftefunction existirt, also $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist. Sie sind folgende:

1) Wenn die Richtung der Beschleunigung zu einer festen Ebene senkrecht und ihre Grösse eine Function $f(\varrho)$ der Entfernung ϱ des beweglichen Punktes von dieser Ebene ist. Sind nämlich α, β, γ die Winkel, welche die Beschleunigungsrichtung mit den Axen bildet und ist ϱ der Abstand des Punktes x, y, z von der gegebenen Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

so hat man

$$X = f(\varrho) \cos\alpha, \quad Y = f(\varrho) \cos\beta, \quad Z = f(\varrho) \cos\gamma;$$

mithin

$$Xdx + Ydy + Zdz = f(\varrho) \left\{ \cos\alpha \,.\, dx + \cos\beta \,.\, dy + \cos\gamma \,.\, dz \right\} \cdot$$

Es ist aber

$$-\varrho = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p,$$

und daher

$$Xdx + Ydy + Zdz = -f(\varrho)\, d\varrho$$

ein vollständiges Differential von

$$U = \int^{\varrho} - f(\varrho)\, d\varrho = \Phi(\varrho) + h.$$

Die Niveauflächen sind in dem vorliegenden Falle Ebenen, parallel der gegebenen Ebene. Denn aus $\Phi(\varrho) + h =$ Const. folgt $\varrho = C$, d. h.

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = C.$$

2) Wenn die Beschleunigung constant ist nach Richtung und Grösse, wie bei der Beschleunigung der Schwere. Wählt man die Richtung der Beschleunigung zur Richtung der positiven z-Axe und bezeichnet ihre Grösse mit g, so wird

$$X = 0, \; Y = 0, \; Z = g, \; dU = g dz, \; U = gz + h, \; U - U_0 = g(z - z_0),$$
$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = g(z - z_0).$$

Die Niveauflächen sind Ebenen $z = c$.

3) Die Beschleunigung ist fortwährend nach einem festen Centrum gerichtet und eine Function der Entfernung des beweglichen Punktes von diesem. Sind die Coordinaten jenes Centrums a, b, c, die des beweglichen Punktes x, y, z und ist r die Entfernung beider, so da

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

so wird

$$Xdx + Ydy + Zdz = -F(r)\left\{\frac{x-a}{r}dx + \frac{y-b}{r}dy + \frac{z-c}{r}dz\right\},$$

oder da

$$rdr = (x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz \text{ ist},$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = -F(r)\,dr,\; U = \int -F(r)dr = \Phi(r) + h.$$

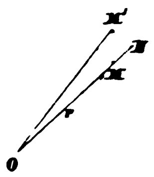

Fig. 139.

Die Niveauflächen sind Kugeln $r = C$ beschrieben um das Centrum der Beschleunigung. Ist die Beschleunigung nicht nach dem Centrum hin, sondern von diesem ab gerichtet, so genügt eine Aenderung des Zeichens von $F(r)$. Man erhält dieselben Resultate direct aus (Fig. 139), in welcher O das feste Centrum, $MM' = ds$ das Bogenelement der Bahn ist. Die Projection MN desselben auf die Beschleunigungsrichtung ist $MN = dr$ und folglich die Elementararbeit bei wachsendem r gleich

$$-F(r)\,dr.$$

4) Die Beschleunigung ist die Resultante mehrerer anderer Beschleunigungen, welche nach festen Centris gerichtet sind. In diesem Falle bildet sich

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

aus einer Summe

$$\pm F(r)\,dr \pm F_1(r_1)\,dr_1 \pm \cdots = \Sigma \pm F(r)\,dr \text{ u. s. w.}$$

§. 8. Das Jacobi'sche Princip des letzten Multiplicators lautet: Wenn ein System von Differentialgleichungen soweit integrirt ist, dass man alle Integrale desselben bis auf eines kennt, so kann das letzte fehlende Integral gefunden werden, indem man den Multiplicator oder integrirenden Factor der letzten noch zu integrirenden Gleichung in allen Fällen anzugeben im Stande ist. Der bedeutende Umfang, welchen die Entwickelung dieses überaus wichtigen Satzes aus der Theorie der Differentialgleichungen beansprucht, wenn sie einigermassen genügend befunden werden soll, nöthigt uns, in Bezug auf denselben auf die Werke über Analysis, sowie auf die „Vorlesungen über Dynamik von Jacobi, herausgegeb. v. Clebsch, Berlin 1866, p. 71 und ffg.“ zu verweisen.

§. 9. Die parabolische Bewegung eines Punktes. Ein Punkt ist einer Beschleunigung von constanter Grösse und Richtung unterworfen; seine Anfangslage, sowie seine Anfangsgeschwindigkeit und deren Richtung sind bekannt; welches wird die Beschaffenheit seiner Bewegung sein?

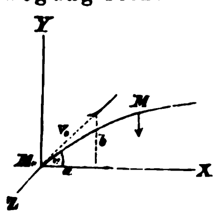

Fig. 140.

Dieser Bewegung folgt ein Punkt, welcher unter gegebener Neigung gegen den Horizont im leeren Raume geschleudert wird. Ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, können wir annehmen, es sei die Beschleunigung φ die vertikal abwärts gerichtete Beschleunigung g der Schwere und bilde die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit dem Horizonte den Winkel α. Die Anfangslage M_0 des beweglichen Punktes sei der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z und zwar sei die xy-Ebene die Verticalebene, welche die Richtung von v_0 enthält, die y-Axe vertikal und positiv nach oben gerichtet, die x-Axe der horizontale Schenkel des Winkels α und die z-Axe gleichfalls horizontal (Fig. 140). Die Componenten der Beschleunigung φ sind $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$ und also die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Die Integration derselben ergibt unmittelbar

$$\frac{dx}{dt} = v_x = D_1, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = D_2 - gt, \quad \frac{dz}{dt} = D_3$$

$$x = C_1 + D_1 t, \quad y = C_2 + D_2 t - \tfrac{1}{2} g t^2, \quad z = C_3 + D_3 t.$$

Sind nun a, b, 0 die Componenten $v_0 \cos\alpha$, $v_0 \sin\alpha$, 0 der Anfangsgeschwindigkeit v_0, so liefern die Bedingungen

$$x = y = z = 0, \quad v_x = a, \quad v_y = b, \quad v_z = 0 \text{ für } t = 0$$

zur Bestimmung der 6 Constanten $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ die Gleichungen

$$a = D_1, \quad b = D_2, \quad 0 = D_3; \quad 0 = C_1 = C_2 = C_3$$

und damit als Lösung des Problems das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= at & v_x &= a \\ y &= bt - \tfrac{1}{2} g t^2 & v_y &= b - gt \\ z &= 0 & v_z &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nachstehende Folgerungen:

1. Die Bewegung erfolgt in der durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit geführten Vertikalebene. Denn es ist für jeden Werth von t die Coordinate $z = 0$. Die Horizontalprojection der Bewegung ist eine gleichförmige geradlinige Bewegung von der Geschwindigkeit $a = v_0 \cos\alpha$; die Projection der Bewegung auf die Vertikale ist gleichförmig veränderlich, beschleunigt oder verzögert, je nach dem Vorzeichen von b.

2. Die Gleichung der Bahn, welche man durch Elimination von t zwischen den Ausdrücken für x und y erhält, ist

$$x^2 - \frac{2ab}{g} x + 2 \frac{a^2}{g} y = 0.$$

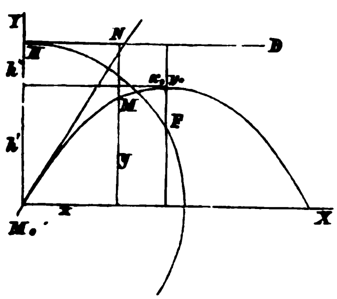

Fig. 141.

Die Bahn ist daher eine Parabel (Fig. 141), welche die Horizontale der Anfangslage in den Punkten $x = 0$ und $x = \frac{2ab}{g}$ schneidet. Die Axe der Parabel ist vertikal und ihr Scheitel hat die Coordinaten

$$x_0 = \frac{ab}{g}, \quad y_0 = \frac{b^2}{2g},$$

wie man erkennt, wenn man die Gleichung auf die Form

$$\left(x - \frac{ab}{g}\right)^2 = -\frac{2a^2}{g}\left(y - \frac{b^2}{2g}\right)$$

bringt. Verlegt man daher den Ursprung des Coordinatensystems in den Scheitel und kehrt den positiven Sinn der y-Axe um, d. h. setzt $x + \frac{ab}{g}$ und $-\left(y - \frac{b^2}{2g}\right)$ an die Stelle von x und y, so erhält man als Scheitelgleichung der Parabel:

$$x^2 = \frac{2a^2}{g} \cdot y.$$

Der Parameter der Parabel ist demnach $\frac{2a^2}{g}$ und da die Directrix um den vierten Theil des Parameters vom Scheitel absteht, so läuft sie in der Höhe

$$h = y_0 + \frac{a^2}{2g} = \frac{a^2 + b^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

mit der Horizontalen parallel. Da diese Höhe blos von v_0, nicht aber von der Neigung α von v_0 gegen den Horizont abhängt, so folgt, dass alle Parabeln, welche von demselben Anfangspunkte aus mit derselben Anfangsgeschwindigkeit unter den verschiedenen Wurfwinkeln von einem schweren Punkte beschrieben werden können, die Directrix gemein haben. Die Höhe $h = \frac{v_0^2}{2g}$ der Directrix über dem Horizonte ist diejenige, zu welcher der bewegliche Punkt vermöge der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal aufsteigen könnte.

Die Wurfweite (doppelte Abscisse des Scheitels) ist $w = \frac{2ab}{g}$, die Wurfhöhe (Ordinate des Scheitels) $y_0 = \frac{b^2}{2g}$.

3. Quadrirt und addirt man die Ausdrücke $v_x = a$, $v_y = b - gt$, so erhält man für die Geschwindigkeit v mit Rücksicht auf $v_0^2 = a^2 + b^2$ und $y = bt - \frac{1}{2}gt^2$:

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = -gy.$$

Diese Gleichung spricht das Princip der lebendigen Kraft aus; auch §. 7 existirt nämlich eine Kräftefunction. Sie ist $U = -gy + C$, da wegen $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$,

$$dU = -gdy$$

wird. $-gdy$ drückt die Elementararbeit und $-gy$ die totale Arbeit der Schwere längs des Weges von der Ordinate Null bis zur Ordinate y aus. Die Elementararbeit $-gdy$ ist negativ, so lange der Punkt steigt, positiv, während er fällt, denn im ersteren Falle ist dy positiv, im letzteren negativ. Die Niveauflächen des Problems sind Horizontalebenen und in den beiden Schnittpunkten einer jeden derselben mit der Bahn besitzt die Geschwindigkeit gleichen Werth, wenn auch verschiedene Richtung. Die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form:

$$v^2 = 2g\left(\frac{v_0^2}{2g} - y\right) = 2g(h - y)$$

geschrieben ergibt, dass die Geschwindigkeit im Punkte M der Bahn dieselbe ist, als ob der Punkt von der Directrix ND bis zur Stelle M gefallen wäre.

4. Die Flugzeit t_0, während welcher die Horizontalprojection des beweglichen Punktes die Wurfweite $w = \frac{2ab}{g}$. zurücklegt und zu deren Ende der Punkt auf die Horizontalebene der Anfangslage auffällt, wird erhalten, indem man w durch die Geschwindigkeit a der Horizontalprojection dividirt. Sie ist demnach

$$t_0 = \frac{2b}{g} = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha,$$

also dem Sinus des Elevationswinkels α proportional.

Die Flugzeit t_1 bis zum Auffallen des Punktes auf eine durch die Anfangslage senkrecht zur Bahnebene und gegen den Horizont unter einem Winkel β geführte Ebene zu finden, hat man die Gleichungen: $y = x \operatorname{tg} \beta$, $x = at$, $y = bt - \frac{1}{2} g t^2$ zu combiniren. Sie ist $t_1 = \frac{2(b - a \operatorname{tg} \beta)}{g}$, welche mit Hülfe von $a = v_0 \cos \alpha$, $b = v_0 \sin \alpha$ die Form annimmt:

$$t_1 = \frac{2 v_0}{g} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

5. Für die Wurfweite w erhielten wir

$$w = \frac{2ab}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Bei constantem v_0 wird dieselbe ein Maximum für $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$, d. h. für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. Für zwei Winkel α' und α'', welche sich zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, ergeben sich gleich grosse Wurfweiten. Denn wenn $\alpha' + \alpha'' = \frac{1}{2}\pi$, so wird

$$\sin 2\alpha' = \sin 2\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha''\right) = \sin 2\alpha''.$$

Für die Wurfweite w_1 auf einer unter dem Winkel β gegen den Horizont geneigten Ebene $y = x \operatorname{tg} \beta$ erhält man, wenn x_1 die Abscisse des Punktes ist, in welchem diese Ebene von der Flugbahn getroffen wird:

$$w_1 = \frac{x_1}{\cos \beta};$$

x_1 ergibt sich aber durch Elimination von t aus den Gleichungen unter Nr. 4; nämlich

$$x_1 = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

und hiermit wird

$$w_1 = \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \frac{\cos \alpha \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \beta}.$$

Diese Grösse wird bei constantem v_0 ein Maximum für

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\beta.$$

Die Richtung dieses Wurfes bildet mithin mit der Vertikalen den Winkel

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \beta\right)$$

und halbirt also den Winkel, welchen die geneigte Ebene mit der Vertikalen bildet.

Für zwei Winkel α' und α'', welche sich zu $\frac{1}{2}\pi + \beta$ ergänzen, werden die entsprechenden Wurfweiten gleich gross. Denn aus $\alpha' + \alpha'' = \frac{1}{2}\pi + \beta$ folgt $\cos \alpha'' = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + \beta - \alpha'\right) = \sin(\alpha' - \beta)$ und $\sin(\alpha'' - \beta) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha'\right) = \cos \alpha'$, mithin $\cos \alpha'' \sin(\alpha'' - \beta) = \cos \alpha' \sin(\alpha' - \beta)$ u. s. w. Von beiden Winkeln liegt der eine um ebensoviel über jenem Maximalwerthe $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta$, als der andere unter demselben; denn aus $\alpha' + \alpha'' = \frac{1}{2}\pi + \beta$ folgt auch

$$\alpha'' - \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\beta\right) = \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\beta\right) - \alpha'.$$

6. Um den Elevationswinkel α zu finden, unter welchem der Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erfolgen muss, damit ein bestimmter gegebener Punkt erreicht werde, dienen folgende Bemerkungen. Liegt der gegebene Punkt in der Horizontalen der Anfangslage in der Entfernung a von ihr, so folgt a aus der Gleichung

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = a$$

mit zwei Lösungen. Die beiden entsprechenden Richtungen, die eine steil, die andre flach, unter welchen der bewegliche Punkt den gegebenen trifft, sind gleich geneigt gegen die Richtung $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ der grössten Wurfweite.

Liegt der zu treffende Punkt nicht im Horizonte, so folgt α aus der Gleichung

$$\frac{2v_0^2}{g} \frac{\cos\alpha \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2\beta} = a,$$

wenn a die Entfernung von der Anfangslage und β die Neigung der Geraden gegen den Horizont bedeutet, welche ihn mit der Anfangslage verbindet. Die beiden Lösungen α', α'' besitzen die unter 5. erwähnte Eigenschaft. Um sie wirklich darzustellen, wollen wir lieber die Coordinaten x, y des zu treffenden Punktes einführen. Er wird erreicht, sobald x, y der Gleichung der Flugbahn genügen. Stellen wir daher die Gleichung unter Nr. 2 so dar, dass wir a, b und v_0 durch α und h ausdrücken, wodurch sie die Form annimmt

$$\sec^2\alpha \,.\, x^2 - 4h \operatorname{tg}\alpha \,.\, x + 4hy = 0,$$

und lösen sie nach tang α auf, so kommt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x}\left(2h \pm \sqrt{4h(h-y) - x^2}\right).$$

Für $4h(h-y) - x^2 < 0$ ist der Punkt nicht mehr zu erreichen; die äussersten Lagen, für welche er noch erreichbar ist, sind die Punkte der Parabel

$$4h(h-y) - x^2 = 0\,.$$

Für Punkte dieser Grenzcurve fallen die beiden Wurfrichtungen in eine zusammen. Durch Verlegung des Coordinatenursprungs um die Grösse h in der Richtung der y und Umkehrung des Sinnes der y-Axe nimmt diese Gleichung die Form

$$x^2 = 4hy$$

an. Man erkennt daraus, dass der Scheitel der Grenzparabel, welche die mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erreichbaren Punkte (x, y) von den nicht erreichbaren scheidet, in der Höhe h vertikal über der Anfangslage, also in der gemeinsamen Directrix aller Flugbahnen und der Brennpunkt in der Anfangslage selbst sich befindet. Ihr Parameter ist $4h$.

7. Die sämmtlichen, den verschiedenen Elevationswinkeln α entsprechenden Parabeln bilden eine Enveloppe, welche nichts anderes ist, als die eben erwähnte Grenzparabel. Nach der Theorie der Enveloppen findet man die Gleichung dieser Curve, indem man die Gleichung der Parabel

$$\sec^2\alpha \,.\, x^2 - 4h \operatorname{tg}\alpha \,.\, x + 4hy = 0$$

nach dem individualisirenden Parameter tg α differentiirt und aus ihr und der so gewonnenen Gleichung α eliminirt. Diese Differentiation liefert

$$\operatorname{tg}\alpha - 2hx = 0$$

und die Elimination von tg α führt zu derselben Gleichung $4h(h-y) - x^2 = 0$, wie unter Nr. 6.

8. Die Anfangslage M_0 des beweglichen Punktes, welche allen den verschiedenen Elevationswinkeln α entsprechenden Parabeln gemein ist, steht von allen Brennpunkten derselben ebensoweit ab, als von ihrer gemeinsamen Directrix, nämlich um die Strecke h. Daher ist der Ort aller Brennpunkte ein um die Anfangslage mit h als Radius beschriebener Kreis (s. Fig. 141).

9. Die Coordinaten des Scheitels einer beliebigen, dem Winkel α entsprechenden Parabel sind nach Nr. 2: $x = \frac{ab}{g}$, $y = \frac{1}{2}\frac{b^2}{g}$ oder, wenn man a und

b durch h und α ausdrückt: $x = h \sin 2\alpha$, $y = h \sin^2 \alpha$. Mit Zuhülfenahme der Relation $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \sin^2 \alpha$ erhält man hieraus, indem man α eliminirt, als Ort der Scheitel sämmtlicher Parabeln die Ellipse

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \frac{(y - \frac{1}{2}h)^2}{(\frac{1}{2}h)^2} = 1,$$

deren Mittelpunkt in der Höhe $\frac{1}{2}h$ über der Anfangslage M_0 liegt und welche eine horizontale Hauptaxe von der Länge $2h$ und eine vertikale Hauptaxe gleich h besitzt. Die Scheitel an den Enden der horizontalen Hauptaxe entsprechen den Würfen $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ und $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

10. Denkt man sich von O aus in einer Vertikalebene unter allen möglichen Winkeln α continuirlich hintereinander Punkte mit der Geschwindigkeit v_0 ausgeworfen, so erhält man alle Parabeln der ganzen Schaar zugleich, wie eine Stralengarbe, welche von einer grösseren Grenzparabel umhüllt wird. Erfolgt dies zugleich in allen Vertikalebenen des Punktes O, so entsteht das Phänomen einer idealen Fontaine. Die äussere Figur derselben ist das Paraboloid, welches durch Rotation der Grenzparabel um die Vertikale gebildet wird und die Scheitel aller Parabeln liegen auf einem Rotationsellipsoid um dieselbe Axe, dessen Aequator die Höhe der Fontaine halbirt.

Die Coordinaten des Punktes einer Vertikalebene, welcher unter dem Winkel α ausgeworfen wurde, nach der Zeit t sind $x = v_0 \cos \alpha \,.\, t$, $y = v_0 \sin \alpha \,.\, t - \frac{1}{2}gt^2$; eliminirt man hieraus α, so erhält man für den Ort aller unter den verschiedenen Winkeln α in der Vertikalebene gleichzeitig abgegangener Punkte zur Zeit t

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 = (v_0 t)^2,$$

der Ort dieser Punkte ist mithin ein Kreis, dessen Mittelpunkt vertikal unter M_0 liegt im Abstande $\frac{1}{2}gt^2$ und einen Radius $v_0 t$ besitzt. Beide Grössen sind von der Zeit abhängig, der Mittelpunkt sinkt von M_0 aus, wie ein schwerer Punkt und der Radius wächst gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_0. Da dieselbe Betrachtung für alle Vertikalebenen gilt, so folgt, dass alle Punkte, welche zu gleicher Zeit von O ausgeworfen werden, fortwährend auf einer veränderlichen Kugelfläche liegen, deren Mittelpunkt wie ein schwerer Punkt sinkt, während ihr Radius gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_0 wächst.

11. Lässt man bei constantem Elevationswinkel α die Anfangsgeschwindigkeit v_0 variiren, so kann eine der vorstehenden Untersuchung coordinirte Untersuchung geführt werden.

Eliminirt man z. B. aus den Gleichungen für die Coordinaten des Scheitels der Flugbahn, nämlich $x = h \sin 2\alpha$, $y = h \sin^2 \alpha$ die Grösse h und damit die Anfangsgeschwindigkeit v_0, so ergibt sich

$$y = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \,.\, x,$$

d. h. der Ort der Scheitel aller Bahnen, welche der bewegliche Punkt unter constantem Elevationswinkel mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten beschreiben kann, ist eine durch die Anfangslage gehende Gerade, welche die vertikalen Strecken zwischen der Horizontalen der Anfangslage und der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit halbirt, so dass also die Horizontale und die Wurfrichtung, die Scheitelgerade und die Vertikale vier harmonische Stralen sind.

Die Coordinaten eines Brennpunktes sind

$$x = h \sin 2\alpha,\ y = h \sin^2 \alpha - h \cos^2 \alpha = -h \cos 2\alpha \cdot$$

Die Elimination von h liefert hier

$$y = -\operatorname{cotg} 2\alpha \,.\, x,$$

d. h. der Ort aller Brennpunkte ist gleichfalls eine durch die Anfangslage gehende Gerade.

12. Viele von den bisher analytisch entwickelten Resultaten kann man leicht auf geometrischem Wege gewinnen, wie folgt.

Es sei M_0 (Fig. 142) die Anfangslage, HD die gemeinschaftliche Directrix aller Parabeln, welche derselben Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ entsprechen, und F der Brennpunkt irgend einer dieser Curven, der also wegen $M_0 F = M_0 H$ auf dem um M_0 mit $M_0 H = h$ beschriebenen Kreise sich befindet. Die Parabel, deren Brennpunkt F ist, schneidet eine Gerade $M_0 G$ in einem Punkte M, dessen Abstände vom Brennpunkte und der Directrix gleich sind, so dass $MF = MN$. Der Punkt M ist daher der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Directrix berührt und durch F geht. Da dieser Kreis den Ort der Brennpunkte im Allgemeinen in zwei Punkten F, F' schneidet, so gibt es noch einen zweiten Brennpunkt F' und also auch noch eine zweite Parabel, welche $M_0 G$ in demselben Punkte M schneidet. Der äusserste Punkt M_1 der Geraden $M_0 G$, welcher von einer der Parabeln noch erreicht werden kann, ist daher der Mittelpunkt des Kreises, welcher die Directrix HD und den Ort der Brennpunkte berührt und der Brennpunkt der zugehörigen Parabel der grössten Wurfweite ist der Berührungspunkt F_0, d. h. der Schnittpunkt von $M_0 G$ mit dem Orte der Brennpunkte. Die Richtung $M_0 T_0$ des äussersten Wurfes halbirt als Tangente der Parabel in M_0 den Winkel $H M_0 F_0$ zwischen dem Radiusvector $F_0 M$ und dem Diameter $H M_0$, d. h. den Winkel, welchen die Gerade $M_0 G$ mit der Verticalen $H M_0$ bildet. Ebenso halbiren die Richtungen $M_0 T$, $M_0 T'$ je zweier Würfe, welche in demselben Punkte M die Gerade $M_0 G$ treffen, die Winkel $H M_0 F$ und $H M_0 F'$; hieraus folgt, dass sie gleichgeneigt sind gegen die Richtung $M_0 T_0$ des weitesten Wurfes.

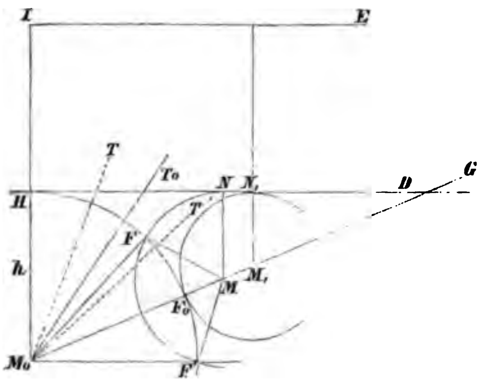

Fig. 142.

Denkt man sich jetzt durch M_0 alle Geraden $M_0 G$ gezogen und bestimmt auf jeder von ihnen den Punkt M_1 der grössten Wurfweite, so bilden die Punkte M_1 den Ort der äussersten, bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit noch erreichbaren Punkte. Die Punkte M_1 sind aber die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Directrix und den Ort der Brennpunkte berühren. Zieht man daher in dem Abstande $HJ = HM_0$ die Gerade JE parallel mit der Directrix HD, so stehen die Punkte M_1 von M_0 und dieser Geraden gleichweit ab. Daher ist der Ort (M_1) eine Parabel, welche die Vertikale $M_0 J$ zur Hauptaxe, HD zur Scheiteltangente und M_0 zum Brennpunkte hat. Diese Parabel berührt die einzelnen durch die Punkte M_1 gehenden Parabeln, denn ihre Tangenten, sowie die Tangenten jener in M_1 halbiren die Winkel $F_0 M_1 N_1$.

Um die Stelle M zu finden, wo die Gerade $M_0 G$ unter rechtem Winkel getroffen wird (Fig. 143), bedenke man, dass der Kreis um M, welcher HG in N berührt, die Brennpunkte F, F' der beiden Parabeln liefert, welche M erreichen.

Nun halbirt $M_0 G$ den Winkel FMF' und die Tangente in M an die Parabel, deren Brennpunkt F ist, den Winkel FMN; sollen also beide zu einander senkrecht sein, so muss Winkel $NMF' = \pi$ werden. Zieht man also vom Schnittpunkte G der Geraden $M_0 G$ mit HG nach dem Endpunkte H' des Durchmessers HH' den Stral GH', so liefert sein Schnittpunkt mit dem Orte der Brennpunkte den Punkt F', von welchem man blos das Perpendikel $F'N$ auf HG zu fällen braucht, um auf $M_0 G$ den gesuchten Punkt M zu bestimmen, welcher unter rechtem Winkel getroffen wird. Die Richtung des Wurfes ergibt sich hierzu leicht aus dem Vorigen. Von den beiden Parabeln, deren Brennpunkte F, F' sind, löst nur die erstere das Problem; für die andere, deren Brennpunkt F' ist, ist M der Scheitel, indem der Radiusvector MF' mit dem Diameter NF' zusammenfällt, und ist also die Tangente in M horizontal.

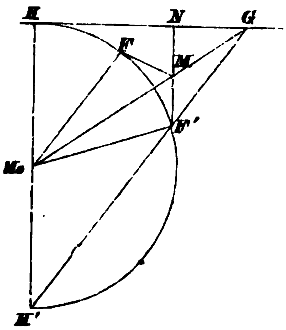

Fig. 143.

Soll die grösste Wurfweite für eine nicht durch die Anfangslage M_0 gehende Gerade $G_0 G$ (Fig. 144) gefunden werden, so erwäge man, dass für irgend einen Punkt M in $G_0 G$, wenn er auf einer zum Brennpunkte F gehörigen Parabel erreichbar sein soll, $FM = MN$ und die äusserste Lage M_1 des Punktes M der Mittelpunkt eines Kreises sein muss, welcher die gemeinsame Directrix HD und den Ort der Brennpunkte berührt.

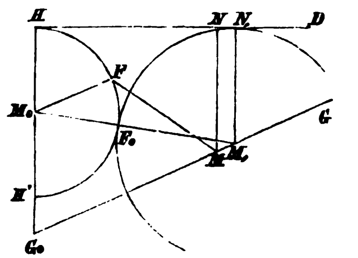

Fig. 144.

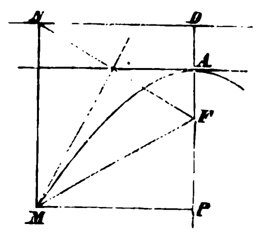

Fig. 145.

13. Nach Nr. 3 ist die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte M (Fig. 145) der parabolischen Bahn gleich der Geschwindigkeit, welche ein Punkt durch den Fall von der Directrix ND aus erlangt, d. h. es ist $v^2 = 2g \,.\, MN$. Nun ist aber vermöge der Eigenschaften der Parabel $MN = MF$ und $\overline{DN}^2 = 2FD \,.\, AP$; also indem man $\overline{FD}^2$ beiderseits addirt

$$\overline{FN}^2 = 2FD \,.\, AP + \overline{FD}^2 = 2FD \,.\, (AP + \tfrac{1}{2} FD) = 2FD \,.\, MN.$$

Hieraus folgt $MN = \dfrac{\overline{FN}^2}{2 \,.\, FD}$. Daher wird jetzt

$$v^2 = g \cdot \frac{\overline{FN}^2}{FD}.$$

Es ist mithin die Geschwindigkeit proportional der Länge FN. Diese Linie steht aber senkrecht auf der Tangente des Punktes M und es bilden daher alle Linien FN unter einander dieselben Winkel, wie die Richtungen der Geschwindigkeit. Daher liegen die Punkte N in einer dem **Hodographen** der parabolischen Bewegung ähnlichen Linie und ist folglich **dieser selbst eine Gerade**. Die

Strecken FD, DN sind proportional der Horizontal- und der Vertikalcomponente von v in demselben Verhältniss, mit welchem FN dem v selbst proportional ist.

§. 10. Das ballistische Problem (Wurfbewegung im widerstehenden Mittel). Ein schwerer Punkt wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α gegen den Horizont in einem homogenen, Widerstand leistenden Mittel geworfen, welche Bewegung wird derselbe annehmen, wenn die Beschleunigung des Widerstandes gleich der Function $a + bv^n$ der Geschwindigkeit ist, worin a und b Constante bedeuten?

1. In Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Ursprung in der Anfangslage M_0 des Punktes, horizontaler x-Axe und vertikaler y-Axe (positiv aufwärts und wenn die vertikale xy-Ebene durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit enthält) sind die Componenten der Beschleunigung, da der Widerstand in der Richtung der Tangente dem Sinne der Bewegung entgegen gerichtet ist:

$$X = -(a + bv^n)\frac{dx}{ds}, \quad Y = -(a + bv^n)\frac{dy}{ds} - g, \quad Z = 0$$

und mithin die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(a + bv^n)\frac{dx}{ds} = -\frac{a + bv^n}{v}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(a + bv^n)\frac{dy}{ds} - g = -\frac{a + bv^n}{v}\cdot\frac{dy}{dt} - g$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Die dritte dieser Gleichungen lehrt, dass die Bewegung in der xy-Ebene erfolgt, sodass die Untersuchung sich von vornherein auf die beiden ersten Gleichungen beschränken kann. Um zu einem Integrale derselben zu gelangen, combinire man sie nach der Art des Flächenprincips. Man erhält

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{dx}{dt}$$

und wenn man für $\frac{dx}{dt}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung einsetzt

$$(a + bv^n)\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right) = gv\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Nun führe man den Winkel η als neue Variabele ein, welchen die Tangente der Bahn mit der x-Axe bildet, d. h. man setze $\frac{dx}{dt} = v\cos\eta$, $\frac{dy}{dt} = v\sin\eta$, wodurch man erhält: $v(a + bv^n)\,d\eta = g(\cos\eta\,dv - v\sin\eta\,d\eta)$, oder

$$g\cos\eta\, v^{-(n+1)}\,dv - (a + g\sin\eta)\,v^{-n}\,d\eta = b\,d\eta.$$

Da die linke Seite in dem einen Gliede v^{-n}, im anderen das Differential $v^{-(n+1)}\,dv$ hievon enthält, so wird man einen Multiplicator K dieser Gleichung als Function von η so bestimmen können, dass die linke Seite nach der Multiplication mit $-nK$ die Form des Differentials eines Produkts, nämlich die Form

$$d\,.\,Mv^{-n} = -nMv^{-(n+1)}dv + v^{-n}\frac{dM}{d\eta}\cdot d\eta$$

annimmt. Hiezu müssen K und M den Bedingungen genügen:

$$dM = nK(a + g \sin\eta)\, d\eta, \quad M = gK\cos\eta.$$

Aus ihnen erhält man:

$$\frac{dM}{M} = \frac{n(a+g\sin\eta)}{g\cos\eta}\, d\eta = n\frac{\sin\eta}{\cos\eta}\, d\eta + \frac{na}{g}\frac{d\eta}{\cos\eta} = -nd.l\cos\eta + \frac{na}{g}\, d.l\,\mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\eta)$$

und mithin

$$M = \cos^{-n}\eta \,.\, \mathrm{tg}^{\frac{na}{g}}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\eta), \quad K = -\frac{nM}{g\cos\eta}$$

und hiermit ein Integral der Differentialgleichung, nämlich

$$Mv^{-n} = -\frac{n}{g}\int \frac{bM\, d\eta}{\cos\eta}.$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn b eine Function von η ist; auch für den Fall, dass a Function von η ist, tritt nur die Aenderung ein, dass

$$M = \cos^{-n}\eta \,.\, e^{\frac{n}{g}\int\frac{a\,d\eta}{\cos\eta}}$$

wird.

Für die weitere Behandlung des Problems setze man $\mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\eta) = r$, wodurch $\cos\eta = \frac{2r}{1+r^2}$, $\sin\eta = \frac{r^2-1}{1+r^2}$, $\frac{d\eta}{\cos\eta} = \frac{dr}{r}$ wird, sowie zur Abkürzung $\frac{a}{g} = c$, so erhält man

$$M = 2^{-n} r^{n(c-1)}(1+r^2)^n, \quad 2^n Mv^{-n} = -\frac{nb}{g}\int r^{n(c-1)}(1+r^2)^n \frac{dr}{r}.$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so erhält man dies Integral in geschlossener Form. Besonders einfach fällt dasselbe aus für $c = \frac{a}{g} = \frac{n+2}{n}$, nämlich

$$r^2(1+r^2)^n v^{-n} = \frac{nb}{2(n+1)g}(1+r^2)^{n+1} + C,$$

wobei die Constante durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt werden muss, wofür $r = \mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha)$, $\eta = \alpha$, $v = v_0$.

Das gefundene Integral bestimmt v als Function von r; nachdem dies erreicht ist, ist es leicht, auch t, x, y als Functionen vom r durch blosse Quadraturen darzustellen. Bezeichnen wir nämlich abkürzend die Beschleunigung des Widerstandes mit ω, so liefern die obigen Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\omega}{v}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\omega}{v}\frac{dy}{dt} - g, \quad v\omega\frac{d\eta}{dt} = g\frac{d^2x}{dt^2}$$

leicht das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
dt &= -\frac{v\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\omega\dfrac{dx}{dt}}\, dt = -\frac{v\, d\eta}{g\cos\eta} = -\frac{v}{g}\frac{dr}{r},\\
dx &= \frac{dx}{dt}\, dt = -\frac{v^2}{g}\, d\eta = -\frac{2v^2 dr}{g(1+r^2)},\\
dy &= \frac{dy}{dt}\, dt = -\frac{v^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\eta\, d\eta = -\frac{v^2(r^2-1)\, dr}{gr(1+r^2)}.
\end{aligned}$$

Sobald man in diese Formeln v durch η oder r ausgedrückt einsetzt, ergeben sie t, x, y durch blosse Quadraturen. Die Reduction auf Quadraturen ist auch dann noch möglich, wenn die Beschleunigung des Widerstandes $a + b \, . \, lv$ ist, ein Fall, der aus dem eben behandelten hervorgeht, wenn $a - \frac{b}{n}$ und $\frac{b}{n}$ an die Stelle von a und b treten und man hierauf einen Grenzübergang für $n = 0$ macht, dabei aber berücksichtigt, dass $\lim\,[n^{-1}(v^n - 1)] = lv$ für $n = 0$.

Die hier gegebene Entwickelung verdankt man Jacobi (*De motu puncti singularis.* Crelle's Journ. Bd. XXIV., S. 25). Bereits Joh. Bernoulli hat in den *Actis eruditorum Lips.* 1719, p. 216 das ballistische Problem behandelt; von seinem Neffen Nicol. Bernoulli enthält derselbe Band eine Abhandlung über denselben Gegenstand. Später hat Legendre (*Sur la question de balistique; Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1782, p. 59) die Behandlung des Gegenstandes dahin erweitert, dass er den Widerstand in der oben angenommenen Form voraussetzte.

2. Für den speziellen Fall $a = 0$, $n = 2$ wird der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Wir wollen diesen einfachen Fall direct und unabhängig von der vorstehenden allgemeinen Theorie behandeln, zu diesem Behufe aber die Bewegungsgleichungen etwas umgestalten. Ist allgemein R die Widerstandsbeschleunigung, so lassen sich dieselben schreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{dy}{ds} + g = 0.$$

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = p$, also $\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt}$, so geht die zweite dieser Gleichungen über in

$$p\left(\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} + g = 0$$

und indem man dieselbe mit Hülfe der ersten reducirt, kann man das System der Bewegungsgleichungen durch die beiden folgenden Gleichungen darstellen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} + g = 0.$$

Setzen wir der Voraussetzung gemäss $R = \frac{g}{k^2}v^2 = \frac{g}{k^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, so gehen diese Gleichungen über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dx} + g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0.$$

Aus der ersten von ihnen folgt $\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = -\frac{g}{k^2}\frac{ds}{dt}$ und sie gibt durch Integration

$$l\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{k^2}s + C.$$

Für die Constante wird, wenn für $s = 0$ die horizontale Geschwindigkeitscomponente $\frac{dx}{dt}$ gleich $v_0 \cos\alpha$ wird, $l(v_0 \cos\alpha) = C$ und bleiben folglich für die weitere Behandlung des Problems die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{g}{k^2}s}, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha}, \quad \text{wo } h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erkennt man, dass die Horizontalcomponente der Geschwindigkeit mit s abnimmt, dass mithin die absteigende Bahn immer mehr der vertikalen Richtung sich annähert und die Bewegung immer mehr gleichförmig wird. Der absteigende Curvenast hat daher eine vertikale Asymptote (Fig. 146). Um die zweite Gleichung zu integriren, multipliciren wir sie mit der Identität $dx\sqrt{1+p^2}=ds$, wodurch sie übergeht in

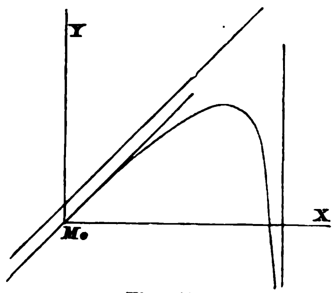

Fig. 146.

$$dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha}\,ds,$$

deren Integral ist

$$C - p\sqrt{1+p^2} - l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{k^2}{2gh\cos^2\alpha}\,e^{\frac{2g}{k^2}s},$$

wobei die Constante dadurch bestimmt wird, dass für $s=0$, $p=\operatorname{tg}\alpha$ wird. Setzen wir zur Vereinfachung $P = p\sqrt{1+p^2} + l\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$, so nimmt diese Gleichung die Form an

$$e^{\frac{2g}{k^2}s} = \frac{2gh}{k^2}(C-P)\cos^2\alpha.$$

Sie stellt die Bahn des Punktes dar, indem sie den Bogen s als Function des Tangentenwinkels gibt.

Indem man mit ihrer Hülfe aus den drei Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha},\quad \frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{dp}{dx}+g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2=0$$

s eliminirt, erhält man dx, dy und dt durch p und dp dargestellt. Demnach wird das ganze Problem durch die drei Gleichungen:

$$dx = -\frac{k^2}{g}\,dp\,(C-P)^{-1},$$

$$dy = -\frac{k^2}{g}\,p\,dp\,(C-P)^{-1},$$

$$dt = -\frac{k}{g}\,dp\,(C-P)^{-\frac{1}{2}}$$

auf Quadraturen zurückgeführt. Um die Constante C durch die Anfangselemente auszudrücken, sei p_0 der Werth von $p=\frac{dy}{dx}$ für $t=0$, d. h. $p_0=\operatorname{tg}\alpha$; ebenso P_0 der Werth von P für $t=0$. Dann liefert die Gleichung der Bahn

$$C = P_0 + \frac{k^2}{2gh\cos^2\alpha}.$$

Die Grösse $p=\frac{dy}{dx}$ beginnt mit dem Werthe p_0 und nimmt ab, im höchsten Punkte der Bahn verschwindet sie, geht hierauf ins Negative über und nähert sich mehr und mehr dem Werthe $-\infty$.

Die drei zuletzt dargestellten Gleichungen für dx, dy, dt liefern durch Integration die Coordinaten x, y und die Zeit t als Functionen von p, nämlich

$$x = \frac{k^2}{g}\int_p^{p_0}(C-P)^{-1}dp, \quad y = \frac{k^2}{g}\int_p^{p_0}(C-P)^{-1}p\,dp, \quad t = \frac{k}{g}\int_p^{p_0}(C-P)^{-\frac{1}{2}}dp.$$

Die Coordinaten des Scheitels erhält man insbesondere für $p = 0$, nämlich

$$x = \frac{k^2}{g}\int_0^{p_0}(C-P)^{-1}dp, \quad y = \frac{k^2}{g}\int_0^{p_0}(C-P)^{-1}p\,dp.$$

Die Wurfweite w ergibt sich, wenn man zunächst den Werth $-p_1$ von p sucht, für welchen y zum zweitenmale verschwindet, d. h. die Gleichung auflöst

$$\int_{-p_1}^{p_0}(C-P)^{-1}p\,dp = 0$$

und den gefundenen Werth hierauf als Grenze bei der Bestimmung von x benutzt, nämlich

$$w = \frac{k^2}{g}\int_{-p_1}^{p_0}(C-P)^{-1}dp.$$

Die Abscisse der vertikalen Asymptote der Flugbahn ist der Werth von x, welcher $p = -\infty$ entspricht, nämlich

$$x = \frac{k^2}{g}\int_{-\infty}^{p_0}(C-P)^{-1}dp.$$

Man kann leicht zeigen, dass der aufsteigende Ast der Curve über den Coordinatenursprung rückwärts verlängert, eine gegen den Horizont geneigte Asymptote besitzt (s. Fig. 146). Denn die obige Gleichung für $\frac{dp}{dx}$ gibt für $s = -\infty$ den Werth $\frac{dp}{dx} = 0$, also $p = \text{const.}$

Aus den obigen Formeln für dx, dy, dt ergibt sich weiter die Geschwindigkeit

$$v = k\left(\frac{1+p^2}{C-P}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für weitere Ausführungen vgl. Nell, Wurfbewegung im widerstehenden Mittel und Construction der Flugbahn. (Grunert's Archiv Th. 46, S. 361 u. Th. 47, S. 338.) Daselbst findet sich auch eine Tafel der Function P oder $A(p)$ nach der Bezeichnung des Verfassers.

Setzt man in den obigen Formeln $k = \infty$, so erhält man die entsprechenden der Wurfbewegung im nichtwiderstehenden Mittel. Sind S, s Bogen der Bahnen zweier schwerer Punkte, welche beide von demselben Punkte mit derselben Geschwindigkeit in gleicher Richtung ausgeworfen werden, der erstere im leeren Raume, der zweite im widerstehenden Mittel, so hat man für sie

$$\frac{dp}{dS}\sqrt{1+p^2} = -\frac{1}{2h\cos^2\alpha}, \quad \frac{dp}{ds}\sqrt{1+p^2} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}s}}{2h\cos^2\alpha}$$

und daher

$$\frac{dS}{ds} = e^{\frac{2g}{k^2}s} \quad \text{und} \quad e^{\frac{2g}{k^2}s} = 1 + \frac{2g}{k^2} S.$$

3. Für den Fall, dass p_0 und in Folge dessen auch p sehr klein ist, so dass die Flugbahn immer nahe am Horizonte bleibt, kann man approximativ setzen $\frac{ds}{dx} = 1$, $s = x$ und folglich

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{e^{\frac{2g}{k^2}x}}{2h\cos^2\alpha},$$

woraus sich ergibt

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{k^2}{4gh\cos^2\alpha}\left(1 - e^{\frac{2g}{k^2}x}\right)$$

und

$$y = x\operatorname{tg}\alpha + \frac{k^2}{4gh\cos^2\alpha}\left(x - \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}e^{\frac{2g}{k^2}x} + \tfrac{1}{2}\frac{k^2}{g}\right).$$

Die Coordinaten des Scheitels erhält man, indem man $p = 0$, die Abscisse der Wurfweite, indem man $y = 0$ setzt. Hierzu liefert die Gleichung

$$g\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dp}{dx} = 0$$

mit Hülfe des vorherigen Werthes für $\frac{dp}{dx}$ die der Abscisse x entsprechende Zeit:

$$t = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{e^{\frac{g}{k^2}x} - 1}{v_0 \cos\alpha}.$$

§. 11. Die Centralbewegung. **Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Beschleunigung, deren Richtung fortwährend durch ein festes Centrum O hindurchgeht und deren Grösse φ blos eine Function der Entfernung r von demselben ist. Die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit sind bekannt; man soll die Natur dieser Bewegung erforschen.**

1. Indem wir den Mittelpunkt O der Beschleunigung als Pol eines Polarcoordinatensystems der r, ϑ mit beliebig gerichteter Polaraxe ansehen, sind die Componenten der Beschleunigung längs des Radiusvectors und senkrecht dazu $\varphi_r = \varphi$, $\varphi_\vartheta = 0$, d. h. es ist nach Cap. VIII, §. 9, wenn φ_r positiv im Sinne nach O hin gerechnet wird

$$r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2r}{dt^2} = \varphi, \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen liefert sofort ein erstes Integral $r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C$. Es drückt dies das Princip der Flächen aus, welches nach §. 4. für das Problem gilt. Es ist nämlich der doppelte Elementarsector $2dS = r^2\frac{d\vartheta}{dt}$ und daher die Sectorengeschwindigkeit $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}C$, also constant,

$$pv = C \quad \text{und} \quad S - S_0 = \tfrac{1}{2}C(t - t_0),$$

d. h.: Für jede Centralbewegung ist die Sectorengeschwindigkeit und das Moment der Geschwindigkeit für den Pol der Radienvectoren constant, der in irgend einer Zeit vom Radiusvector durchstrichene Sector dieser Zeit proportional und die Bahn eine ebene Curve.

Die Constante C des Flächenprincips kann durch die der Zeit t_0 entsprechenden Elemente v_0, p_0, r_0, α ausgedrückt werden, nämlich die Geschwindigkeit, ihren Abstand von O, den Radiusvector und die Neigung von r_0 gegen v_0. Sie ist $C = p_0 v_0 = r_0 v_0 \sin\alpha$.

Die Elimination von $\frac{d\vartheta}{dt}$ aus beiden Gleichungen gibt zwischen r und t die leichung

$$-\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{C^2}{r^3} = \varphi.$$

2. In Bezug auf O als Ursprung rechtwinkliger Coordinaten x, y in der Ebene der Bahn sind $-x:r$, $-y:r$ die Richtungscosinusse der Beschleunigung φ, wenn diese dem Pole zugewandt und $x:r$, $y:r$, wenn sie ihm abgewandt ist, daher sind die Gleichungen der Bewegung im ersten Falle

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{r}\varphi = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{r}\varphi = 0,$$

im andern Falle genügt die Aenderung des Zeichens von φ. Das Flächenprincip nimmt die Form an

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

3. Für die Geschwindigkeit v ergibt sich mit Hülfe von $pv = C$ und $\frac{r}{p} = \frac{ds}{rd\vartheta}$ (Fig. 147), sowie $ds^2 = r^2 d\vartheta^2 + dr^2$

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2} = \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]$$

oder schliesslich

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(-\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2\right].$$

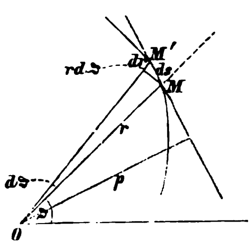

Fig. 147.

4. Nach §. 5 gilt für unser Problem das Princip der lebendigen Kraft und ist für die Kräftefunction $dU = -\frac{\varphi}{r}(xdx + ydy) = -\varphi dr$, da $xdx + ydy = rdr$. Daher ist

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = U - U_0 = -\int_{r_0}^{r}\varphi dr \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}v^2 = U + h, \quad \text{wo} \quad h = \tfrac{1}{2}v_0^2 - U_0.$$

Indem man diese Gleichung mit der Gleichung von Nr. 3 combinirt, ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(-\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2\right] = U + h$$

als Differentialgleichung der Bahn in Polarcoordinaten, wenn φ und mithin U bekannt ist, oder als Gleichung für φ, wenn die Bahn d. h. r als Function von ϑ gegeben ist. Im letzteren Falle gibt nämlich die Differentiation nach ϑ wegen $\frac{dU}{d\vartheta} = \frac{dU}{dr}\cdot\frac{dr}{d\vartheta} = -\varphi\frac{dr}{d\vartheta}$

$$\varphi = \frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta^2}\right].$$

5. Man kann für die Beschleunigung noch eine andere bemerkenswerthe Formel aufstellen. Combinirt man nämlich die Gleichungen $vp = C$ und $v^2 = 2(U + h)$ behufs Elimination von v^2 und differentiirt die entstehende Gleichung, so erhält man, da $dU = -\varphi dr$ ist, die weitere Formel für φ:

$$\varphi = \frac{C^2}{p^3}\frac{dp}{dr}.$$

Nach einem bekannten Satze besteht aber nun zwischen r, p, dr, dp und dem Krümmungshalbmesser ϱ die Proportion

$$\frac{dp}{dr} = \frac{r}{\varrho}.$$

Mit Hülfe derselben kann man φ die Gestalt geben:

$$\varphi = \frac{C^2 r}{\varrho p^3}.$$

Den genannten Satz beweisen wir so: Die Tangenten MT, $M'T'$ einer Curve in zwei aufeinanderfolgenden Punkten M, M' (Fig. 148) bilden mit einander den Contingenzwinkel $d\varepsilon$. Denselben bilden die beiden von O aus auf die gefällten Perpendikel

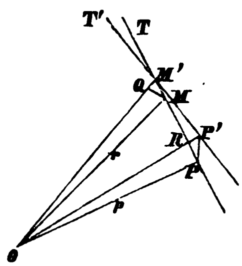

Fig. 148.

$$OP = p \text{ und } OP' = p + dp.$$

Auf MT bestimmt OP' den Punkt R und wird $RP' = dp$; ein Perpendikel MQ vom Endpunkte M des Radiusvectors $OM = r$ auf $OM' = r + dr$ gefällt, gibt $QM' = dr$. Die beiden bei R und Q rechtwinkligen unendlich kleinen Dreiecke PRP' und MQM' sind ähnlich. Denn vermöge der Gleichheit der Winkel POP' und $PM'P'$ ist PP' das Bogenelement eines Kreises, welcher durch O und M' geht und sind in diesem Kreise die Winkel $OP'P$ und $OM'P$ als Peripheriewinkel über OP gleich. Daher besteht die Proportion $dp : dr = PP' : MM'$. Der Durchmesser des Kreises ist, weil $\sphericalangle\, OPM = \frac{1}{2}\pi$ ist, OM' oder in der Grenze $OM = r$; daher ist $PP' = r d\varepsilon$. Die Normalen der Curve in M und M' bilden gleichfalls den Winkel $d\varepsilon$ und ist $MM' = \varrho d\varepsilon$, wenn ϱ der Krümmungshalbmesser in M ist. Daher wird schliesslich $dp : dr = r : \varrho$, w. z. b. w.

6. Für die Gleichungen der Bewegung, wie sie in Nr. 1 für Polarcoordinaten und in Nr. 2 für rechtwinklige Coordinaten aufgestellt wurden, besitzen wir in den Principen der Flächen und der lebendigen Kraft die beiden ersten Integrale, nämlich $r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C$ und $\frac{1}{2}v^2 = U + h$, wo $v^2 = \frac{1}{2}C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(-\frac{d\cdot\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2\right]$ mit den zwei Constanten C, h, welche durch den Anfangszustand bestimmt wurden. Die weitere Behandlung des Problems erfordert die Auffindung der beiden zweiten Integrale, durch welche die Polarcoordinaten r, ϑ als Functionen der Zeit bekannt werden. Man erhält hiermit

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(U+h) - C^2}}, \quad d\vartheta = \frac{C}{r^2}dt = \frac{C\,dr}{r\sqrt{2r^2(U+h) - C^2}},$$

so dass, wenn t_0 der Anfangslage r_0, ϑ_0 entspricht, zunächst erhalten wird:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(U+h) - C^2}}, \quad \vartheta - \vartheta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{C\,dr}{r\sqrt{2r^2(U+h) - C^2}}.$$

Diese beiden Integrale stammen aus der gemeinsamen Quelle:

$$R = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r}\sqrt{2r^2(U+h) - C^2}$$

und können durch partielle Differentiation nach den Constanten h und C aus R gebildet werden, so dass nämlich

$$t - t_0 = \frac{\partial R}{\partial h}, \quad \vartheta - \vartheta_0 = -\frac{\partial R}{\partial C}.$$

7. Man bemerke, dass die Elimination von $\frac{d\vartheta}{dt}$ zwischen den Gleichungen $-\frac{d^2 r}{dt^2} + r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \varphi$ und $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C$ zu der Gleichung 2. Ordnung zwischen r und t führt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\varphi - \frac{C^2}{r^3}\right) = 0,$$

deren erstes Integral das Princip der lebendigen Kraft vertreten kann. Sie gibt nämlich durch Multiplication mit $\frac{dr}{dt}$ in Integration, da $\frac{dr}{dt} = v_r$ die Geschwindigkeitscomponente längs r ist,

$$\tfrac{1}{2} v_r^2 - \tfrac{1}{2} [v_r^2]_0 = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{C^2}{r^3} - \varphi\right) dr.$$

Auch kann man die beiden Gleichungen $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x}{r}\varphi = 0$, $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y}{r}\varphi = 0$ mit Hülfe von $\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\varphi - \frac{C^2}{r^3}\right) = 0$ in lineare Gleichungen zwischen $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ und ϑ umsetzen. Man erhält nämlich

$$r\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{C^2}{r^2} \cdot \frac{x}{r},$$

welche Gleichung so geschrieben werden kann:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d \cdot \frac{x}{r}}{dt}\right) + \frac{C^2}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = 0,$$

oder, indem man r^2 mit Hülfe von $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C$ eliminirt, da

$$\frac{r^2}{C} \frac{d \cdot \frac{x}{r}}{dt} = \frac{d \cdot \frac{x}{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\vartheta} = \frac{d \cdot \frac{x}{r}}{d\vartheta} \text{ wird:}$$

$$\frac{d^2 \cdot \frac{x}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{x}{r} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \frac{d^2 \cdot \frac{y}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{y}{r} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für die Bahn des Punktes

$$\frac{x}{r} = A_1 \cos\vartheta + B_1 \sin\vartheta, \quad \frac{y}{r} = A_2 \cos\vartheta + B_2 \sin\vartheta \text{ u. s. w.}$$

§. 12. **Die Centralbewegung, für welche die Beschleunigung der ersten Potenz der Entfernung vom Centrum proportional ist.** Ein Punkt M (x, y, z) werde nach n festen Punkten $C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots C_n$ hin beschleunigt; die Beschleunigungen φ_i seien der ersten Potenz des Abstandes von diesen Punkten proportional, nämlich $\varphi_i = k_i^2 r_i$; die Geschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$ habe die Componenten α, β, γ und die Anfangslage M_0 die Coordinaten a, b, c. Welches ist die Bewegung des Punktes M?

Die Componenten der Beschleunigung sind:

$$X = \Sigma X_i = -\Sigma k_i^2 (x - x_i), \quad Y = \Sigma Y_i = -\Sigma k_i^2 (y - y_i),$$
$$Z = \Sigma Z_i = -\Sigma k_i^2 (z - z_i),$$

wenn x_i, y_i, z_i die Coordinaten von C_i sind; denn $-(x - x_i) : r_i$, $-(y - y_i) : r_i$, $-(z - z_i)$ r_i sind die Richtungscosinusse von φ_i. Es gibt einen Punkt x_0, y_0, z_0 des Raumes, in welchem die Beschleunigungen sich tilgen. Für ihn ist:

$$\Sigma k_i^2 (x_0 - x_i) = 0, \quad \Sigma k_i^2 (y_0 - y_i) = 0, \quad \Sigma k_i^2 (z_0 - z_i) = 0,$$

woraus

$$x_0 = \frac{\Sigma k_i^2 x_i}{\Sigma k_i^2}, \quad y_0 = \frac{\Sigma k_i^2 y_i}{\Sigma k_i^2}, \quad z_0 = \frac{\Sigma k_i^2 z_i}{\Sigma k_i^2}$$

folgt. Dieser Punkt ist der Massenmittelpunkt S von $P_1, P_2 \ldots P_n$, wenn diesen Punkten die Massencoefficienten $k_1^2, k_2^2, \ldots k_n^2$ ertheilt werden. Durch Einführung der Coordinaten x_0, y_0, z_0 dieses Punktes werden

$$X = -\Sigma k_i^2 (x - x_0), \quad Y = -\Sigma k_i^2 (y - y_0), \quad Z = -\Sigma k_i^2 (z - z_0),$$

oder wenn man ihn zum Coordinatenursprung wählt, $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ mit x, y, z bezeichnet und $\Sigma k_i^2 = K^2$ setzt,

$$X = -K^2 . x, \quad Y = -K^2 y, \quad Z = -K^2 z.$$

Hieraus folgt, dass die resultirende Beschleunigung des Punktes M nach S gerichtet und dem Abstande $MS = r$ proportional ist. Die Bewegung erfolgt also ebenso, als ob der Punkt S allein die Stelle des Punktsystems $C_1, C_2, \ldots C_n$ verträte und den Massencoefficienten $K^2 = \Sigma k_i^2$ besässe. Von den drei Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + K^2 x = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + K^2 z = 0$$

werden wir blos zwei beizubehalten haben, wenn wir die Ebene durch S, in welcher die Bewegung erfolgt (§. 4) und welche die Ebene ist, welche v_0 enthält, zu einer Coordinatenebene wählen. Sie sei die xy-Ebene und seien α, β die Componenten von v und x_0, y_0 die Coordinaten der Anfangslage M_0 für S als Ursprung. Man hat dann

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + K^2 x = 0, \quad x = A_1 \cos Kt + B_1 \sin Kt, \quad v_x = -KA_1 \sin Kt + KB_1 \cos Kt$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y = 0, \quad y = A_2 \cos Kt + B_2 \sin Kt, \quad v_y = -KA_2 \sin Kt + KB_2 \cos Kt$$

und

$$\left.\begin{matrix} x = x_0, & v_x = \alpha \\ y = y_0, & v_y = \beta \end{matrix}\right\} \text{für } t = 0.$$

Hiermit werden

$$x = x_0 \cos Kt + \frac{\alpha}{K} \sin Kt, \quad v_x = - Kx_0 \sin Kt + \alpha \cos Kt$$

$$y = y_0 \cos Kt + \frac{\beta}{K} \sin Kt, \quad v_y = - Ky_0 \sin Kt + \beta \cos Kt.$$

Ferner ist

$$dU = - K^2 r dr, \quad U - U_0 = - \tfrac{1}{2} K^2 (r^2 - r_0^2), \quad v^2 - v_0^2 = - K^2 (r^2 - r_0^2),$$

wenn r_0 der Lage M_0 entspricht.

Die Bahn des Punktes M ist eine Ellipse um S als Mittelpunkt, denn die Gleichungen für x, y geben nach Elimination von t:

$$(\beta x - \alpha y)^2 + K^2 (y_0 x - x_0 y)^2 = (\beta x_0 - \alpha y_0)^2$$

mit der nicht positiven Discriminante $- 4K^2 (\beta x_0 - \alpha y_0)^2$.

§. 13. **Die Centralbewegung, deren Beschleunigung dem reciproken Quadrate der Entfernung vom Centrum proportional ist.** (**Newton'sches Gesetz.**)

1. Es sei $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, wobei μ die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung ausdrückt; die Gleichungen der Bewegung in rechtwinkligen Coordinaten sind alsdann

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0.$$

Für die Kräftefunktion hat man

$$U - U_0 = - \int_{r_0}^{r} \frac{\mu}{r^2}\, dr = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r_0}$$

und demnach sind die beiden Integrale, welche das Flächenprincip und das Princip der lebendigen Kraft liefern

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C, \quad \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + \tfrac{1}{2} v_0^2 - \frac{\mu}{r_0} = \frac{\mu}{r} + \tfrac{1}{2} H,$$

wenn $H = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ gesetzt wird. Daher wird die Differentialgleichung der Bahn

$$\tfrac{1}{2} C^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(- \frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2\right] = \frac{\mu}{r} + \tfrac{1}{2} H,$$

welche mit Hülfe leichter Umformungen liefert

$$d\vartheta = - \frac{d\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2}}, \text{ wo } \Omega = \frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}}.$$

Daher ist

$$\vartheta = \arccos \Omega + \text{Const.}$$

Der Ausdruck Ω ist ein Cosinus und ist mithin sein grösster Werth die Einheit; variabel ist an ihm nur der Bestandtheil $\frac{C}{r}$ in seinem Zähler und in

Folge dessen wächst er mit abnehmendem r und erreicht sein Maximum 1 für den kleinsten Werth r_1 von r. Nennen wir ϑ_1 den Polarwinkel, welcher dem r_1 zugehört, so erhalten wir zur Bestimmung von Const. die Gleichung $\vartheta_1 = \text{arc cos } 1 + \text{Const.} = 0 + \text{Const.}$ und hiermit als Polargleichung der Bahn

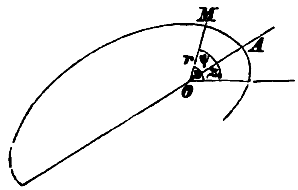

Fig. 149.

$$\vartheta - \vartheta_1 = \text{arc cos} \frac{\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}}{\sqrt{H + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2}},$$

oder wenn wir die Richtung des kleinsten Radiusvectors zur Polaraxe wählen (Fig. 149), d. h. $\vartheta - \vartheta_1 = \psi$ setzen und die Gleichung nach r auflösen:

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2 H} \, . \cos \psi}.$$

Diese Gleichung hat die Form $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \psi}$ und stellt mithin einen Kegelschnitt dar, bezogen auf den Brennpunkt als Pol und die Richtung der durch die Brennpunkte gehenden Hauptaxe nach dem benachbarten Scheitel hin als Polaraxe. Die numerische Excentricität ε und der halbe Parameter p dieses Kegelschnittes sind

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{C}{\mu}\right)^2 H}, \quad p = \frac{C^2}{\mu}$$

und folgt aus der ersteren dieser Formeln, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem $H < 0$, $H = 0$ oder $H > 0$ ist, d. h. je nachdem $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$ oder $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$ ist. Man erkennt daraus, dass die Art des Kegelschnittes von der Grösse der anfänglichen Entfernung vom Centrum und der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit, nicht aber von der Neigung der letzteren gegen jene abhängt. Der Punkt kann also mit derselben Anfangsgeschwindigkeit seine Anfangslage nach einer beliebigen Richtung hin verlassen, immer bleibt die Bahn von derselben Art; damit sie ihre Art ändere, muss v_0 oder r_0 oder müssen beide sich so ändern, dass die dem H gesteckten Grenzen überschritten werden.

Das Resultat der bisherigen Untersuchung lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Wird ein Punkt von einer Beschleunigung afficirt, deren Richtung fortwährend nach einem festen Centrum hinläuft und deren Grösse dem reciproken Quadrate der Entfernung des Punktes vom Centrum proportional ist, so ist die Bahn desselben ein Kegelschnitt, für welchen ein Brennpunkt mit dem festen Centrum zusammenfällt; dieser Kegelschnitt kann eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sein; welcher von diesen Gattungen er angehört, hängt von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit und seines anfänglichen Abstandes vom Centrum, nicht aber von der Richtung der ersteren ab.

2. Ist die Bahn eine Ellipse oder Hyperbel, so besteht zwischen dem halben Parameter p, der halben Hauptaxe a, welche durch die Brennpunkte geht, und der numerischen Excentrität ε die Relation $p = a(1 - \varepsilon^2)$ oder $p = a(\varepsilon^2 - 1)$

und hieraus erhält man im Falle der Ellipse: $a = -\frac{\mu}{H}$ und im Falle der Hyperbel $a = \frac{\mu}{H}$. Ferner ist für die zweite Halbaxe b bei der Ellipse $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ und bei der Hyperbel $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$, mithin $b = \frac{aC}{\mu}\sqrt{-H} = \frac{C}{\sqrt{-H}}$ für die Ellipse und $b = \frac{C}{\sqrt{H}}$ für die Hyperbel.

3. Es ist leicht, die geometrische Bedeutung des Criteriums für die Art des Kegelschnittes zu erkennen. Es sei M_0 (Fig. 150) die Anfangslage des beweglichen Punktes, F das feste Centrum, nach welchem die Beschleunigung gerichtet ist, also $FM_0 = r_0$ der Anfangsabstand und M_0T die Richtung der Geschwindigkeit v_0. Zieht man durch M_0 die Gerade M_0F' so, dass sie mit der Normalen M_0C denselben Winkel β bildet, wie FM_0, so muss sie den zweiten Brennpunkt F' des Kegelschnittes enthalten. Die Projection der Beschleunigung $\frac{\mu}{r_0^2}$ in der Richtung M_0F auf die Normale ist die Normalbeschleunigung, hat die Richtung des Krümmungshalbmessers und ist gleich dem Quadrate von v_0, dividirt durch den Krümmungshalbmesser. Ist letzterer M_0C, so besteht folglich die Gleichung

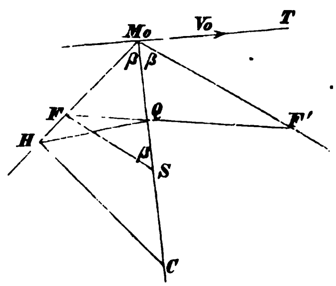

Fig. 150.

$$\frac{\mu}{r_0^2}\cos\beta = \frac{v_0^2}{M_0C}.$$

Nach einem bekannten Satze erhält man durch die Projection H des Krümmungsmittelpunktes C auf den Radiusvector und durch abermalige Projection des Punktes H zurück auf die Normale einen Punkt Q der Hauptaxe, auf welcher die Brennpunkte liegen, so dass also die Gerade FQ den zweiten Brennpunkt F' unseres Kegelschnittes bestimmt. Je nachdem nun FQ die Gerade M_0F' in F' auf derselben Seite der Tangente schneidet, auf welcher F liegt oder auf der entgegengesetzten, ist der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel; denn bei der Ellipse trifft die Tangente niemals die Verbindungsstrecke der Brennpunkte, bei der Hyperbel aber stets; ist aber FQ parallel M_0F', so liegt der Brennpunkt F' im Unendlichen und ist die Curve eine Parabel. Um dies Criterium durch Längenverhältnisse auszudrücken, ziehen wir FS parallel M_0F'. Fällt der Punkt Q zwischen M_0 und S, so ist die Curve eine Ellipse, fällt Q mit S zusammen, eine Parabel und fällt Q über S hinaus, eine Hyperbel. Diese Fälle finden statt, je nachdem $M_0Q < M_0S$, $M_0Q = M_0S$ oder $M_0Q > M_0S$ ist.

Nun ist nach der obigen Bemerkung über die Projectionen des Punktes C:

$$M_0Q = M_0C \cdot \cos^2\beta,$$

oder, wenn man die vorhin entwickelte Gleichung behufs Elimination von M_0C zu Hülfe ruft

$$M_0Q = \frac{v_0^2\, r_0^2 \cos\beta}{\mu}$$

und da aus dem gleichschenkligen Dreieck M_0SF folgt:

$$M_0 S = 2 r_0 \cos \beta,$$

so erhält man weiter:

$$\frac{M_0 Q}{M_0 S} = \frac{v_0^2}{\frac{2\mu}{r_0}},$$

so dass das gesuchte Criterium ist: $\frac{v_0^2}{\frac{2\mu}{r_0}} \lesseqgtr 1$, d. h. $v_0^2 \lesseqgtr \frac{2\mu}{r_0}$.

4. In Bezug auf die verschiedenen Bahnen, welche ein Punkt von derselben Anfangslage M_0 (Fig. 151) aus mit derselben Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter verschiedenen Richtungen der letzteren um ein Centrum C beschreiben kann, nach welchen hin er dem Newton'schen Gesetze folgend beschleunigt wird, können wir ähnliche geometrische Betrachtungen durchführen, wie §. 9. für die parabolische Bewegung.

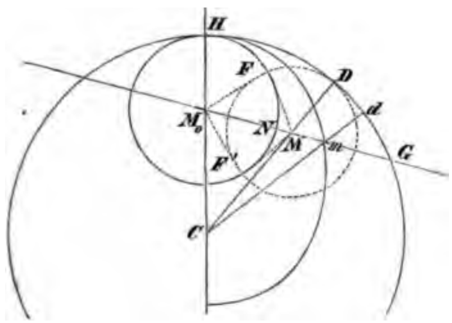

Fig. 151.

Es sei $H = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ negativ, d. h. alle möglichen Bahnen seien elliptisch. Die grosse Axe

$$2a = 2\sqrt{-\mu : H}$$

ist constant für alle Bahnen und C ist gemeinschaftlicher Brennpunkt für sie. Ist F der zweite Brennpunkt einer von ihnen, so ist also $CM_0 + M_0 F$ eine Constante für alle Bahnen, mithin $M_0 F$ constant, d. h. der geometrische Ort der zweiten Brennpunkte aller Ellipsen, welche von M_0 aus beschrieben werden können, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Anfangslage M_0 ist. Gibt man v_0 die Richtung von CM_0, so ist die elliptische Bahn geradlinig und erreicht der bewegliche Punkt als äusserste Lage einen Punkt H, welcher zugleich Endpunkt und Brennpunkt der Bahn ist. Daher ist der Radius des Kreises gleich der grössten Entfernung $M_0 H$, welche der Punkt mit v_0 von M_0 ausgehend in der Richtung CM_0 erreichen kann. Aus $v^2 = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2} H$ folgt dieser Werth für r bei $v = 0$, nämlich $M_0 H = -\frac{2\mu}{H}$. CH ist also die gemeinsame Länge der grossen Axen; die Linie CF ist die Richtung der grossen Axe der elliptischen Bahn für die Richtung von v_0, welche den Winkel $HM_0 F$ halbirt. Es ist auch $CH : M_0 H = v_0^2 : \frac{2\mu}{r_0}$. (Vgl. das obige Criterium.)

Ziehen wir durch M_0 irgend eine Gerade $M_0 G$ und bestimmen wir den zweiten Brennpunkt F einer Ellipse, welche der bewegliche Punkt beschreiben muss, um einen bestimmten Punkt M dieser Geraden zu treffen. Hiefür ist

$$CM + MF = CM_0 + M_0 H = CD = CM + MD,$$

also $MF = MD$, d. h. der zu treffende Punkt M ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher den mit CH um das Centrum der Beschleunigungen beschriebenen Kreis berührt. Jeder der beiden Schnittpunkte F, F' desselben mit dem Ort der Brennpunkte ist zweiter Brennpunkt einer elliptischen Bahn, welche M trifft. Die Halbirungslinien der Winkel FMD und $F'MD$ geben die Neigung an, unter welcher der Punkt M getroffen wird; für die eine Bahn ist dieselbe steil, für die andere flach.

Rückt der Punkt M auf M_0G fort, so verändern die Brennpunkte F, F' der beiden Bahnen, die ihn erreichen, ihre Lage auf dem Orte der Brennpunkte, für die Lage m, in welcher der Kreis um M, welcher HD berührt, den Ort der Brennpunkte ebenfalls berührt, fallen sie zusammen und reduciren sich beide Bahnen auf eine, für weitere Lagen werden sie ideell. Die beiden äussersten, noch erreichbaren Punkte m einer Geraden MG liegen diesseits und jenseits des Ortes der Brennpunkte gleichweit ab von ihm und dem Kreise HD. Die zweiten Brennpunkte der Bahn, welche durch sie hindurchgehen, sind die Schnittpunkte N der Geraden M_0G mit dem Orte der Brennpunkte.

Soll ein Punkt M der Geraden M_0G senkrecht zu M_0G getroffen werden, so muss M_0G Normale der Bahn in M werden, mithin den Winkel CMF der Radienvectoren halbiren. Nun halbirt aber M_0G den Winkel FMF'; daher muss MF' in CM fallen. Jede Gerade durch C, welche den Ort der Brennpunkte schneidet, bestimmt auf M_0G einen Punkt M, welcher rechtwinklig zu M_0G getroffen werden kann und zwar auf doppelte Weise. Ihre Schnittpunkte mit dem Orte der Brennpunkte sind aber nicht die zweiten Brennpunkte der Bahnen, die ihn erreichen. Die Tangenten von C an den Ort der Brennpunkte bestimmen die äussersten Punkte des rechtwinkligen Treffens.

Auf jeder Geraden M_0G gibt es zwei äusserste Lagen m, welche von dem beweglichen Punkte überhaupt noch erreicht werden können. Für sie ist

$$M_0m = M_0N + Nm = M_0H + Nm, \quad Cm = Cd - md = CH - Nm,$$

daher $M_0m + Cm = M_0H + CH = CM_0 + 2M_0H$, d. h. der Ort der äussersten noch erreichbaren Punkte ist eine Ellipse, welche die Punkte C und M_0 zu Brennpunkten und den Punkt H zum Scheitel der grossen Axe hat. Diese Ellipse ist also der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche den Ort der Brennpunkte und den Kreis HD ungleichartig berühren.

Für $H = 0$ sind die Bahnen Parabeln, für $H > 0$ Hyperbeln; im Uebrigen sind die Aenderungen, welche eintreten, leicht zu übersehen.

In welchem Falle tritt die parabolische Bewegung §. 9. auf?

Die hier gegebenen Entwickelungen finden sich der Hauptsache nach in der Abhandlung: Tait, On some geometrical constructions connected with the Elliptic motion of Unresisted Projectiles (Proceed. of the R. Society of Edinburgh, Vol. V, p. 565 (1862—66), oder auch Tait and Steele, A Treatise on Dynamics of a Particle. 3[d] edit., London 1871, p. 96).

5. Wir wollen jetzt die Coordinaten r, ψ als Functionen der Zeit suchen, uns dabei aber auf den Fall der elliptischen Bewegung beschränken. Die zu diesem Zwecke zu integrirende Differentialgleichung erhalten wir aus §. 12, Nr. 6, indem wir $U + h = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}H$ setzen, nämlich:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{H + \frac{2\mu}{r} - \left(\frac{C}{r}\right)^2}}.$$

Die Integration würde zunächst r als Function von t liefern, wozu alsdann mit

Hülfe der bereits bekannten Gleichung der Bahn ψ als Function von t gesucht werden müsste. Für die bequemere Handhabung dieser Gleichung ist es zweckmässig, die Bahnelemente a und ε statt H und C einzuführen. Aus den in Nr. 2. für die elliptische Bahn entwickelten Formeln folgt nämlich:

$$H = -\frac{\mu}{a}, \quad c^2 = \mu a (1 - \varepsilon^2)$$

und hiermit wird unsere Differentialgleichung:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - (a - r)^2}}.$$

Statt hieraus r als Function von t zu suchen und nachher in die Gleichung der Bahn einzusetzen, führt man lieber eine neue Variabele u ein, die sogenannte excentrische Anomalie, stellt r und ψ als Functionen derselben, sie selbst aber als Function der Zeit dar. Hierdurch ist die vorliegende Aufgabe ebenfalls gelöst. Beschreibt man nämlich über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis (Fig. 152), verlängert die Ordinate MP des beweglichen Punktes bis zum Durchschnitt N mit diesem und zieht den Radius CN des Kreises, so bildet letzterer mit der Richtung CF der grossen Axe vom Mittelpunkt nach dem Brennpunkt, welcher Centrum der Beschleunigung ist, den Winkel NCF, welcher die excentrische Anomalie des Punktes M heisst und gewöhnlich mit u bezeichnet wird. Im Gegensatze dazu heisst der Polarwinkel ψ, dessen Scheitel im Centrum der Beschleunigung liegt, die wahre Anomalie. Um nun zunächst r und ψ durch u darzustellen, hat man aus der Gleichung der Ellipse $r + \varepsilon r \cos\psi = a(1 - \varepsilon^2)$ und da $r\cos\psi = FP = a\cos u - CF = a\cos u - a\varepsilon$ ist,

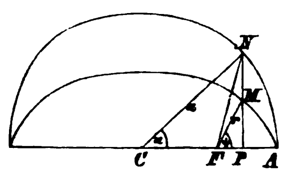

Fig. 152.

$$r = a(1 - \varepsilon\cos u)$$

und indem man diesen Ausdruck für r in die Gleichung der Ellipse einsetzt,

$$1 - \varepsilon\cos u = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\cos\psi}$$ und hieraus

$$1 - \cos u = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} u = (1 - \varepsilon) \frac{1 - \cos\psi}{1 + \varepsilon\cos\psi},$$

$$1 + \cos u = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} u = (1 + \varepsilon) \frac{1 + \cos\psi}{1 + \varepsilon\cos\psi}$$

entwickelt, durch Division dieser Resultate in einander

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u.$$

Hiermit sind r und ψ durch u dargestellt. Um nun aber u als Function der Zeit zu erhalten, müssen wir die Werthe für r und dr, nämlich $r = a(1 - \varepsilon\cos u)$, $dr = a\varepsilon \sin u\, du$ in die obige Differentialgleichung zwischen r und t einführen. Diese Substitution liefert

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (1 - \varepsilon\cos u)\, du$$

und hieraus erhält man, wenn die Zeit von dem Momente an gezählt wird, in welchem der bewegliche Punkt durch den dem Beschleunigungscentrum zunächst gelegenen Scheitel der Ellipse (Perihel) hindurchgeht, so dass also $t = 0$ für $u = 0$ ist,

$$nt = u - \varepsilon \sin u, \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt für $u = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots nt = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots,$ so dass der bewegliche Punkt zu 1, 2, 3 ... Umläufen die Zeiten

$$\frac{2\pi}{n}, \; 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \; 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots,$$

also zu jedem einzelnen Umlauf immer die nämliche Zeit braucht. Bezeichnen wir diese Umlaufszeit mit T, so ist

$$nT = 2\pi$$

und indem wir für n seinen Werth einführen, ergibt sich noch

$$\mu = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a^3,$$

d. h. die Beschleunigung μ in der Einheit der Entfernung vom Centrum ist dem Cubus der grossen Halbaxe der Bahn direct und dem Quadrate der Umlaufszeit umgekehrt proportional.

6. Zu der Gleichung $nt = u - \varepsilon \sin u$ kann man aber auch auf folgendem Wege gelangen. Nach dem Flächenprincipe ist der Sector $MFA = \frac{1}{2} ct$; andererseits aber stehen die Ordinaten MP, NP, sowie die Räume MAP, NAP der Ellipse und des Kreises in dem Verhältniss $b : a$ der kleinen und grossen Halbaxe und da die Dreiecke MFP, NFP sich wie $MP : NP$, also ebenfalls wie $b : a$ verhalten, so stehen auch die Summen $MAP + MFP$ und $NAP + NFP$ d. h. die Sectoren MFA und NFA der Ellipse und des Kreises in demselben Verhältnisse. Nun ist aber $NFA = NCA - NCF$ d. h. gleich

$$\tfrac{1}{2} a^2 u - \tfrac{1}{2} a\varepsilon \,.\, a \sin u\,.$$

Daher wird $MFA = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} a^2 (u - \varepsilon \sin u)$ und indem man diesen Ausdruck dem obigen gleichsetzt, kommt

$$ct = ab\,(u - \varepsilon \sin u),$$

welche Gleichung in die obige Form übergeht, sobald man mit Hülfe der Formeln

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \; c^2 = \mu a (1 - \varepsilon^2), \quad b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$$

die Grösse $\frac{c}{ab}$ eliminirt.

7. Die Gleichung $nt = u - \varepsilon \sin u$ liefert u als Function von t, wenn man sie mit Hülfe der Lagrange'schen Umkehrungsformel behandelt oder u in eine Sinusreihe auflöst, worüber wir hier nichts mittheilen werden; für kleine Werthe der Excentricität ε, bei welchen das Quadrat und die höheren Potenzen keinen Einfluss mehr über die Fehlergrenze hinaus üben, kann man nt als Näherungswerth von u anwenden. Indem man die Gleichung so schreibt:

$$u = nt + \varepsilon \sin u,$$

erhält man, wenn man rechts unter dem Sinuszeichen für u wieder $nt + \varepsilon \sin u$ setzt: $u = nt + \varepsilon \sin (nt + \varepsilon \sin u)$ und indem man abkürzt

$$u = nt + \varepsilon \sin nt.$$

Hierzu gibt die Gleichung $r = a(1 - \varepsilon \cos u)$ mit derselben Grenze der Genauigkeit

$$r = a(1 - \varepsilon \cos nt).$$

Um unter derselben Voraussetzung auch ψ durch t auszudrücken, benutzt man, statt den eben gefundenen Werth für r in die Gleichung der Bahn einzuführen und abzukürzen, lieber direct die Gleichung des Flächenprincips, nämlich $r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C$, welche wegen $\vartheta - \vartheta_1 = \psi$ auch unter der Form $r^2 \frac{d\psi}{dt} = C$ geschrieben werden kann und vermöge $C^2 = \mu a (1 - \varepsilon^2)$ übergeht in $r^2 d\psi = \sqrt{\mu a (1 - \varepsilon^2)}\, dt$, worin noch für r sein Werth zu setzen ist. Nun erhält man für r aus $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\psi}$ $= a(1-\varepsilon^2)\left\{1 + \varepsilon \cos\psi\right\}^{-1}$ bis zu Gliedern der Ordnung von ε^2 genau: $r = a(1 - \varepsilon \cos\psi)$ und hiermit ebenso $r^2 = a^2(1 - 2\varepsilon \cos\psi)$ und folglich weiter: $(1 - 2\varepsilon\cos\psi)\, d\psi = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\, dt = n\, dt$. Die Integration dieser Gleichung liefert, wegen $t = 0$ für $\psi = 0$: $nt = \psi - 2\varepsilon \sin\psi$, oder $\psi = nt + 2\varepsilon \sin\psi$, mithin nach derselben Methode, wie oben

$$\psi = nt + 2\varepsilon \sin nt.$$

Beschreibt man um F mit der Einheit als Radius einen Kreis und lässt auf ihm einen Punkt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit n bewegen, so ist $\psi = nt$ die Gleichung seiner Bewegung. Der Radiusvector, welcher nach ihm hinführt, bildet mit dem Radiusvector der elliptischen Bewegung den Winkel $2\varepsilon \sin nt$. Man nennt denselben die **Mittelpunktsgleichung** der elliptischen Bewegung. Während der Punkt der elliptischen Bewegung die erste Hälfte seiner Bahn beschreibt, ist dieser Winkel positiv, also ist der Radiusvector der elliptischen Bewegung dem Radiusvector der gleichförmigen Bewegung voraus, in der zweiten Hälfte der Bahn ist es umgekehrt. nt heisst die **mittlere Anomalie**.

8. Die Gesetze der Planetenbewegung sind von **Kepler** entdeckt worden; sie sind die drei folgenden und beziehen sich auf einen bestimmten Punkt, den Massenmittelpunkt der Planeten.

1. **Die Planetenbahnen sind ebene Curven und die Radienvectoren derselben vom Mittelpunkte der Sonne als Pol ausgehend, beschreiben Sectoren, welche der Zeit proportional sind.**

2. **Die Planetenbahnen sind Ellipsen und haben den Sonnenmittelpunkt zu einem ihrer Brennpunkte.**

3. **Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten sind den Cuben der grossen Halbaxen ihrer Bahnen proportional.**

Kepler fand diese Sätze durch lange, mit der grössten Ausdauer fortgesetzte und mit wunderbarem Scharfsinn unter einander verglichene Beobachtungen; wir können heutzutage kaum mehr ermessen, welche gewaltige Entdeckung es war, aus den scheinbar so verwickelten Bahnen der Himmelskörper die Linien heraus zu lesen, auf deren Erforschung das Alterthum allen Fleiss verwandt hatte, ohne nur im Entferntesten die Bedeutung zu ahnen, welche sie für die Mechanik des Himmels erlangen sollten. **Newton** hat aus den Kepler'schen Gesetzen die Folgerungen gezogen, welche die Basis der ganzen Astronomie, der Physik und der Mechanik geworden sind. Das erste Kepler'sche Gesetz spricht das Flächenprincip aus und es folgt aus ihm, dass die Beschleunigung des Planeten nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet ist. Aus dem zweiten Gesetze ergibt sich, dass die Beschleunigung dem Quadrate des Abstandes vom Sonnenmittelpunkte umgekehrt proportional sein muss. Diese Folgerung wurde bereits in dem 2. Beispiele des

Cap. VIII, §. 2 gezogen, kann aber auch mit Hülfe der Binet'schen Gleichung (siehe oben Nr. 4) erhalten werden.

Denn aus der Gleichung $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}$ oder $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \vartheta$ einer Planetenbahn, bezogen auf den Sonnenmittelpunkt als Pol und die grosse Axe als Polaraxe, folgt $\frac{d \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \vartheta$, $\frac{d^2 \cdot \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} = -\frac{\varepsilon}{p} \cos \vartheta$, mithin

$$\varphi = \frac{c^2}{p r^2}.$$

Aus den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen ergibt sich also die vollkommene Uebereinstimmung der Planetenbewegung mit der hier entwickelten elliptischen Bewegung. Das dritte Gesetz in bestimmte Form gefasst, sagt, dass

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \cdots$$

sei, wenn $2a$, $2a_1$, $2a_2$, ... die grossen Axen der Bahnen verschiedener Planeten, T, T_1, T_2, ... aber ihre Umlaufszeiten sind, d. h. dass für alle Planeten $\frac{a^3}{T^2}$ constant sei. Nun war bei der elliptischen Bewegung die Beschleunigung μ in der Einheit der Entfernung vom Centrum

$$\mu = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2},$$

daher sagt das dritte Kepler'sche Gesetz, dass für alle Planeten die Beschleunigung in der Einheit der Entfernung dieselbe ist.

Newton hat die Kepler'schen Gesetze auch auf die Bewegung der Kometen um die Sonne und der Trabanten um die Hauptplaneten ausgedehnt und indem er stufenweise seine Betrachtungen verallgemeinerte, gelangte er dazu, zum erstenmale die Idee der allgemeinen Gravitation zu fassen und den Satz auszusprechen, dass die Phänomene der physischen Welt ebenso vor sich gehen, als ob zwischen allen materiellen Körpern eine Wechselwirkung bestehe, als ob sie einander anziehen im directen Verhältnisse ihrer Massen und umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung.

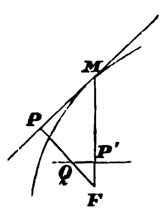

Fig. 153.

§. 14. Um den Hodographen der Centralbewegung zu finden, sei (Fig. 153) F das Centrum, M der bewegliche Punkt, $FP = p$ das Perpendikel auf die Tangente in M, von F aus gefällt. Für die Geschwindigkeit der Centralbewegung gilt nun der Satz $vp = C$. Beschreibt man daher um F mit dem Radius $\sqrt{C}$ einen Kreis und sucht in Bezug auf ihn zur Tangente in M den Pol Q oder, was dasselbe sagt, den zu P conjugirten Pol Q, so stellt FQ die Geschwindigkeit v des Punktes M nach Grösse, der Richtung nach aber um $\frac{1}{2}\pi$ gedreht, dar. Während also die Tangente des Punktes M im Laufe der Bewegung die Bahn als Enveloppe erzeugt, beschreibt ihr Pol Q den um $\frac{1}{2}\pi$ gedrehten Hodographen. Beide Curven sind also in Bezug auf den Kreis Polaren von einander. Die Tangente des Hodographen hat die Richtung der Beschleunigung für die richtige Lage dieser Curve; in unserem Falle steht sie also senkrecht auf der Richtung der Beschleunigung und da diese die Richtung nach dem Centrum F hat, senkrecht auf MF. Ist also P' der Schnittpunkt der Tangente des Hodographen mit MF und $FM = r$, $FP' = p'$, $FQ = r'$, so hat man vermöge der antiparallelen Lage der Tangenten beider Curven gegen die Geraden FM, FP die Gleichung $pr' = p'r$.

Da die Tangente QP' des Hodographen auf dem Radiusvector FM des beschreibenden Punktes senkrecht steht, so bildet sie mit der folgenden Tangente denselben unendlich kleinen Winkel, welchen FM mit dem folgenden Radiusvector bildet, nämlich das Differential $d\vartheta$ des Polarwinkels. Es ist also $d\vartheta$ der Contingenzwinkel des Hodographen und, wenn ϱ' den Krümmungshalbmesser und ds' das Bogenelement dieser Curve bezeichnet, $\varrho' d\vartheta = ds'$. Nun ist die Elementarbeschleunigung $\varphi dt = ds' = \varrho' d\vartheta$ und vermöge $\frac{r^2 d\vartheta}{dt} = C = pv$, also

$$\varphi = \frac{C}{r^2}\varrho' = \frac{pv}{r^2}\varrho',$$

welche Gleichung den Krümmungshalbmesser ϱ' des Hodographen bestimmt. Für das Newton'sche Gesetz ist $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$, mithin $\varrho' = \frac{\mu}{C}$ also constant. **Der Hodograph der Newton'schen Centralbewegung ist daher ein Kreis, dessen Radius gleich der Beschleunigung in der Einheit der Entfernung vom Centrum der Beschleunigungen, dividirt durch die doppelte Sectorengeschwindigkeit ist.** Dieser Satz folgt auch sofort daraus, dass die Polarcurve eines Kreises in Bezug auf einen gegebenen Kreis als Basis selbst ein Kreis ist. Nach einem bekannten Satze ist nämlich der Ort der Fusspunkte P (Fig. 153), wenn M einen Kegelschnitt beschreibt, der über der Hauptaxe als Durchmesser beschriebene Kreis.

Während $FM = r$ sich um $d\vartheta$ umdreht, dreht sich der Radiusvector $FQ = r'$ um einen gewissen unendlich kleinen Winkel $d\vartheta'$ um, welcher das Differential des zu r' gehörigen Polarwinkels ϑ' ist. Daher ist der unendlich kleine von r' durchstrichene Sector $\frac{1}{2}r'^2 d\vartheta' = \frac{1}{2}p' ds'$. Daher ist auch

$$\varphi = \frac{ds'}{dt} = \frac{p'}{r'^2}\frac{d\vartheta'}{dt} = \frac{p'\varrho'}{r'^2}\frac{d\vartheta}{dt} = C\cdot\frac{p'\varrho'}{r^2 r'}$$

weil $r^2\frac{d\vartheta}{dt} = C$, oder mit Benutzung von $pr' = p'r$

$$\varphi = C\cdot\frac{p'\varrho'}{r^3 r'}.$$

Das Problem des Hodographen hat eine Umkehrung. Sie besteht in der Aufgabe: Wenn der Hodograph und die Geschwindigkeit, mit welcher er beschrieben wird, bekannt sind, die Bahn und Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zu finden, zu dessen Bewegung der Hodograph gehört.

XI. Capitel.

Die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

§. 1. Durch die Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigung ist die Bewegung eines Punktes vollkommen bestimmt. Wird daher noch die Bahn vorgeschrieben, welche der Punkt durchlaufen soll, so ist dies nur dann möglich, wenn noch ein Zwang hinzutritt, der den Punkt nöthigt, sich in der vorgeschriebenen Bahn, statt in jener zu bewegen, welche in Folge der übrigen Bestimmungsstücke frei zu Stande kommen würde. Haben beide Bahnen, die freie und die gezwungene, dieselbe Anfangstangente, so hat der Zwang die Geschwindigkeit der freien Bewegung so zu modificiren, dass ihre Richtung zu jeder Zeit in die Tangente der vorgeschriebenen Bahn fällt. Was die Geschwindigkeit continuirlich abändert, ist Beschleunigung; welcher Art der Zwang auch immer sei, so kann er deswegen stets durch eine Beschleunigung ersetzt werden. Das Gesetz, welches diese hinzuzufügende Beschleunigung befolgen muss, hängt von der gegebenen Beschleunigung und der Beschaffenheit der Bahn ab, welche der Punkt zu beschreiben gezwungen wird. Haben die beiden Bahnen nicht gemeinschaftliche Anfangstangente, so muss zu Anfang auch noch eine Zwangsgeschwindigkeit zur Anfangsgeschwindigkeit hinzutreten, um letztere momentan so abzuändern, dass die geänderte Anfangsgeschwindigkeit die Richtung der Tangente der gezwungenen Bahn annimmt. Jenen Zwang nennt man je nach den Umständen, unter welchen er ausgeübt wird, Widerstand der Bahn oder Spannung und die ihm äquivalente Zwangsbeschleunigung die Beschleunigung des Widerstandes oder der Spannung. Oft ist die Bahn als eine Rinne oder als eine Röhre, aus einem festen Material gearbeitet, gegeben, welche durch ihre Festigkeit den Punkt hindert, sie zu verlassen; oft wird sie dadurch bestimmt, dass der Punkt durch einen oder mehrere Fäden mit anderen Punkten verbunden ist. In allen Fällen erfolgt aber die Bewegung, wie eine freie, wenn die Zwangsbeschleunigung eingeführt wird und kann die aus einem Material gearbeitete Bahn entfernt und die Fadenverbindung gelöst gedacht werden, denn alles, was sie leisten, wird durch die Zwangsgeschwindigkeit und Zwangsbeschleunigung dargestellt.

Soll ein schwerer Punkt (Fig. 154) z. B. genöthigt werden, mit constanter Geschwindigkeit ωr einen vertikalen Kreis zu beschreiben, so muss zu der Beschleunigung der Schwere noch eine solche Beschleunigung X hinzutreten, dass aus beiden zusammen jeden Augenblick die Normalbeschleunigung $\varphi = \omega^2 r$ resultirt (bei der gleichförmigen Bewegung ist die Tangentialbeschleunigung gleich Null). Da g nach Grösse und Richtung constant, φ ebenfalls nach Grösse unveränderlich ist, so folgt, dass die Richtung von X den verticalen Durchmesser in einem Punkte S so schneidet, dass $CS : g = r : \omega^2 r$, d. h. $CS = \frac{g}{\omega^2}$, also gleichfalls constant ist.

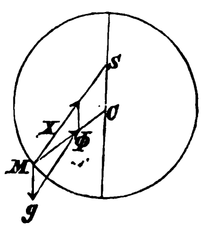

Fig. 154.

Die Grösse von X ist veränderlich mit dem Winkel ϑ, den CM mit der Vertikalen bildet, nämlich es ist $X^2 = g^2 = \omega^4 r^2 + 2g\omega^2 r \cos\vartheta$. Zerlegt man X in eine tangentielle und normale Componente, so tilgt die erstere die Tangentialbeschleunigung $g \cos\vartheta$ der Schwere, während die letztere einerseits deren Normalcomponente vernichtet, andererseits $\varphi = \omega^2 r$ bildet.

Huyghens und **Monge** haben gezeigt, dass man durch eine Fadenconstruction einen beweglichen Punkt nöthigen könne, jede ebene Curve, sowie jede Curve doppelter Krümmung, zu beschreiben. Huyghens fand die Theorie der Evoluten ebener Curven; indem er den beweglichen Punkt an einen biegsamen Faden band, diesen über die Evolute der zu beschreibenden ebenen Curve hinspannte und hierauf mit dem Ende, an welches der Punkt gebunden, von der Evolute so ablöste, dass derselbe stets in der Richtung ihrer Tangente gespannt blieb, ward der Punkt genöthigt, eine Evolvente zu beschreiben. Monge bewies allgemein, dass, wenn der Punkt mit zwei Fäden verknüpft wird, welche über die Evolutenfläche (Fläche der Krümmungsaxen) einer Curve hingespannt sind, er bei der Ablösung eine Evolvente beschreiben muss. Vergl. hierüber meine „Allgem. Theorie der Curven doppelter Krümmung", S. 34 u. ffg.

§. 2. Es sei M die Lage des beweglichen Punktes zur Zeit t auf der gegebenen Bahn (Fig. 155), v seine Geschwindigkeit, ψ die gegebene Beschleunigung und R die Zwangsbeschleunigung, welche vorläufig noch unbekannt ist. Wir zerlegen ψ und R, jede in zwei rechtwinklige Componenten, nach der Tangente in ψ_t und R_t und normal zur Bahn in ψ_n und N. Die Richtungen von ψ_n und N sind die der Schnittlinien der Ebenen zwischen ψ und ψ_t, R und R_t mit der Normalebene der Bahn und sind im Allgemeinen von einander verschieden.

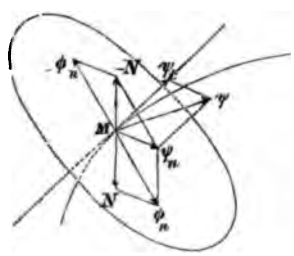

Fig. 155.

Die Tangentialcomponente R_t ist Null, wenn die Beschaffenheit der Curve der Bewegung kein Hinderniss darbietet, so dass die Bewegung in der Bahn durch ψ_t allein bestimmt wird, im Gegenfalle ist sie die sogenannte Beschleunigung der Reibung, verzögert die durch ψ_t bestimmte Bewegung, indem sie der Geschwindigkeit v entgegengesetzt ist und wird veranlasst durch die nicht glatte Beschaffenheit der Bahn. Sie ist nur vorhanden, wenn die Bahn aus einem mehr oder weniger rauhen Material gearbeitet vorausgesetzt wird. Die Resultante der tangentiellen und der normalen Componenten von ψ und R geben die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$ und die Normalbeschleunigung $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$ der Bewegung, welche nach Einführung von R als eine freie anzusehen ist, wie die in Cap. X behandelte. Daher ist

$$\frac{dv}{dt} = \psi_t - R_t, \quad \left[\frac{v^2}{\varrho}\right] = [\psi_n] + [N],$$

wenn ϱ den Krümmungshalbmesser der gegebenen Bahn in M darstellt. In diesen Gleichungen sind R_t und N unbekannt und soll die erste derselben dazu dienen, um v als Function der Zeit zu bestimmen. Dies ist nur möglich, wenn für R_t noch eine Bedingung hinzutritt. Gewöhnlich fügt man diese fehlende Bedingung zu, indem man $R_t = fN$, d. h. proportional der Normalcomponente von R setzt. Die Constante f nennt man den Reibungscoefficienten und stellt für ihn, da er von der Natur der sich reibenden Substanzen des Punktes und der Bahn abhängt, besondere Tafeln auf. Die Normalcomponente des Zwanges (Normalwiderstand, Normalspannung) N ergibt sich als geometrische Differenz zwischen φ_n und ψ_n und ist an jeder Stelle der Bahn bekannt, sobald v gefunden ist.

§. 3. Es sei $R_t = 0$, also $\frac{dv}{dt} = \psi_t$, $\left[\frac{v^2}{\varrho}\right] = [\psi_n] + [N]$ und werde der Punkt M von keiner andern Beschleunigung, als von der Normalcomponente N der Widerstandsbeschleunigung afficirt. Dann ist $\psi_t = \psi_n = 0$ und folgt $\frac{dv}{dt} = 0$, $\left[\frac{v^2}{\varrho}\right] = [\psi]$, d. h. da hieraus folgt $v = \text{const.} = v_0$, $\psi = \frac{v_0^2}{\varrho}$:

Wird ein Punkt, welcher gezwungen ist, eine vorgeschriebene Bahn zu beschreiben, von keiner Beschleunigung, als der des Normalwiderstandes der Bahn afficirt, so bewegt er sich gleichförmig auf der vorgeschriebenen Bahn, fällt die Normalbeschleunigung des Widerstandes in die Richtung des Krümmungshalbmessers der Bahn und ist ihm umgekehrt proportional. An stark gekrümmten Stellen der Bahn, d. h. für kleine ϱ ist also N verhältnissmässig gross, an flachen Stellen wird nur ein kleines N erfordert, um den Punkt auf der Bahn zu erhalten.

Ist ψ normal zur Bahn, also

$$\psi_t = 0, \quad \psi_n = \psi, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \left[\frac{v^2}{\varrho}\right] = [\psi] + [N],$$

so bewegt sich der Punkt gleichförmig, aber N fällt im Allgemeinen nicht in die Richtung des Krümmungshalbmessers.

Ist die Bahn eben und fällt die Beschleunigung ψ in die Ebene derselben, so fällt ψ_n in die Richtung der Normalen oder des Krümmungshalbmessers der ebenen Curve und N_n ebenfalls, so dass die Resultante $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$ beider durch ihre Summe oder Differenz dargestellt wird.

Ist ψ tangential, also $\psi_t = \psi$, $\psi_n = 0$, so wird die Geschwindigkeit zwar nicht constant, aber die Normalcomponente der Widerstandsbeschleunigung wird $N = \frac{v^2}{\varrho}$ und fällt in die Richtung des Krümmungshalbmessers.

In allen diesen Fällen hängt der Sinn, in welchem R oder N den beweglichen Punkt afficiren muss, damit dieser auf der Bahn bleibt, von der besonderen Art ab, wie der Zwang ausgeübt wird. So macht es einen

Unterschied, ob die Bahn als eine unendlich dünne Röhre gedacht wird, in welcher der Punkt läuft, oder als eine unendlich dünne Rinne (halbdurchschnittene Röhre), oder ob er durch Fäden, an die er geknüpft ist, auf die Bahn gezwungen werden soll.

Die der Centripetalbeschleunigung $[\varphi_n]$ entgegengesetzt gleiche Beschleunigung $-[\varphi_n]$ heisst die Centrifugalbeschleunigung. Da die Beschleunigung $[N]$ des normalen Widerstandes nichts anderes leistet, als den Punkt zu hindern, die vorgeschriebene Bahn zu durchdringen und dieselbe zu verlassen, so ist die entgegengesetzt genommene Beschleunigung $-[N]$ die Beschleunigung, mit welcher der Punkt auf die Bahn drückt oder die Fäden spannt, wenn er an solche geknüpft ist. Diese Druckbeschleunigung ist daher die Resultante aus $-[\varphi_n]$ und $[\psi_n]$, d. h. aus der Centrifugalbeschleunigung und der Normalcomponenten der gegebenen Beschleunigung. Bei $\psi_n = 0$ ist sie gleich der Centrifugalbeschleunigung $-[\varphi_n]$.

§. 4. Es kann der Fall eintreten, dass der bewegliche Punkt an einer Stelle die vorgeschriebene Bahn verlässt und die gezwungene Bewegung in eine freie übergeht. Soll dies sich ereignen, so muss der Normalwiderstand N gleich Null werden und da $\varphi_n = v^2 : \varrho = [\psi_n] + [N]$ ist, so folgt, dass die Normalbeschleunigung φ_n zusammenfallen muss mit der Normalcomponente ψ_n der gegebenen Beschleunigung ψ. Hieraus folgt weiter, weil ψ die Resultante von ψ_t und ψ_n ist und die Tangente und die Hauptnormale, in welche letztere φ_n fällt, die Schmiegungsebene der Bahn bestimmen, dass der bewegliche Punkt nur an solchen Stellen die vorgeschriebene Bahn verlassen kann, an welcher die Beschleunigung ψ in die Schmiegungsebene fällt. Bildet nun ψ mit der Tangente der Bahn an einer solchen Stelle den Winkel α, so ist $\psi_n = \psi \sin \alpha$ und erhält man aus der obigen Gleichung: $v^2 = \varrho \psi \sin \alpha$, oder also, weil $\varrho \sin \alpha = \frac{1}{2} c$, nämlich gleich der halben Beschleunigungssehne ist: $v^2 = \frac{1}{2} c \psi = 2 . \frac{1}{4} c \psi$, d. h. der bewegliche Punkt muss an einer Stelle, an welcher er die vorgeschriebene Bahn verlassen soll, eine Geschwindigkeit besitzen, welche er erlangen würde, wenn er mit der Beschleunigung ψ an jener Stelle durch den vierten Theil der Beschleunigungssehne hindurch sich gleichförmig beschleunigt bewegt hätte.

§. 5. Wir stellen jetzt die Gleichungen für die Bewegung auf vorgeschriebener Bahn auf. Es seien X, Y, Z die Componenten der gegebenen Beschleunigung ψ; N_x, N_y, N_z die der Beschleunigung N des Normalwiderstandes und da $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse der Reibungsbeschleunigung R_t sind, also nach der obigen Bemerkung über $R_t = f . N$

die Componenten der letzteren $-fN\frac{dx}{ds}$, $-fN\frac{dy}{ds}$, $-fN\frac{dz}{ds}$. Hiernach sind die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x - fN\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y - fN\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z - fN\frac{dz}{ds},$$

zu welchen noch die beiden Gleichungen der Bahn, nämlich:

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$
$$\Psi(x, y, z) = 0$$

hinzutreten, sowie die weiteren selbstverständlichen Gleichungen:

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2,$$

$$N_x\frac{dx}{ds} + N_y\frac{dy}{ds} + N_z\frac{dz}{ds} = 0,$$

von denen die zweite ausdrückt, dass N senkrecht zur Tangente ist. Aus diesen 7 Gleichungen hat man die Coordinaten x, y, z, die Componenten N_x, N_y, N_z der Beschleunigung des Normalwiderstandes und diesen selbst darzustellen. Damit ergeben sich von selbst die Richtungscosinusse für N. In manchen Fällen wird es zweckmässig sein, statt zweier Curvengleichungen zwischen x, y, z drei Gleichungen zu gebrauchen, welche die Coordinaten der Punkte der Bahn als Functionen einer weiteren Variabeln ω darstellen. Es genügt alsdann, ω durch die Zeit auszudrücken, wenn man x, y, z als Functionen der Zeit sucht.

Von den Principen, welche zur Integration der Bewegungsgleichungen dienen, ist das Flächenprincip in seltenen Fällen anwendbar, weil die Richtung der Beschleunigung des Widerstandes von vornherein nicht bekannt ist. Ist Reibung nicht vorhanden, so gilt es, wenn die Ebene von ψ und N fortwährend durch eine Gerade hindurchgeht, für die Projection der Bewegung auf eine Ebene senkrecht zu dieser Geraden.

Das Princip der lebendigen Kraft ist nur brauchbar, wenn die Reibung Null ist, der Normalwiderstand N tritt aber nicht in den Ausdruck desselben ein; dies versteht sich von selbst, denn da er normal zur Bahn ist, so ist seine Elementararbeit Null. Die Arbeit der Reibung aber wäre $-fNds$ und mithin die Gesammtelementararbeit aller Beschleunigungsbestandtheile ψ, N gleich $Xdx + Ydy + Zdz - fNds$ und folglich

$$d\,.\,\tfrac{1}{2}v^2 = Xdx + Ydy + Zdz - fNds;$$

allein da N nicht blos Function von s ist, auch nicht von x, y, z, so ist die rechte Seite dieser Gleichung kein vollständiges Differential, mithin ist auch das Princip nicht anwendbar, es sei denn, dass das letzte Glied fehlt, d. h. die Reibung Null ist. Im letzteren Falle gilt es, wie bei der freien Bewegung. Sobald das Princip der lebendigen Kraft anwendbar ist, so folgt aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = U - U_0 \quad \text{oder} \quad v^2 = 2(U+h)$$

sogleich

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2(U+h)}$$

und wenn man die Gleichungen der Bahn durch

$$x = f_1(\omega), \quad y = f_2(\omega), \quad z = f_3(\omega)$$

darstellt, wodurch $ds = d\omega\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}$ wird, und U durch ω ausdrückt

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2(U+h)}{f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2}}.$$

Hieraus ergibt sich ω als Function der Zeit. Sobald dies gefunden, sind x, y, z und $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ bekannt und folglich auch

$$N_x = \frac{d^2x}{dt^2} - X, \quad N_y = \frac{d^2y}{dt^2} - Y, \quad N_z = \frac{d^2z}{dt^2} - Z,$$

also auch N und seine Richtung. Zur Grösse ω kann man oft mit Vortheil eine der drei Coordinaten x, y, z wählen.

§. 6. Bewegung eines schweren Punktes auf einer geneigten Geraden. Es sei M_0 (Fig. 156) die Anfangslage des schweren Punktes, welcher ohne Anfangsgeschwindigkeit sich auf der Geraden M_0A bewegen soll; die Gerade bilde mit der Vertikalen den Winkel α; man soll die Geschwindigkeit, den durchlaufenen Raum und die Beschleunigung des Widerstandes der Bahn finden. Auf den beweglichen Punkt M wirkt zur Zeit t, wenn die Reibung $R_t = 0$ ist, die Beschleunigung $\psi = g$ vertikal abwärts und die Beschleunigung $R = N$ des Widerstandes der Bahn normal zur Bahn; man hat daher für die Tangentialbeschleunigung $\varphi_t = \psi_t = g\cos\alpha$ und es muss die Resultante aus der Normalcomponenten $\psi_n = g\sin\alpha$ der gegebenen Beschleunigung und der des normalen Widerstandes N die Centripetalbeschleunigung $v^2 : \varrho$ liefern; da aber der Krümmungshalbmesser der Geraden unendlich gross ist, so ist diese Resultante Null und folglich $N = g\sin\alpha$ und dem Sinne nach entgegengesetzt dieser Normalcomponenten von ψ. Daher bestehen die Gleichungen:

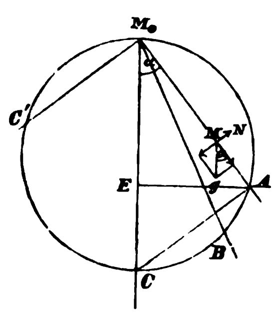

Fig. 156.

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g\cos\alpha, \quad N = g\sin\alpha;$$

aus den beiden ersteren folgt mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen $v = 0$ und $s = 0$ für $t = 0$:

$$v = g \cos \alpha \,.\, t, \quad s = \tfrac{1}{2} g \cos \alpha \,.\, t^2.$$

Der Widerstand $N = g \sin \alpha$ ist constant. Die Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, aber die Beschleunigung längs der Bahn wird nicht durch den vollen Werth g der Beschleunigung der Schwere, sondern nur durch einen Bestandtheil $g \cos \alpha$ derselben repräsentirt, während der andere $g \sin \alpha$ durch den Widerstand der Bahn vernichtet wird.

Für $\alpha = 0$ geht die Bewegung in die des freien Fallens über; es wird nämlich $v = gt$, $s = \frac{1}{2} g t^2$, $N = 0$.

Beschreibt man über der willkürlichen vertikalen Länge $M_0 C = h$ als Durchmesser einen Kreis und zieht in ihm durch M_0 unter beliebigen Winkeln α Sehnen $M_0 A$, $M_0 B$, ... so sind die Zeiten, welche ein beweglicher schwerer Punkt braucht, um dieselben zu durchlaufen, gleich gross. Denn die Zeit ϑ, in welcher eine unter dem Winkel α gegen die Vertikale geneigte Sehne $M_0 A = l$ durchlaufen wird, folgt aus der Gleichung $l = \frac{1}{2} g \cos \alpha \,.\, \vartheta^2$, da aber $h \cos \alpha = l$ ist, so wird dieselbe unabhängig von α, nämlich $\vartheta = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Auch die Sehnen, wie AC, welche man durch den unteren Endpunkt des Durchmessers $M_0 C$ ziehen kann, werden in derselben Zeit ϑ durchlaufen; denn zu jeder solchen Sehne gibt es eine von M_0 ausgehende gleiche und parallele $M_0 C'$, für welche die Behauptung eben erwiesen wurde. Die Geschwindigkeiten, mit welchen die Punkte von M_0 ausgehend auf den verschiedenen Sehnen in deren Endpunkten ankommen, sind aber verschieden. Denn die Geschwindigkeit ist, da das Princip der lebendigen Kraft gilt, von der Lage der Niveauebene abhängig und ist für den Punkt A so gross als für den Punkt E, welcher von M_0 vertikal gleich tief mit A gefallen wäre, nämlich $v = \sqrt{2g \,.\, M_0 E}$.

Findet Reibung $R_t = fN$ längs der Geraden statt, so werden die Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = g \cos \alpha - fN, \quad N = g \sin \alpha,$$

mithin, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist:

$$v = g(\cos \alpha - f \sin \alpha) t, \quad s = \tfrac{1}{2} g (\cos \alpha - f \sin \alpha) \,.\, t^2.$$

Die Bewegung ist auch jetzt im Allgemeinen eine gleichförmig beschleunigte, nur in dem Falle, dass $\cos \alpha - f \sin \alpha = 0$, d. h. $f = \operatorname{cotg} \alpha$ ist, ruht der Punkt, indem $v = 0$, $s = 0$ wird. Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nicht Null, so ist die Bewegung in diesem Falle gleichförmig.

Bewegt sich der Punkt mit Reibung die gerade Linie hinan, so erhält man aus den Bewegungsgleichungen, wenn die s vom Ausgangspunkte gezählt werden und für $s = 0$, $t = 0$ und $v = v_0$ ist, nämlich aus

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -g(\cos \alpha - f \sin \alpha), \quad N = g \sin \alpha$$

die folgenden:

$$v = v_0 - g(\cos \alpha - f \sin \alpha) t, \quad s = v_0 t - \tfrac{1}{2} g (\cos \alpha - f \sin \alpha) t^2.$$

Die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte, ausser wenn $f = \operatorname{cotg} \alpha$; in diesem Falle ist sie gleichförmig, nämlich es wird $v = v_0$, $s = v_0 t$.

§. 7. An die Aufgabe des §. 5. schliesst sich an die **Untersuchung der Bewegung eines Punktes auf einer Cylinderschraube mit verticaler Axe.** Wie ändert sich der Widerstand N, wenn die Verticalebene der Geraden des §. 5. auf einer Cylinderfläche aufgewickelt wird, sodass die Verticalen vertical bleiben? Aendert sich im Uebrigen die Bewegung?

§. 8. Bewegung eines schweren Punktes auf einem vertikalen Kreise, einfaches Pendel. **Ein schwerer Punkt bewege sich auf einem vertikalen Kreise vom Radius a aus der Anfangslage M_0 (Fig. 157), seine Anfangsgeschwindigkeit sei v_0; welche Bewegung wird er annehmen und welches wird die Beschleunigung des Widerstandes sein?**

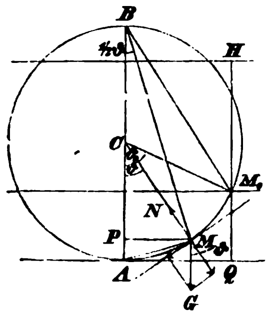

Fig. 157.

1. Wählt man zu Coordinaten den Radiusvector $CM = a$ und dessen Winkel $ACM = \vartheta$ mit der Vertikalen CA und entspricht ϑ_0 der Lage M_0 zur Zeit $t = 0$, so wird $M_0 M = s = a(\vartheta_0 - \vartheta)$, mithin die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = -a\frac{d\vartheta}{dt}$ und die Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt} = -a\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$. Daher sind die Gleichungen der Bewegung wegen $\varphi_t = g \sin\vartheta$

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\vartheta = 0, \quad \frac{v^2}{a} = N - g\cos\vartheta.$$

Um das erste Integral und damit die Geschwindigkeit v als Function von ϑ zu finden, führen wir in die erste Gleichung den Winkel $\frac{1}{2}\vartheta = ABM$ ein, wodurch sie übergeht in

$$\frac{d^2.\frac{1}{2}\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\tfrac{1}{2}\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d.\frac{1}{2}\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta\right] = 0,$$

welche letztere Form sich nach der Multiplication mit $\frac{d.\frac{1}{2}\vartheta}{dt}$ ergibt. Man erhält daher

$$\left(\frac{d.\frac{1}{2}\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{a}\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta = C$$

als erstes Integral. Es ist dies das Integral der lebendigen Kraft, denn indem man $v = -a\frac{d\vartheta}{dt} = -2a\frac{d.\frac{1}{2}\vartheta}{dt}$ zu Hülfe nimmt, geht es über in

$$\tfrac{1}{2}v^2 + 2ag\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta = C.$$

Die Kräftefunction ist $U = -2ag\sin^2\frac{1}{2}\vartheta$. Es ist aber wegen des rechten Winkels AMB die Grösse $2a\sin^2\frac{1}{2}\vartheta = AP$, d. h. gleich dem Abstande des Punktes M von der Niveaulinie des tiefsten Punktes A. Für $CP = z$ wird daher $U = -g(a - z)$. Die Constante C kann mit Hülfe der Geschwindigkeit des Punktes M in irgend einer Lage bestimmt werden. Wählen wir zunächst M_0, wofür $v = v_0$ und $\vartheta = \vartheta_0$ ist, so wird $C = \frac{1}{2}v_0^2 + 2ag\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0$, also

$$\text{(2)} \qquad \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 + 2ag(\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta - \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0) = 0.$$

Wir geben dieser Gleichung die Form

$$\text{(3)} \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = g(H - 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta), \quad \text{wo} \quad H = \tfrac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0.$$

Die Grösse H setzt sich zusammen aus der Geschwindigkeitshöhe $M_0 H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ des Punktes M_0 (S. Cap. IX, §. 2, Nr. 3, a. E.) und dem Abstande $M_0 Q = 2a \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta_0$ des Niveaus des tiefsten Punktes vom Niveau der Anfangslage M_0. Es ist demnach $H = QH$ der Abstand des Niveaus der Geschwindigkeit Null (Niveau des Punktes H) vom Niveau der grössten Geschwindigkeit (Niveau des tiefsten Punktes A).

Bestimmt man die Constante C mit Hülfe der Geschwindigkeit $\overset{*}{v}$ des tiefsten Punktes A, des Maximums der Geschwindigkeit, wofür $\vartheta = 0$ ist, so ergibt sich $C = \frac{1}{2}\overset{*}{v}^2$, also

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}\overset{*}{v}^2 + 2ag\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad \overset{*}{v}^2 = 2gH.$$

Die Geschwindigkeit v hat nach dem Princip der lebendigen Kraft denselben Werth, so oft der bewegliche Punkt dieselbe Niveaulinie (Horizontale) passirt. Sie ist in allen Lagen dieselbe, als ob der bewegliche Punkt von der Niveaulinie der Geschwindigkeit Null, d. h. von H herabgefallen wäre. Setzen wir noch $L^2 = 2aH$, so wird

$$(5)\qquad v^2 = \frac{g}{a}\left[L^2 - (2a\sin\tfrac{1}{2}\vartheta)^2\right], \quad \overset{*}{v} = L\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

2. Wir unterscheiden drei Fälle der Pendelbewegung, je nachdem $H < 2a$, $H = 2a$, $H > 2a$ ist. Im ersten Falle schneidet die Horizontale des Punktes H (das Niveau $v = 0$) den Kreis in 2 Punkten J, J' (Fig. 158); die Grösse L ist $L = AJ < 2a$; der bewegliche Punkt macht Schwingungen im eigentlichen Sinne, d. h. von M_0 mit der Geschwindigkeit v_0 ausgehend sinkt er zur tiefsten Stelle A, steigt bis zur Höhe J', fällt nach A, steigt nach J, fällt zurück nach A etc. Im zweiten Falle berührt das Niveau $v = 0$ den Kreis im höchsten Punkte B und ist $L = 2a$. Es wird gezeigt werden, dass der Punkt sich dem höchsten Punkte B nur asymptotisch nähern kann, ohne ihn zu erreichen. Im dritten Falle trifft das Niveau $v = 0$ den Kreis nicht. Die Geschwindigkeit kann dann überhaupt nicht Null werden; der Punkt macht volle Umläufe. Ein Kreis mit dem Durchmesser H, welcher den gegebenen Kreis in A berührt, liefert durch den Schnitt K mit der Tangente in B die Grösse $L = AK > 2a$.

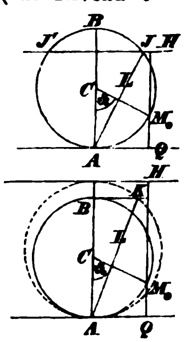

Fig. 158.

3. Erster Fall. $L < 2a$. Ist $\vartheta = \alpha$ der Werth von ϑ, welcher der höchsten Lage J entspricht (Fig. 159), so wird $L = 2a\sin\frac{1}{2}\alpha$ Beschreibt man um die tiefste Lage A mit L als Radius einen Kreis, so schneidet er die von B nach den Punkten M gehenden Stralen BM in Punkten U und wenn $\sphericalangle AUB = \varphi$ gesetzt wird, so besteht die Gleichung: $2a\sin\frac{1}{2}\vartheta = L\sin\varphi = AM$, woraus mit Rücksicht auf $L = 2a\sin\frac{1}{2}\alpha$ folgt

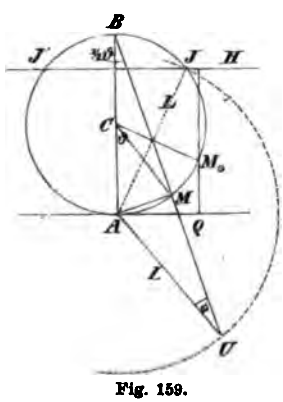

Fig. 159.

$$(6)\qquad \sin\tfrac{1}{2}\vartheta = \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\varphi = \varkappa\sin\varphi, \quad \text{wo} \quad \varkappa = \sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Der Winkel φ wächst und nimmt ab mit $\frac{1}{2}\vartheta$, erreicht in J sein Maximum $\frac{1}{2}\pi$, verschwindet in A und wechselt mit ϑ beim Durchgang durch A Sinn und Zeichen. Führen wir ihn statt $\frac{1}{2}\vartheta$ als Variabele in die Formel (5) ein, so erhalten wir

$$(7) \qquad v = L\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \cos\varphi = \overset{*}{v} \cos\varphi\,.$$

Da man $\overset{*}{v} = \sqrt{2gH}$ kennt, so kann hiemit v für jede Lage des Punktes M leicht gefunden werden.

Um φ, ϑ, v als Functionen der Zeit zu finden, setzen wir die Ausdrücke (7) und $v = -a\dfrac{d\vartheta}{dt} = -2a\dfrac{d\,.\,\frac{1}{2}\vartheta}{dt}$ einander gleich; nämlich

$$-2a\frac{d\cdot\frac{1}{2}\vartheta}{dt} = L\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\cos\varphi\,.$$

Die Differentiation von (6) gibt $\cos\frac{1}{2}\vartheta\, d\,.\,\frac{1}{2}\vartheta = \varkappa\cos\varphi\, d\varphi$. Eliminirt man also ϑ und berücksichtigt $L = 2a\varkappa$, sowie $\cos\frac{1}{2}\vartheta = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}$, so kommt

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,,$$

woraus für die Zeit t, welche der bewegliche Punkt M braucht, um von M_0 bis M zu gelangen, wenn φ_0 der Werth von φ für M_0 ist

$$(8) \qquad t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\varphi}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Für die Zeit t_1 des Niederganges von M_0 bis A hat man daher *)

$$(9) \quad t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\,.\,F(\varphi_0,\varkappa), \text{ wo } \sin\tfrac{1}{2}\vartheta_0 = \varkappa\sin\varphi_0$$

---

*) Nach Legendre wird das Integral $\displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$ mit $F(\varphi,\varkappa)$ bezeichnet und elliptisches Integral erster Gattung (Digammafunction) genannt. φ heisst seine Amplitude, $\varkappa$ sein Modulus. Der Modulus ist nie grösser als 1. Das Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$ wird das vollständige elliptische Integral erster Gattung genannt und nach Jacobi mit K bezeichnet. Die Umkehrung der Gleichung $\displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}} = u$, wo der Werth u des Integrals als gegeben angesehen wird, liefert φ als Function von u. Man schreibt sie $\varphi = \text{am.}\,u$ (Amplitude u); sie und die trigonometrischen Functionen von ihr, $\sin\text{am.}\,u$, $\cos\text{am.}\,u$ nebst der Function $\Delta\,\text{am.}\,u = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\text{am}\,u}$ nannte Jacobi elliptische Functionen zum Unterschiede von den elliptischen Integralen.

Die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung sind nach der Bezeichnung von Legendre

$$E(\varphi,\varkappa) = \int_0^{\varphi} d\psi\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}\,,\quad \Pi(\varphi,\varkappa,n) = \int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}}$$

worin n der Parameter heisst.

und hiermit weiter für die Zeit $t_1 - t$, während welcher der Punkt von M bis A fällt

$$t_1 - t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\varphi, \varkappa). \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$F(\varphi, \varkappa) = \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t)$$

und durch Umkehrung

$$\varphi = \text{am.} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t)$$

und mithin nach (6) für den Polarwinkel ϑ:

$$\sin \tfrac{1}{2} \vartheta = \varkappa \sin \text{am.} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t). \tag{11}$$

Für die Geschwindigkeit ist $v = L \sqrt{\frac{g}{a}} \cos \varphi = 2\varkappa \sqrt{ag} \cdot \cos \varphi$, mithin

$$v = 2\varkappa \sqrt{ag} \cdot \cos \text{am.} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t). \tag{12}$$

Endlich wird der Abstand $BM = \delta = 2a \cos \tfrac{1}{2} \vartheta = 2a \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}$, d. h.

$$\delta = 2a \, \Delta \, \text{am.} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t). \tag{13}$$

Es finden also die drei elliptischen Functionen sin am., cos am., Δ am. bei dem vorliegenden Probleme ihre Bedeutung.

Bezeichnet t_2 die Zeit, welche der Punkt M gebraucht, um von M_0 bis zur nächstfolgenden höchsten Lage J' aufzusteigen, für welche $\vartheta = -\alpha$, $\varphi = -\frac{1}{2}\pi$ ist, so wird nach (10) für $t = t_2$

$$t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{a}{g}} F(-\tfrac{1}{2}\pi, \varkappa) = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= -\sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}} = -\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot K,$$

d. h. es wird die Zeit $t_2 - t_1$ des Aufsteigens von A bis J'

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot K. \tag{14}$$

Nachdem der Punkt bis J' gestiegen, fällt er, da dortselbst $v = 0$ wird, vermöge der Beschleunigung der Schwere zurück. Aus den Eigenschaften des elliptischen Integrals Digamma folgt, dass er zum Fallen von J' bis A immer dieselbe Zeit braucht, wie zum Steigen von A bis J' oder A bis J. Das Vierfache der Zeit $t_2 - t_1$ ist daher die Oscillationsdauer T, nämlich

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot K, \quad \varkappa = \sin \tfrac{1}{2} \alpha. \tag{15}$$

Zur Berechnung von T kann man sich der Reihenentwickelung bedienen:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \left[1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \left[1 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \sin^2\varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\varkappa^4 \sin^4\varphi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\varkappa^6 \sin^6\varphi + \cdots\right]$$

oder

$$K = \tfrac{1}{2}\pi \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \varkappa^2 + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2 \varkappa^4 + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6})^2 \varkappa^6 + \cdots\right],$$

denn es ist

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so wird $\varkappa = \sin\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}\vartheta_0$. Die Oscillationsamplitude, d. h. Winkel $J'CJ$ ist 2α; $\varkappa$ ist also der Sinus der Viertelamplitude. Aus dieser Entwickelung kann man brauchbare Näherungswerthe für die Oscillationsdauer des einfachen Pendels ableiten, indem man sich auf 1, 2, 3, ... Glieder der Reihe beschränkt. Für sehr kleine Werthe des Elongationswinkels α, wie dies bei sehr langen Pendeln eintreten wird, genügt als Näherungsformel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Dieselbe ist unabhängig von dem Elongationswinkel α und zeigt, dass bei überhaupt kleinen Elongationen α oder, wenn $v_0 = 0$ ist, ϑ_0, die Schwingungen gleich langer Pendel trotz der Verschiedenheit der Elongationen, dennoch sehr nahe gleiche Dauer haben. Diese Eigenschaft heisst der Isochronismus kleiner Pendelschwingungen. Er findet bei der Bewegung eines schweren Punktes auf einer beliebigen Curve in der Nähe des tiefsten Punktes statt, wenn der Krümmungskreis dortselbst vertikal steht, und zwar mit derselben Näherung, mit welcher der Krümmungskreis die Curve vertritt. Für die Cycloide gilt der Isochronismus in aller Strenge bei beliebiger Entfernung des schwingenden Punktes vom tiefsten Punkte, wie später gezeigt werden wird.

Um das Problem der Pendelbewegung für kleine ϑ approximativ zu lösen, setzt man, weil $\lim.\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$ ist für verschwindende ϑ, in der Gleichung der Bewegung ϑ statt $\sin\vartheta$ und gewinnt dadurch die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{a}\vartheta = 0,$$

deren Integral $\vartheta = A\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{a}}$ (s. Cap. IX, §. 2, Nr. 7 S. 346) nach Bestimmung der Constanten A, B durch die Bedingungen

$$\vartheta = \vartheta_0 \text{ und}, \quad v = -a\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \text{ für } t = 0$$

die Lösung

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

liefert. Aus ihr ergibt sich für $\vartheta = -\vartheta_0$, wofür t die halbe Oscillationsdauer $\frac{1}{2}T$ wird, $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ als Nährungsformel, wie oben. Multiplicirt man die lineare Differentialgleichung mit a und bedenkt, dass $a\vartheta$ den Kreisbogen $AM = \sigma$ vom tiefsten Punkte bis zum Punkte M bedeutet, so wird sie

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{g}{a}\sigma = 0\,.$$

Dies ist aber die Gleichung für die geradlinige oscillirende Bewegung, welche die Projection der gleichförmigen Kreisbewegung ist. Die der obigen Näherungsformel zu Grunde liegende mechanische Idee ist also keine andere, als dass man wegen der Kleinheit der Amplituden den Bogen, welchen der Pendelpunkt beschreibt, als eine Gerade, die Bewegung auf ihm aber als die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung ansehen darf. Der Isochronismus der Schwingungen erscheint dabei als eine Folge davon, dass bei jener oscillirenden Bewegung die Oscillationsdauer von der Oscillationsweite unabhängig ist. Die Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ konnte also unmittelbar aus Cap. III, §. 12. entnommen werden.

4. Zweiter Fall. $L = 2a = H$. Hier wird nach (5) $v = 2\sqrt{ag}\,.\cos\frac{1}{2}\vartheta$, $\overset{*}{v} = 2\sqrt{ag}$, $\varphi = \frac{1}{2}\vartheta$, da $\alpha = \pi$ oder Dreieck AUB gleichschenklig ist. Daher wird nach (8) wegen $\varkappa = 1$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{1}{2}\vartheta}^{\frac{1}{2}\vartheta_0}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\vartheta_0}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\vartheta}\frac{d\psi}{\sin\psi} = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\vartheta_0}^{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\vartheta}\frac{d\cdot\frac{1}{2}\psi:\cos^2\frac{1}{2}\psi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}}\,l\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\pi-\vartheta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\pi-\vartheta_0)}\,.$$

Für die Zeit t_1 des Niederganges und die Zeit der Bewegung von M bis A ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{a}{g}}\,l\cot g\,\tfrac{1}{4}(\pi-\vartheta_0)\,,\quad t_1 - t = \sqrt{\frac{a}{g}}\,l\cot g\,\tfrac{1}{4}(\pi-\vartheta)\,.$$

Die Geschwindigkeit kann erst Null werden, wenn der Punkt in B anlangt. Da für die Bewegung nach diesem Punkte $\vartheta = -\pi$ wird, so folgt, dass die Zeit t, welche verfliessen würde, bis der Punkt dort ankommt, unendlich wird. Der Punkt steigt daher immer langsamer auf und nähert sich B nur asymptotisch, ohne ihn zu erreichen.

Setzt man $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(\pi-\vartheta_0) = \beta$, so gibt die obige Formel für t:

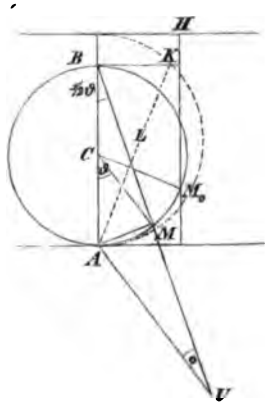

Fig. 160.

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arc\,tg}.\,\beta e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}}$$

und

$$v = -a\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\beta\sqrt{ag}}{e^{-t\sqrt{\frac{g}{a}}} + \beta^2 e^{t\sqrt{\frac{g}{a}}}}\,.$$

5. Dritter Fall. $L > 2a$. Die Formel (5) liefert, wenn man $\frac{2a}{L} = \varkappa$ setzt, wo $\varkappa < 1$ und (Fig. 160) $\varkappa = \cos BAK$ ist

$$v = L\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta}\,,\quad \overset{*}{v} = L\sqrt{\frac{g}{a}}\,.$$

Auch besteht die Construction des Winkels φ, wie beim ersten Falle fort und ist

$$L\sin\varphi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\vartheta$$

d. h. $\varkappa \sin \frac{1}{2} \vartheta = \sin \varphi$ und $v = \overset{*}{v} \cos \varphi$; indessen können wir ϑ als Function von t ohne Vermittelung von φ finden. Denn setzt man $v = 2a \frac{d \cdot \frac{1}{2}\vartheta}{dt}$ gleich dem eben entwickelten Ausdrucke für v, so ergibt sich

$$dt = -\varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d \cdot \frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}} \text{ und also } t = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\frac{1}{2}\vartheta}^{\frac{1}{2}\vartheta_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}}.$$

Für die Zeit t_1 des Niederganges wird

$$t_1 = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta_0} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\tfrac{1}{2}\vartheta_0, \varkappa)$$

und daher für die Zeit $t_1 - t$ von einer beliebigen Stelle bis zum tiefsten Punkte

$$t_1 - t = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}} = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot F(\tfrac{1}{2}\vartheta, \varkappa).$$

Hiermit erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\vartheta = \text{am.} \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t),$$

$$v = \frac{2}{\varkappa} \sqrt{ag} \cdot \Delta \,\text{am.} \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t),$$

$$\sin \varphi = \varkappa \sin \text{am.} \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t),$$

$$\delta = BM = 2a \cos \tfrac{1}{2}\vartheta = 2a \cos \text{am.} \frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{g}{a}} (t_1 - t).$$

In unserem Falle macht der Pendelpunkt volle Umläufe. Für einen solchen ist ϑ negativ und zwar $\vartheta = -(2\pi - \vartheta_0)$. Hiermit liefert die Gleichung für $t_1 - t$, wenn T die Umlaufszeit bezeichnet,

$$t_1 - T = \varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} F(-(\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta_0), \varkappa).$$

Es ist aber

$$F(-(\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta_0), \varkappa) = \int_0^{-(\pi - \frac{1}{2}\vartheta_0)} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = -\int_0^{\pi - \frac{1}{2}\vartheta_0} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = -\left(\int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_{\pi - \frac{1}{2}\vartheta_0}^{\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi}\right)$$

$$= -\left(2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} - \int_{\frac{1}{2}\vartheta_0}^{0} \frac{d\psi}{\Delta\psi}\right) = -\left(2K + \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta_0} \frac{d\psi}{\Delta\psi}\right),$$

wo abkürzend $\Delta\psi = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \psi}$ und die Vertauschung der Variabeln $-\psi$ und $\pi - \psi$ für ψ vorgenommen sind. Daher also

$$t_1 - T = -\varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \left(2K + \int_0^{\frac{1}{2}\vartheta_0} \frac{d\psi}{\Delta\psi}\right),$$

woraus mit Hülfe des obigen Werthes von t_1 schliesslich die Umlaufszeit folgt, nämlich:

$$T = 2\varkappa \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot K.$$

6. Die Beschleunigung N des Normalwiderstandes folgt nach Nr. 1 für alle Fälle der Formel $\frac{v^2}{a} = N - g \cos \vartheta$. Sie ist daher

$$N = \frac{v^2}{a} + g \cos \vartheta, \quad v^2 = \frac{g}{a} [L^2 - (2a \sin \tfrac{1}{2} \vartheta)^2].$$

Im tiefsten Punkte, für $\vartheta = 0$, erreicht sie ein Maximum $\frac{v^2}{a} + g$, im höchsten Punkte, falls derselbe erreicht wird, für $\vartheta = -\pi$, ein Minimum $\frac{g}{a^2}(L^2 - 5a^2)$. Für $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$ wird $N = \frac{g}{a^2}(L^2 - 2a^2)$. Ist die Bahn aus einem festen Material gearbeitet, so wird N von der Festigkeit desselben geleistet, wird der Punkt durch einen Pendelfaden in der Bahn erhalten, so ist N eine Folge des Zusammenhangs der Theilchen dieses Fadens.

§. 8. Zur Bearbeitung: Ein schwerer Punkt bewegt sich auf einer Cylinderschraubenlinie, deren Axe horizontal oder unter einem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, man soll die Bewegung des Punktes nach Anleitung des §. 7 untersuchen. Specialfall $\alpha = \frac{1}{2}\pi$.

§. 9. **Bewegung eines schweren Punktes auf der Cycloïde.** Es sei $AMOB$ (Fig. 161) ein Cycloïdenbogen zwischen zwei Spitzen A und B, C der Mittelpunkt des rollenden Kreises, entsprechend der Lage M des beschreibenden Punktes und $MCN = \omega$ der zugehörige Wälzungswinkel, um welchen sich der rollende Kreis umgedreht hat, während der beschreibende Punkt den Bogen AM durchlaufen hat. Die Gleichungen der Cycloïde für $AP = x$, $PM = y$, $CM = a$ sind

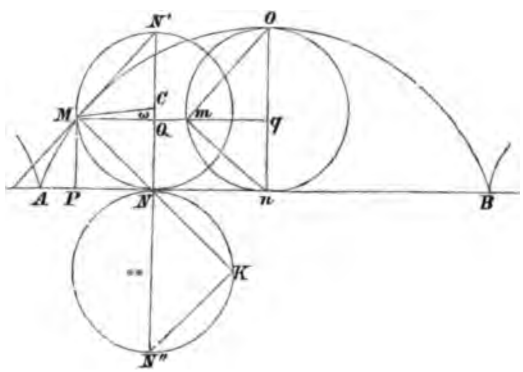

Fig. 161.

$$x = a(\omega - \sin \omega); \quad y = a(1 - \cos \omega) = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega.$$

Aus ihnen folgt für die Neigung der Tangente gegen die Basis der Cycloïde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\omega} : \frac{dx}{d\omega} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\omega,$$

d. h. die Tangente der Cycloïde bildet mit der zur Basis senkrechten Richtung den Winkel $\frac{1}{2}\omega$ und geht durch den Gegenpunkt N' des Berührungspunktes N der Basis und des rollenden Kreises hindurch. Die Normale ist daher MN.

Die Tangente eines auf M unmittelbar folgenden Curvenpunktes M' bildet mit der Richtung NN' den Winkel $\frac{1}{2}\omega + d \cdot \frac{1}{2}\omega$; daher bilden die beiden aufeinanderfolgenden Tangenten miteinander den Contingenzwinkel $d\varepsilon = d \cdot \frac{1}{2}\omega$.

Das Bogenelement ds, wenn s von A nach M, entsprechend dem wachsenden Winkel ω, gezählt wird, ist $ds = MN \,.\, d\omega = 2a \sin \frac{1}{2}\omega \, d\omega$, weil N das Momentancentrum ist (Cap. III. §. 20, Nr. 5). Daher ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon} = 4a \sin \tfrac{1}{2}\omega = 2 \cdot MN,$$

weil wegen des rechten Winkels NMN' die Länge $MN = 2a \sin \frac{1}{2}\omega$ ist. Der Krümmungshalbmesser ist mithin der doppelten Normalen MN gleich. Construirt man auf der dem rollenden Kreise abgewandten Seite der Cycloïdenbasis $NN'' = NN'$ und verbindet den Krümmungsmittelpunkt K mit N'', so wird $\Delta NN''K \cong NN'M$ und liegt mithin K auf einem über NN'' als Durchmesser beschriebenen Kreise. Hieraus erkennt man, dass die Evolute der Cycloïde wieder eine Cycloïde ist, von denselben Dimensionen, wie sie selbst; beide Cycloïden haben gemeinschaftliche Richtung der Basis, liegen auf entgegengesetzten Seiten derselben und sind gegeneinander um die halbe Basislänge so verschoben, dass die Spitzen der einen mit den Scheiteln der anderen paarweise auf demselben Perpendikel zur Basis liegen.

Die Bogenlänge $AM = s$ der Cycloïde wird $s = 4a - 4a \cos \frac{1}{2}\omega$. Der halbe Cycloïdenbogen AO, $\omega = \pi$ entsprechend, ist $4a$ und folglich der Bogen $OM = S$, vom Scheitel an gerechnet $S = 4a \cos \frac{1}{2}\omega$. Es ist aber

$$MN' = mO = 2a \cos \tfrac{1}{2}\omega$$

und wenn man $Oq = N'Q = x$ setzt, indem man On als eine Abscissenaxe ansieht, so besteht zwischen dem Bogen S und seiner Projection auf diese Abscissenaxe die Gleichung $S^2 = 8ax$, eine Gleichung, welche ganz gleichgebildet ist mit der Parabelgleichung in Bezug auf den Scheitel und die Axe derselben. Da $Om^2 = 2ax$ ist, so folgt weiter $S = 2 \,.\, Om$.

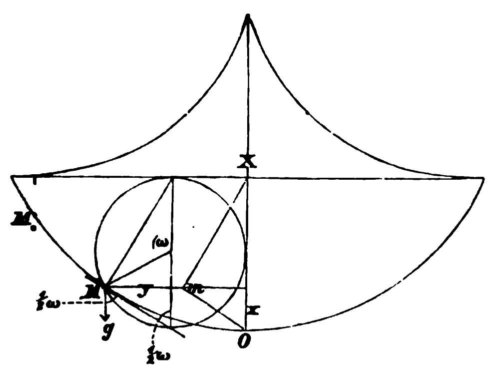

Fig. 162.

Ein schwerer Punkt falle jetzt auf einer vertikalstehenden Cycloïde (Fig. 162), deren Basis horizontal liegt und welche ihre concave Seite nach oben kehrt. Der bewegliche Punkt verlasse die Anfangslage M_0 mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0$. Da die Richtung der Beschleunigung der Schwere mit der Richtung der Cycloïdentangente den Winkel $\frac{1}{2}\omega$ bildet, so ist $g \cos \frac{1}{2}\omega$ die Tangentialcomponente und $g \sin \frac{1}{2}\omega$ die Normalcomponente der Beschleunigung; daher hat man folgendes Gleichungssystem zu behandeln:

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \tfrac{1}{2}\omega, \quad \frac{v^2}{\varrho} = g \sin \tfrac{1}{2}\omega - N.$$

Rechnet man den Bogen s von M_0 an abwärts, so kommt noch hinzu: $\frac{ds}{dt} = v$; will man aber den Bogen S vom Scheitel an aufwärts nach M gerechnet, einführen, so wird $-\frac{dS}{dt} = v$, weil $s + S$ die constante Bogenlänge $M_0 O$ darstellt.

Da ferner $\cos \frac{1}{2}\omega = Om : 2a$ und $S = 2 \,.\, Om$, also $\cos \frac{1}{2}\omega = S : 4a$ und $\sin \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\varrho : 2a$ ist, so werden die beiden Gleichungen der Bewegung:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{g}{4a} S = 0, \qquad \frac{v^2}{\varrho} = \frac{g}{4a} \cdot \varrho - N.$$

Ist $S = S_0 = OM_0$, $v = 0$ für $t = 0$, so liefert die erste dieser Gleichungen vermöge ihrer linearen Beschaffenheit

$$S = S_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{4a}}, \qquad v = \sqrt{\frac{g}{4a}} \cdot S_0 \sin \cdot t \sqrt{\frac{g}{4a}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\omega = \cos \tfrac{1}{2}\omega_0 \,.\, \cos t \sqrt{\frac{g}{4a}}, \qquad x = x_0 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{4a}}.$$

Für die Zeit t_0 des Niederganges von M_0 bis zum Scheitel O ist $\omega = \pi$, $S = S_0$ zu setzen und folgt hiermit $0 = \cos t_0 \sqrt{\frac{g}{4a}}$, d. h.

$$t_0 = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Dieser Ausdruck enthält keine Spur von Grössen, welche die Anfangslage bestimmen. Daher besitzt die Cycloïde die ausgezeichnete Eigenschaft, dass ein schwerer Punkt dieselbe Zeit gebraucht, um auf ihr bis zum tiefsten Punkte zu fallen, mag er von einer Anfangslage ohne Geschwindigkeit ausgehen, von welcher man will. Deswegen heisst die Cycloïde die „Tautochrone".

Die Zeit t_0 ist der vierte Theil der Oscillationsdauer eines Kreispendels von der Länge $4a$, wenn dieselbe nach der für kleine Elongationen näherungsweise geltenden Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ (s. S. 399) berechnet wird. Jene Formel, welche für das Kreispendel eine Näherungsformel ist, gilt mithin für das Cycloïdenpendel in aller Strenge. Der Krümmungshalbmesser der Cycloïde ist am Scheitel gleich $4a$, nämlich gleich dem doppelten Durchmesser des rollenden Kreises, welcher daselbst die Normalenlänge darstellt; jener Näherungsformel liegt folglich die Vorstellung zu Grunde, dass die kleinen Schwingungen auf dem Kreise identificirt werden können mit Schwingungen auf einer Cycloïde, deren Erzeugungskreis einen Radius besitzt gleich dem vierten Theile des Radius von dem Kreise, auf welchem jene Bewegung erfolgt.

Die Eigenschaft des Tautochronismus der Cycloïde wurde von Huyghens entdeckt. Er nöthigte eine kleine schwere Kugel, eine Cycloïde zu beschreiben. indem er sie an einem Faden schwingen liess, welcher über die Evolute der Curve hingespannt war. Das betreffende Werk von Huyghens führt den Titel: *Horologium oscillatorium* und ist der Theorie der Pendeluhren gewidmet.

Eine leichte Interpretation des Ausdruckes für die Tangentialbeschleunigung auf der Cycloïde genügt übrigens, den Tautochronismus unmittelbar einzusehen. Wir fanden, dass dieselbe $\frac{g}{4a} \cdot S$ ist, wenn S den Bogen vom Scheitel an aufwärts gerechnet bedeutet. Bereits Cap. III, §. 12. fanden wir für die oscillirende Bewegung, welche die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gerade Linie ist und bei welcher in Folge dessen die Beschleunigung proportional dem Abstande x des beweglichen Punktes von dem Mittelpunkt C der Oscillation ist, die Oscillationsdauer gleich 2π dividirt durch $\sqrt{\varkappa}$, wenn $\varkappa$ der Proportionalitätsfactor der Beschleunigung $\varkappa = \varkappa x$ war. Ferner ist aus Cap. VIII, §. 6. klar, dass wenn die Gerade, in welcher die oscillirende Bewegung erfolgt, zu irgend einer Curve gebogen wird, auf dieser die oscillirende Bewegung ebenso erfolgen wird, sobald die Beschleunigung der geradlinigen Bewegung für sie zur Tangentialbeschleunigung wird. Denn die Tangentialbeschleunigung allein bestimmt das Gesetz der Bewegung in der Bahn. Biegen wir also eine Gerade, auf welcher ein Punkt mit der Beschleunigung $\frac{g}{4a}\,x$ oscillirt, so zu einer Cycloïde, dass der Mittelpunkt der Oscillation der Scheitel der Cycloïde wird und der Abstand x in den Bogen S, von diesem Scheitel an gerechnet, übergeht, so wird die Oscillationsdauer $T = 2\pi : \sqrt{\frac{g}{4a}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}$, übereinstimmend mit obigem Werthe für $4t_0$. Es gibt unzählige Tautochronen doppelter Krümmung, welche man durch Aufrollen der Ebene der Cycloide zu einem Cylinder erhält.

§. 10. Wir wollen jetzt das Problem der ebenen Tautochrone unmittelbar angreifen und stellen uns daher die Aufgabe: Es sind gegeben zwei in einer Vertikalebene liegende Punkte M_0 und O (Fig. 163), deren Höhendifferenz h beträgt; auf welcher ebenen vertikalen Curve muss ein schwerer Punkt von M_0 nach O ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen, damit die Fallzeit T von M_0 nach O von h unabhängig sei, sodass der Punkt M_0 auch irgendwo anders auf der gesuchten Curve gewählt werden kann, ohne dass dadurch T eine Aenderung erleidet?

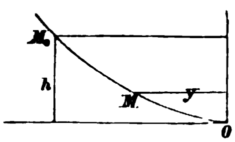

Fig. 163.

Es sei der tieferliegende Punkt O der Ursprung rechtwinkliger Coordinaten x, y, von denen die x vertikal aufwärts, die y horizontal gerechnet werden. Der Bogen $OM = s$, welcher positiv von O nach M gerechnet werden möge, wird eine noch unbekannte Function von x sein, $s = \varphi(x)$, auf deren Bestimmung die Lösung der Aufgabe hinauskommt. Nun ist einerseits $v = \frac{d\,(M_0 M)}{dt} = -\frac{ds}{dt}$, andererseits nach dem Principe der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}v^2 = g\,(h - x)$ und folglich $dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g\,(h-x)}}$. Daher wird die Fallzeit T auf dem Bogen $M_0 O$

$$T = \int_h^0 \frac{-\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{2g\,(h-x)}} = \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{2g\,(h-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{\sqrt{h}\,\varphi'(h\omega)}{\sqrt{1-\omega}}\,d\omega,$$

wenn $x = h\omega$ gesetzt wird, um die Grenzen von h frei zu machen. Da die Fallzeit T von h unabhängig sein soll, so muss die Bedingung $\frac{dT}{dh} = 0$ durch die Wahl der Function $\varphi(x)$ erfüllt werden. Diese Bedingung wird

$$\frac{dT}{dh} = \frac{1}{\sqrt{8gh}}\int_0^1 \frac{2h\omega\,\varphi''(h\omega) + \varphi'(h\omega)}{\sqrt{1-\omega}}\,d\omega = 0\,.$$

Damit dieselbe bei jedem Werthe von h erfüllt sei, muss der Elementarfactor des bestimmten Integrales verschwinden, d. h. es muss sein

$$2h\omega\,\varphi''(h\omega) + \varphi'(h\omega) = 0,$$

oder, wenn man für $h\omega$ wieder x schreibt:

$$2x\,\varphi''(x) + \varphi'(x) = 0.$$

Hieraus folgt aber für $\varphi(x)$ zunächst $\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{1}{2x}$, d. h. $\frac{d\,.\,l\,\varphi'(x)}{dx} = -\frac{1}{2x}$, und also durch Integration: $l\,.\,\varphi'(x) = l\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, wo a eine beliebige Constante ist und durch eine zweite Integration

$$s = \varphi(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{a}{x}}\cdot dx = 2\sqrt{ax},$$

welches die Gleichung der Cycloïde zwischen Abscisse x und Bogen s ist, deren Scheitel in O liegt. Hiermit ist die Aufgabe gelöst und zugleich erwiesen, dass die Cycloïde die einzige ebene Tautochrone ist, denn die integrirte Differentialgleichung lässt nur eine Function $\varphi(x)$ als Lösung zu.

§. 11. Man kann die vorige Aufgabe noch zu der folgenden verallgemeinern, deren Lösung zuerst von **Abel** im **Crelle'schen** Journale, Bd. I, S. 153 gegeben wurde: **Auf welcher Curve muss ein schwerer Punkt von einer Stelle M_0 zu einer um die Grösse h tiefer liegenden Stelle O fallen, damit die Fallzeit T eine gegebene Function $\psi(h)$ der Fallhöhe h werde?**

Unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ist die Bedingung zu erfüllen

$$\int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} = \sqrt{2g}\cdot\psi(h).$$

Um hieraus die unbekannte Function $s = \varphi(x)$, welche den Bogen der gesuchten Curve von O nach M gerechnet als Function der Abscisse x darstellt, zu finden, integriren wir beide Seiten dieser Gleichung nach Multiplication mit $\frac{dh}{\sqrt{\mu-h}}$ abermals und zwar von 0 bis μ; es wird sich dann zeigen, dass die beiden Integralzeichen links weggeschafft werden können. Zunächst ist also unsere Gleichung

$$\int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu-h}}\int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}} = \sqrt{2g}\int_0^\mu \frac{\psi(h)\,dh}{\sqrt{\mu-h}},$$

welche wir noch dadurch vereinfachen können, dass wir die Wurzeln mit Hülfe zweckmässiger Substitutionen fortbringen. Setzen wir nämlich auf der linken Seite $h - x = y^2$, so kommt:

$$2\int_0^\mu \frac{dh}{\sqrt{\mu-h}}\int_0^{\sqrt{h}} \varphi'(h-y^2)\,dy,$$

und indem wir hierin jetzt für h die neue Variabele x durch die Gleichung $\mu - h = x^2$ einführen, geht diese Seite über in

$$4\int_0^{\sqrt{\mu}} dx \int_0^{\sqrt{\mu-x^2}} \varphi'(\mu - x^2 - y^2)\,dy$$

und hierdurch wird unsere ganze Gleichung

$$4\int\limits_0^{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^{\sqrt{\mu - x^2}} \varphi'(\mu - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \sqrt{2g}\int\limits_0^{\mu}\frac{\psi(h)\, dh}{\sqrt{\mu - h}}.$$

Um die linke Seite derselben zu reduciren und die gesuchte Function φ von den Integralzeichen zu befreien, wollen wir eine Interpretation versuchen. Es steht nichts im Wege, das Produkt $dx\,dy$ als das Element eines ebenen Flächenraumes anzusehen, bezogen auf rechtwinklige Coordinaten x, y. Die Grösse $x^2 + y^2$ stellt alsdann das Quadrat der Entfernung dieses Elementes vom Ursprunge dar und das Element $\varphi'(\mu - x^2 - y^2)\, dx\, dy$ des Integrales ist das Produkt aus dem Flächenelemente und einer Function von dem Quadrate dieses seines Abstandes vom Ursprunge. Die Integration nach y ist bei constantem x von $y = 0$ bis $y = \sqrt{\mu - x^2}$ zu führen, d. h. also von der Abscissenaxe bis an den Kreis $x^2 + y^2 = \mu$, welcher mit dem Radius $\sqrt{\mu}$ um den Coordinatenursprung beschrieben werden kann. Die nachfolgende Integration in Bezug auf x erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = \sqrt{\mu}$, und sieht man hieraus deutlich, dass das ganze Doppelintegral die Bildung der Summe aller Elemente $\varphi'[\mu - (x^2 + y^2)]\, dx\, dy$ verlangt, welche dem Viertelkreise angehören. Nun können wir aber diese Summe anders bilden. Wählen wir nämlich Polarcoordinaten r, ϑ, so ist der Ausdruck des Flächenelementes $r dr d\vartheta$ und also $\varphi'(\mu - r^2) r dr d\vartheta$ das Element unseres Doppelintegrales und um die Integration über alle Punkte des Viertelkreises zu erstrecken, haben wir nach r von $r = 0$ bis $r = \sqrt{\mu}$, nach ϑ aber von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ zu integriren. Das Doppelintegral wird auf diese Weise ohne Aenderung seines Werthes in andere Elemente, die sich ausserdem noch etwas anders gruppiren, zerlegt. Wir erhalten auf diese Weise jetzt für die ganze linke Seite unserer Gleichung

$$4\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\mu}} \varphi'(\mu - r^2)\, r dr\, d\vartheta$$

und können die Integration nach ϑ sofort ausführen, indem sie nur den Factor $\frac{1}{2}\pi$ liefert, sodass dieser Ausdruck übergeht in:

$$2\pi\int\limits_0^{\sqrt{\mu}} \varphi'(\mu - r^2)\, r dr.$$

Da aber nun $\varphi'(\mu - r^2) \,.\, 2 r dr = - d \,.\, \varphi(\mu - r^2)$ ist so kann auch das letzte Integralzeichen entfernt werden und bleibt blos

$$\pi\,[\varphi(\mu) - \varphi(0)].$$

Hiermit wird jetzt unsere ganze Gleichung

$$\varphi(\mu) - \varphi(0) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2g}\int\limits_0^{\mu}\frac{\psi(h)\, dh}{\sqrt{\mu - h}},$$

und damit ist unsere Function $s = \varphi(x)$ gefunden, nämlich weil s für das Argument Null verschwindet, d. h. $\varphi(0) = 0$ ist, wird

$$s = \frac{1}{\pi}\sqrt{2g}\int\limits_0^{x}\frac{\psi(h)\, dh}{\sqrt{x - h}}.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Curve, bezogen auf Abscisse und Bogen als Coordinaten. Das Wesentliche der angewandten Methode besteht darin, dass das Element des ursprünglichen Integrales so verändert wird, dass es als das Element eines Doppelintegrales auftritt, für welches beide Integrationen ausführbar sind und also in Folge dessen die gesuchte Function von dem Integralzeichen befreit wird.

Wird $\psi(h)$ constant, nämlich $\psi(h) = \sqrt{a}$, so ergibt sich wieder die Cycloïde. Denn es ist $\int\limits_0^x \frac{dh}{\sqrt{x-h}} = 2\sqrt{x}$, mithin $s^2 = \frac{8ag}{\pi^2} \cdot x$. Der Radius des Wälzungskreises ist $\frac{ag}{\pi^2}$.

Das Problem der Tautochrone ist noch einer anderen bedeutenden Verallgemeinerung fähig, indem man die Curve suchen kann, auf welcher ein Punkt, welcher irgend welchen von dem Orte abhängigen Beschleunigungen unterworfen ist, sich bewegen muss, damit die Zeit, welche er braucht, um an einer bestimmten Stelle anzulangen, unabhängig sei von der Länge des Weges, den er zurückgelegt hat. In dieser Allgemeinheit haben Newton und Euler das Problem aufgefasst. Vgl. Jullien, *Problèmes de mécanique rationnelle*, T. I, p. 374 u. ffg.)

Eine Geschichte des Problems der Tautochrone gab Ohrtmann (Das Problem der Tautochronen. Jahresber. über die königl. Realschule, Vorschule und Elisabethenschule zu Berlin 1872; ins Französ. übersetzt von Dusausoy, Rome 1875).

§. 12. Die Cycloïde besitzt in Bezug auf die Bewegung eines schweren Punktes auf ihr noch eine weitere ausgezeichnete Eigenschaft. Sie ist unter allen Curven, welche durch zwei gegebene Punkte A, B gelegt werden können, diejenige, auf welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte zum andern gelangt. Sie heisst daher die Brachistochrone des schweren Punktes. Das Problem der Brachistochrone wird mit Hülfe der Variationsrechnung gelöst, indem man die Zeit des Fallens von A nach B nach den Regeln dieses Calculs zu einem Minimum macht und aus den Bedingungen des Minimums die Gestalt der unbekannten Curve bestimmt. Indessen kann man dazu auch durch folgende geometrische Betrachtungen gelangen.

Zunächst ist klar, dass wenn eine Curve Brachistochrone zwischen zweien ihrer Punkte A und B ist, sie dieselbe Eigenschaft zwischen je zwei Punkten M, M' des Bogens AB besitzen muss; sonst würde man dem Bogen MM' den Bogen einer anderen Curve substituiren können, auf welchem der Punkt in kürzerer Zeit von M nach M' gelangen könnte und in Folge dessen wäre die Zeit des Fallens von A nach B auf der ursprünglichen Curve nicht die kürzeste, diese Curve also nicht die Brachistochrone. Ferner lassen sich zwei Eigenschaften der Brachistochrone angeben, von denen die eine sich auf die Lage ihrer Schmiegungsebene, die andere auf die Neigung ihrer Tangente gegen die Vertikale und die Geschwindigkeit bezieht. Es seien M, M', M'' drei aufeinanderfolgende Punkte und also MM', $M'M''$ zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente; durch die drei Punkte legen wir die horizontalen Niveauebenen ε, ε', ε'' und bezeichnen die Geschwindigkeiten für ε und ε' mit v, v'. Da jede Bewegung im Zeitelement als gleichförmig anzusehen ist, so denken wir uns das Element MM' mit der Geschwindigkeit v, das Element $M'M''$ mit der Geschwindigkeit v' beschrieben und bemerken, dass wenn wir zwischen M und M'' irgend zwei andere Elemente $M\mu$, $\mu M''$ ziehen würden, deren gemeinsamer Punkt μ auf ε' liegt, $M\mu$ ebenfalls mit der Geschwindigkeit v und $\mu' M''$ mit der Geschwindigkeit v' durchlaufen würde, da die Geschwindigkeit für alle Punkte derselben Niveauebene dieselbe ist. Legen wir nun durch M und M'' die Vertikalebene, so kann gezeigt werden, dass die beiden Elemente MM', $M'M''$ der Brachistochrone in diese Ebene hineinfallen müssen, d. h. dass die Schmiegungsebene des Punktes M vertikal ist. Denn ist M_1 die Projection von M' auf diese Ebene, so ist $MM_1 < MM'$ und $M_1 M'' < M'M''$, wo auch immer M' in der Niveauebene ε' liegen mag, mithin wäre die Zeit, welche ein Punkt braucht, um MM' mit der Geschwindigkeit v zu durchlaufen, grösser als die Zeit, welche er bei derselben Geschwindigkeit zum Durchlaufen von MM_1 nöthig haben würde; ebenso wäre zum Durchlaufen von $M'M''$ mit der Geschwindigkeit v' eine grössere Zeit erforderlich, als zum Durchlaufen von $M_1 M''$. Daher fällt M' mit M_1 zusammen. Je zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen der Brachistochrone fallen zusammen; die Brachistochrone ist eben und ihre Ebene die Vertikalebene der Punkte A, B.

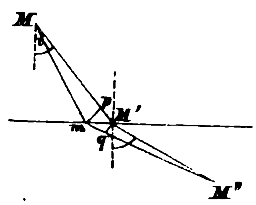
Fig. 164.

Der zweite Satz sagt aus, dass, wenn i die Neigung der Tangente der Brachistochrone in M gegen die Vertikale ist, der Quotient $\frac{\sin i}{v}$ längs der ganzen Curve constant ist. Zieht man nämlich nach einem, dem Punkte M' benachbarten Punkte m (Fig. 164) in der Schnittlinie der Ebene der Brachistochrone mit der Niveauebene ε' des Punktes M' die Strecken Mm, $M''m$ und fällt von m auf MM' das Perpendikel mp, sowie von M' auf mM'' das Perpendikel $M'q$, so wird $Mm = Mp$ und ebenso $qM'' = M'M''$. Daher sind die Zeiten, welche der bewegliche Punkt braucht, um $MM' + M'M''$ und $Mm + mM''$ zu durchlaufen:

$$\frac{MM'}{v} + \frac{qM''}{v'} \text{ und } \frac{Mp}{v} + \frac{mM''}{v'}$$

und der Unterschied beider beträgt daher

$$\frac{pM'}{v} - \frac{mq}{v'} = mM'\left(\frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'}\right),$$

wenn i, i' die Neigungen von MM' und $M'M''$ gegen die Vertikale in M, M' bedeuten. Diese unendlich kleine Differenz ist aber die Aenderung, welche die Fallzeit des beweglichen Punktes beim Uebergange von den Elementen MM', $M'M''$ der Brachistochrone zu den Elementen Mm, mM'' einer benachbarten Curve erleidet, und da die Fallzeit für die Brachistochrone ein Minimum ist, so muss diese Aenderung Null sein. Daher ist

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'},$$

d. h. der Quotient $\frac{\sin i}{v}$ bleibt beim Uebergange von einem Elemente der Brachistochrone zum folgenden, also auch längs der ganzen Curve constant.

Bezeichnen wir den reciproken Werth dieses Quotienten, welcher eine Länge darstellt, mit μ, setzen also $\sin i = \frac{v}{\mu}$ und ziehen die Formel $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = gy$ heran, welche das Princip der lebendigen Kraft gibt und worin v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen Punktes (in A), y die Tiefe von M unter der

Niveauebene von A bedeutet, so kommt, wenn wir noch $\frac{v_0^2}{2g} = h$ und $\frac{\mu^2}{2g} = 2a$ setzen

$$\sin i = \sqrt{\frac{y+h}{2a}}.$$

Tragen wir die Länge $h = AH$ vertikal über A auf (Fig. 165), ziehen durch H in der Ebene der Curve die Gerade HX horizontal, in M die Normale MN und die Tangente MN', von welcher ersteren HX in N und letztere die Verticale des Punktes N in N' treffen mag, sowie MQ parallel HX, so wird

$$\sin i = \sin MN'N = \frac{MN}{NN'} = \frac{\sqrt{NN'.NQ}}{NN'} = \sqrt{\frac{NQ}{NN'}} = \sqrt{\frac{y+h}{NN'}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem oben für $\sin i$ aufgestellten, so folgt $NN' = 2a$, d. h. NN' ist constant. Beschreibt man daher über NN' als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser durch M, bleibt während der Bewegung von constanter Grösse, berührt die Horizontale HX und hat zu der Brachistochrone die Beziehung, dass deren Normale und Tangente fortwährend durch den Berührungspunkt N mit HX und dessen Gegenpunkt N' hindurchgehen. Diese Eigenschaften charakterisiren aber hinreichend die Brachistochrone als die Cycloïde.

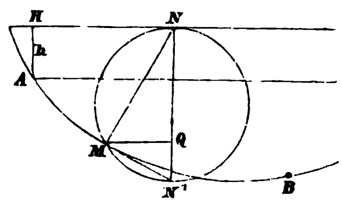

Fig. 165.

Ist v_0 gleich Null, so wird A zur Spitze der Cycloïde. In diesem Falle ist es sehr leicht, die Cycloïde zu construiren. Es sind nämlich alle Cycloïden, welche die Spitze A und die Richtung der Basis AX gemein haben, ähnliche und ähnlich liegende Curven und unterscheiden sich in nichts als der Grösse des rollenden Kreises. Construirt man daher irgend eine derselben über der Basis $A\alpha$ und sucht ihren Durchschnitt β mit dem Strahle AB, so genügt es, zu $\beta\alpha$ die Parallele BA' zu ziehen, um die Basis AA' der durch B gehenden Cycloïde zu finden. Der Radius ihres Wälzungskreises ist $\frac{AA'}{2\pi}$. Ist aber v_0 nicht Null, so liefert $\frac{v_0^2}{2g} = h$ zunächst die Höhe der Cycloïdenbasis über der Anfangslage A des beweglichen Punktes. Um in dieser Basis die Spitze der Cycloïde zu finden, bedenken wir, dass in Bezug auf dieselbe, als Ursprung eines Coordinatensystems der x, y, für welches die x-Axe in die Basis der Cycloïde fällt, die Gleichungen der Cycloïde durch die Coordinaten $x = x_1$, $y = h$; $x = x_2$, $y = h'$ der Punkte A, B erfüllt werden müssen, dass also die vier Gleichungen

$$\begin{array}{ll} x_1 = a\,(\omega_1 - \sin\omega_1) & x_2 = a\,(\omega_2 - \sin\omega_2) \\ h = \quad 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega_1 & h' = \quad 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega_2, \end{array}$$

bestehen, zu welchen noch eine weitere $x_2 - x_1 = d$ hinzutritt, weil die Horizontalprojection der Entfernung AB als gegeben anzusehen ist. Nach Elimination der Hülfswinkel ω_1, ω_2, welche die den Punkten A, B entsprechenden Wälzungswinkel sind, bleiben drei Gleichungen zwischen x_1, x_2, d, a, h, h' übrig, aus welchen x_1, x_2, a gefunden werden können.

Auch das Problem der Brachistochrone ist einer Verallgemeinerung fähig, indem man an die Stelle der constanten Beschleunigung der Schwere eine Beschleunigung treten lässt, deren Grösse und Richtung vom Orte des beweglichen Punktes abhängt. Die beiden oben benutzten Sätze behalten in soweit auch bei dem allgemeinen Probleme Geltung, als an die Stelle der Niveauebenen allgemeine Niveauflächen treten und der Winkel i die Neigung des Bogenelementes der Brachistochrone gegen die Normale der Niveaufläche angibt.

Das Problem der Brachistochrone rührt von Galilei her, wurde aber erst 1696 von Jac. Bernoulli in den *Actis eruditorum* präcis gestellt. Es wurde damals von Leibnitz gelöst; kurze Zeit darauf gaben auch Jacob Bernoulli, de l'Hopital und Newton Lösungen desselben. Vgl. weiter über dasselbe Hâton de la Goupillière, Recherches de la brachistochrone d'un corps pesant, eu égard aux resistances passives. Rapport de M. Phillips (Comptes rendus de l'Acad. des sc. T. 84. p. 72; die Abhandlung selbst wird in den Mém. des savants étrangers erscheinen) und desselben Verfassers: Problème inverse des brachistochrones; Rapport de M. Bouquet (Comptes r. T. 83, p. 143).

§. 13. Bewegung eines schweren Punktes auf einem vertikalen Kreise im widerstehenden Mittel. Ein schwerer Punkt sei genöthigt, auf einem vertikalen Kreise sich zu bewegen, es wirke aber auf ihn der Widerstand eines Mittels, in welchem er sich bewegt. Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null, die Schwingungen seien sehr klein und verhältnissmässig langsam, d. h. der Radius a des Kreises (der Pendelfaden) sei sehr lang. Bedeutet R die Beschleunigung des Widerstandes, so werden die Gleichungen der Bewegung unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise des §. 17. für kleine Schwingungen, näherungsweise

$$\frac{dv}{dt} - g\vartheta + R = 0,\ a\frac{d\vartheta}{dt} + v = 0\,.$$

Ohne eine bestimmte Annahme über R zu machen, können wir ϑ und v nach folgender, von Cauchy herrührender Methode darstellen, so dass erst nachher die besonderen Voraussetzungen über R eintreten.

Wir multipliciren die zweite Gleichung mit dem noch zu bestimmenden Factor λi und addiren sie zur ersten. Dies liefert die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}(v + \lambda a\vartheta i) + \lambda i\left(v - \frac{g\vartheta}{\lambda i}\right) + R = 0\,.$$

Nun bestimme man λ so, dass $v - \frac{g\vartheta}{\lambda i} = v + \lambda a\vartheta i$ wird, wofür sich $\lambda = \sqrt{\frac{g}{a}}$ ergibt. Dadurch nimmt die Differentialgleichung die Form an

$$\frac{d}{dt}(v + \lambda a\vartheta i) + \lambda i(v + \lambda a\vartheta i) + R = 0\,,$$

oder indem man noch mit $e^{\lambda t i}$ multiplicirt, wodurch die beiden ersten Glieder links in den Differentialquotienten des Produktes $e^{\lambda t i}(v + \lambda a\vartheta i)$ übergehen:

$$\frac{d}{dt}\cdot e^{\lambda t i}(v + \lambda a\vartheta i) + Re^{\lambda t i} = 0\,.$$

Integrirt man diese Gleichung unter der Annahme $v = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$ für $t = 0$ von $t = 0$ bis $t = t$, so folgt

$$e^{\lambda t i}(v + \lambda a\vartheta i) - \lambda a\vartheta_0 i + \int_0^t Re^{\lambda t i}\,dt = 0$$

und indem man nach Einführung von $e^{\lambda t i} = \cos\lambda t + i\sin\lambda t$ die reellen und imaginären Bestandtheile trennt, ergeben sich für v und ϑ die Gleichungen:

$$v = -A\cos\lambda t + (\lambda a\vartheta_0 - B)\sin\lambda t,$$
$$\lambda a\vartheta = A\sin\lambda t + (\lambda a\vartheta_0 - B)\cos\lambda t,$$
$$A = \int_0^t R\cos\lambda t\,dt,\quad B = \int_0^t R\sin\lambda t\,dt,\quad \lambda = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Aus diesen Formeln zieht man nachstehende Folgerungen:

Im leeren Raume wird für $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{\pi}{\lambda}$ der Winkel $\vartheta = -\vartheta_0$, im widerstehenden Mittel ist für $t = \frac{\pi}{\lambda}$

$$\vartheta_1 = -\vartheta_0 + \frac{1}{\lambda a}B_{\frac{\pi}{\lambda}} = -\vartheta_0 + \frac{1}{\lambda a}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} R\sin\lambda t\,dt$$

also da $B_{\frac{\pi}{\lambda}} > 0$ ist, wird ϑ_1 kleiner als ϑ_0.

Wählen wir den Widerstand R proportional dem Quadrate der Geschwindigkeiten, nämlich $R = \frac{g}{k^2}v^2$ und berücksichtigen, dass für kleine Schwingungen im leeren Raume $\vartheta = \vartheta_0\cos\lambda t$ und $v = -a\frac{d\vartheta}{dt} = a\vartheta_0\lambda\sin\lambda t$ ist (§. 7, Nr. 3, a. E.), so dass also, wenn wir diese Geschwindigkeit als Näherungswerth für v im widerstehenden Mittel annehmen

$$R = \frac{g^2 a\vartheta_0^2}{k^2}\sin^2\lambda t$$

wird, so erhalten wir hiermit für die Zeit $t = \frac{\pi}{\lambda}$

$$v = A_{\frac{\pi}{\lambda}} = \left(\frac{g\vartheta_0}{k}\right)^2 a\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}}\sin^2\lambda t\cos\lambda t\,dt = 0,$$

woraus sich ergibt, dass also mit dem Grade der Näherung, mit welchem man $\sin\vartheta$ mit ϑ vertauscht, welchem $\vartheta = \vartheta_0\cos\lambda t$ entsprach, die Geschwindigkeit zu derselben Zeit Null wird, wie im leeren Raume, d. h. dass die halbe Oscillationsdauer auch hier $\frac{\pi}{\lambda}$, also constant ist. Weiter folgt für diese der Ausschlagswinkel

$$\vartheta_1 = -\vartheta_0 + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{g\vartheta_0}{k}\right)^2\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}}\sin^3\lambda t\,dt$$

$$= -\vartheta_0 + \left(\frac{g\vartheta_0}{k\lambda}\right)^2\int_0^{\pi}\sin^3\psi\,d\psi = -\vartheta_0 + \tfrac{4}{3}ag\left(\frac{\vartheta_0}{k}\right)^2 = -\vartheta_0\left(1 - \tfrac{4}{3}\frac{ag}{k^2}\vartheta_0\right).$$

In derselben Weise erhält man weiter

$$\vartheta_2 = -\vartheta_1\left(1 - \tfrac{4}{3}\frac{ag}{k^2}\vartheta_1\right),\quad \vartheta_3 = -\vartheta_2\left(1 - \tfrac{4}{3}\frac{ag}{k^2}\vartheta_2\right),\ \ldots$$

Die Werthe des Ausschlages nach rechts und links von der Verticalen ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ... können also durch eine gewisse Progression gefunden werden, die aber keine geometrische ist.

§. 14. Beispiele zur Bearbeitung.

1. Es ist gegeben in einer Vertikalebene ein Punkt M_0 und eine horizontale Gerade G; man soll durch M_0 diejenige Gerade hindurchlegen, auf welcher ein schwerer Punkt von M_0 aus fallen muss, um die Gerade G in der kürzesten Zeit zu erreichen.

2. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass an die Stelle der Geraden G ein in der Vertikalebene liegender Kreis K tritt.

3. Auf der convexen Seite einer vertikalen ebenen Curve liegt im höchsten Punkte ein schwerer Punkt. Man ertheilt demselben eine Geschwindigkeit α in der Richtung der Tangente; an welcher Stelle und mit welcher Geschwindigkeit verlässt er die Curve?

4. Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass die Curve ein Kreis ist. Wie ist die Parabel beschaffen, welche der Punkt beim Verlassen des Kreises beschreibt?

5. Auf welcher in einer Vertikalebene liegenden Curve muss ein schwerer Punkt fallen, damit er in gleichen Zeiten um gleiche Höhen sinke, also die vertikale Fallhöhe der Zeit proportional und die Tangente der Anfangslage vertikal ist?

6. Ein Punkt fällt auf einer Curve, welche continuirlich in einen vertikalen Kreis übergeht und bewegt sich auf der Innenseite desselben weiter. Die Höhe, welche er bis zum Uebergang auf den Kreis zu durchfallen hat, ist H, die Uebergangstangente horizontal und liegt der Kreis so, dass der Punkt auf ihm zuerst aufsteigen muss. Wie gross darf der Radius des Kreises höchstens sein, damit der Punkt die Bahn nicht verlässt?

7. Ein Punkt bewegt sich auf einer logarithmischen Spirale und wird nach dem Pole derselben zu umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von diesem beschleunigt; seine Anfangslage hat den Abstand a vom Pol, μ ist die Grösse der Beschleunigung in der Einheit der Entfernung, wie gross ist die Zeit, nach welcher er den Pol erreicht? Die Gleichung der Curve sei $\varrho = ae^{m\vartheta}$.

Aufgaben über die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn mit Reibung behandelt die Arbeit von Dieu: Mouvement d'un point matériel sur une ligne fixe eu égard du frottement. (Liouville, Journ. de Mathém. 2me Série, T. XVIII, p. 1.)

XII. Capitel.

Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche.

§. 1. Durch die Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und das Gesetz, welches die Beschleunigung befolgt, ist die Bewegung eines Punktes bestimmt; wird daher noch die weitere Bedingung hinzugefügt, dass die Bewegung des Punktes auf einer gegebenen Fläche erfolgen soll, welche die

Richtung der Anfangsgeschwindigkeit berührt, so muss ein Zwang hinzutreten, welcher den Punkt nöthigt, auf derselben zu bleiben. Dieser Zwang kann, wie er auch immer beschaffen sein möge, weil er auf die Geschwindigkeit einen verändernden Einfluss ausübt, durch eine Beschleunigung ersetzt werden, die mit der gegebenen Beschleunigung zusammen eine Resultante liefert, welche in Verbindung mit der anfänglichen Geschwindigkeit die Bahn des Punktes und die Bewegung desselben in ihr der zugefügten Bedingung entsprechend bestimmt. Der Zwang wird je nach den Umständen, die ihn ausüben, Widerstand der Fläche oder Spannung und die ihm äquivalente Beschleunigung die Beschleunigung des Widerstandes oder der Spannung genannt. Dieselbe kann an jeder Stelle der Bahn in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in die Richtung der Normalen der Fläche, die andere in die Tangentenebene der Fläche fällt. Die letztere Componente, welche von der Reibung herrührt, setzen wir hier gleich Null voraus, sodass also blos eine Normalbeschleunigung des Widerstandes angenommen wird.

Den Zwang, welcher den Punkt auf die Fläche nöthigt, kann man sich auf verschiedene Arten ausgeübt denken. In vielen Fällen reicht es aus, die Fläche aus einem festen Material gearbeitet, aber als eine unendlich dünne Schale anzunehmen, auf deren Innen- oder Aussenseite der bewegliche Punkt sich befindet; in anderen Fällen wird man es vorziehen, den Punkt als zwischen zwei unendlich nahen solchen Schalen beweglich zu denken. Zuweilen gelingt es, den Punkt durch gespannte Fäden auf die Fläche zu zwingen; so z. B. kann man denselben nöthigen, auf einem Rotationsellipsoid zu bleiben, indem man ihn durch zwei Fäden von der Längensumme gleich der Rotationsaxe mit den Brennpunkten verknüpft.

Die allgemeinste Art, einen Punkt zu nöthigen, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, welche zugleich das Analogon zu der Monge'schen Fadenconstruction Cap. XI, §. 1. darbietet, beruht auf folgenden Betrachtungen. Durch jeden Punkt einer Fläche gehen zwei Krümmungslinien; sie bezeichnen die beiden Richtungen, nach welchen hin von jenem Punkte aus die Fläche am schwächsten und stärksten gekrümmt ist und schneiden einander rechtwinklig. Die sämmtlichen Krümmungslinien einer Fläche bilden auf dieser zwei Curvenschaaren, sodass jede Curve der einen Schaar alle Curven der anderen Schaar rechtwinklig durchschneidet und beide Schaaren die ganze Fläche in rechteckige Flächenelemente zerlegen. Die Krümmungslinien einer Fläche besitzen die Eigenschaft, dass die Normalen, welche in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Punkten einer solchen Curve auf der Fläche errichtet werden, sich schneiden. Legt man daher in allen Punkten längs einer Krümmungslinie die Normalen an die Fläche, so bilden diese eine abwickelbare Fläche und berühren eine auf dieser Fläche liegende Curve. Diese Curve ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte der Fläche, welche die Krümmungslinie berühren und enthält Mittelpunkte der stärksten oder der schwächsten Krümmung, je nachdem die Krümmungslinie eine Linie der stärksten oder der schwächsten Krümmung ist. Führt man diese Construction mit sämmtlichen Krümmungslinien aus, so erhält man zwei Schaaren abwickelbarer Flächen, welche sich paarweise rechtwinklig in den Normalen der Fläche durchschneiden und eine neue Fläche, auf welcher die sämmtlichen Orte der Krümmungsmittelpunkte der in den Richtungen der stärksten und schwächsten Krümmung geführten Normalschnitte (Hauptnormalschnitte) liegen und welche also selbst den Ort der Krümmungsmittelpunkte aller dieser Hauptnormalschnitte darstellt. Diese Fläche hat zwei Theile, die sich in einzelnen Fällen von einander trennen, von denen der eine die Mittelpunkte stärkster, der andere die Mittelpunkte schwächster Krümmung enthält. Da durch jede Normale ein Normalschnitt der stärksten und ein Normalschnitt der schwächsten Krümmung hindurchgeht, so berührt jede Normale eine Curve der Krümmungsmittelpunkte der einen und eine Curve der Krümmungsmittelpunkte der anderen Art und da diese beiden Curven auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte liegen, aber verschiedenen Theilen angehören, so folgt, dass jede Normale diese Fläche doppelt berührt, nämlich in einem Krümmungsmittelpunkte der stärksten und einem Krümmungsmittelpunkte der schwächsten Krümmung. Die sämmtlichen Normalen einer Fläche berühren also eine gewisse Centralfläche doppelt oder in dem Falle, dass diese in zwei getrennte Theile zerfällt, beide Theile zugleich. Man erkennt daraus weiter, dass man nur nöthig hat, eine Gerade so längs der Gesammtfläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte hingleiten zu lassen, dass sie dieselbe doppelt berührt, nämlich in einem Punkte des einen und in einem Punkte des anderen Theiles, wenn einer ihrer Punkte gezwungen sein soll, sich auf der gegebenen Fläche selbst zu bewegen, welcher jene Fläche der Hauptkrümmungsmittelpunkte angehört.

§. 2. Die Theorie der Bewegung eines Punktes auf gegebener Fläche nimmt einige Lehren der Geometrie über die kürzesten Linien (auch geodätische Linien genannt) in Anspruch, welche wir zunächst entwickeln wollen. Die kürzesten Linien auf Flächen sind durch die Eigenschaft charakterisirt, dass in jedem ihrer Punkte der Krümmungshalbmesser, also auch die Hauptnormale mit der Normalen der Fläche zusammenfällt oder also die Schmiegungsebene der kürzesten Linie durch die Normale der Fläche geht. Um diese Eigenschaft elementar zu beweisen, nehmen wir zunächst den einfachsten Fall an, auf welchen sich der Fall bei einer allgemeinen Fläche zurückführen lässt, nämlich dass die Fläche aus zwei Ebenen E, E' bestehe, welche sich in einer Geraden d schneiden. Soll von einem Punkte A in E nach einem Punkte B in E' über die Fläche hin eine kürzeste Linie gezogen werden, so wird diese die Kante d in einem gewissen Punkte C schneiden und ist zunächst klar, dass die Stücke AC und CB dieser kürzesten Linie geradlinig sein müssen. Nun muss aber C so gewählt werden, dass $AC + CB$ ein Minimum werde. Um die hierzu erforderliche Lage des Punktes C zu erkennen, drehen wir die Ebene E' um die Kante d um, bis sie in die Ebene E fällt, aber so, dass A und B auf entgegengesetzte Seiten von d zu liegen kommen. Durch diese Drehung wird die Länge der kürzesten Linie nicht geändert und muss folglich $AC + CB$ auch nach derselben in der Gesammtebene die kürzeste Linie sein, welche von A nach B

gezogen werden kann. In der Ebene aber ist die Gerade die kürzeste Linie. Daher muss der Punkt C. so gewählt werden, dass $AC + CB$ beim Zusammenfallen der Ebene E, E' in eine Gerade übergeht. Hierdurch ist die Lage von C auf der Kante d vollkommen bestimmt. Dieser Punkt muss so liegen, dass die Winkel, welche AC und CB mit d, in demselben Sinne genommen, bilden, sich zu π ergänzen. — Nehmen wir jetzt an, die beiden Ebenen E, E' bilden einen unendlich kleinen Winkel mit einander, so wird der Punkt B bei der Drehung der Ebene E' um die Kante d einen unendlich kleinen Kreisbogen BB' um d als Rotationsaxe beschreiben, dessen Ebene mithin senkrecht steht auf d und dessen Mittelpunkt der Fusspunkt des Perpendikels ist, welches von B auf d gefällt werden kann. Dieser unendlich kleine Kreisbogen fällt mit der Richtung seiner Tangente zusammen und steht senkrecht auf der Ebene E' in ihrer ursprünglichen Lage sowie nach der unendlich kleinen Drehung und folglich senkrecht auf E. Daher steht auch die Ebene BCB', welche den kleinen Kreisbogen enthält, oder die mit ihr identische Ebene ACB senkrecht auf E und geht durch die Normale von E, welche in A errichtet werden kann. — Die beiden Ebenen E, E' seien nun zwei aufeinanderfolgende Tangentenebenen einer Fläche; dann sind AC und CB zwei aufeinanderfolgende Elemente einer Curve auf der Fläche, die Ebene ACB ist ihre Schmiegungsebene in A und enthält die Normale der Fläche in A als ihre Hauptnormale oder die Richtung des Krümmungshalbmessers der Curve in A. Wenn nun aber eine Linie zwischen irgend zweien ihrer Punkte eine kürzeste sein soll, so muss sie diese Eigenschaft auch in ihren Bogenelementen besitzen, d. h. zwischen zwei unendlich nahen Punkten, welche auf zwei aufeinander folgenden Tangentenebenen liegen. Demnach besteht der Satz: Jede kürzeste Linie auf einer Fläche besitzt die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene in jedem ihrer Punkte durch die Normale der Fläche dieses Punktes hindurchgeht, also auf der Tangentenebene der Fläche senkrecht steht und ihr Krümmungshalbmesser in die Richtung der Normalen fällt.

§. 3. Da die Schmiegungsebene der kürzesten Linie die Normale der Fläche enthält, so folgt, dass der Normalschnitt der Fläche mit ihr zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente, folglich auch die Krümmung gemein hat. Ziehen wir auf der Fläche irgend eine beliebige Curve und nehmen auf ihr drei aufeinanderfolgende Punkte M, M', M'' (Fig. 166) so, dass $MM' = M'M''$ ist, verlängern das Bogenelement MM' um $M'N = MM'$ und ziehen NM'', so wird die Linie NM'', welche als unendlich kleiner Kreisbogen anzusehen ist, erhalten, indem man $M'N$ oder MM' mit dem Contingenzwinkel $NM'M''$ multiplicirt. Daher ist dieser Contingenzwinkel selbst $NM'' : MM'$. Nun

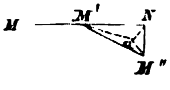

Fig. 166.

ist aber der Krümmungshalbmesser der Curve $MM'M''$ in M gleich dem Bogenelemente MM' dividirt durch diesen Contingenzwinkel. Derselbe wird daher $\overline{MM'}^2 : NM''$.

In M' legen wir die Tangentenebene an die Fläche; sie wird die Tangentenebene des Punktes M in einer Geraden d schneiden. Auf die Tangentenebene in M' fällen wir von N das Perpendikel NQ; dadurch erhalten wir $M'Q$ als das zweite Element einer kürzesten Linie, welche mit der Curve $MM'M''$ die Tangente in M, mit dem durch diese Tangente geführten, die Curve $MM'M''$ also gleichfalls berührenden Normalschnitte der Fläche aber beide Elemente, also auch die Krümmung gemein hat. Denn wenn die Tangentenebene des Punkte M' durch Drehung um d in die Lage der Tangentenebene des Punktes M gelangt, so beschreibt Q einen unendlich kleinen Kreisbogen, welcher von seiner Tangente QN erst um unendlich Kleines zweiter Ordnung abweicht. Daher ist der Krümmungshalbmesser des Normalschnitts $MM'Q$, welcher die Curve in M berührt, $\overline{MM'}^2 : NQ$.

Der unendlich kleine Winkel $M''M'Q$, welcher gebildet wird von dem zweiten Bogenelemente $M'M''$ der gegebenen Curve und dem zweiten Bogenelemente $M'Q$ der kürzesten Linie, welche dieselbe in M berührt, heisst der geodätische Contingenzwinkel der gegebenen Curve im Punkte M. Legt man durch M' gleichfalls eine kürzeste Linie, welche mit der Curve $MM'M''\ldots$ das zweite Bogenelement $M'M''$ gemein hat, sie also in M' berührt, so kann man den geodätischen Contingenzwinkel einer Curve in einem Punkte M auch definiren als den verschwindend kleinen Winkel der beiden, die Curve in M und dem nächstfolgenden Punkte M' berührenden kürzesten Linien. Das Bogenelement MM', dividirt durch ihn, nämlich $\overline{MM'}^2 : QM''$ heisst der Halbmesser der geodätischen Krümmung, sowie der reciproke Werth hiervon die geodätische Krümmung.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der Curve $MM'M''$ mit ϱ, den des sie in M berührenden Normalschnitts oder der sie berührenden kürzesten Linie $MM'Q$ mit R und den der geodätischen Krümmung mit $\overset{*}{\varrho}$, so hat man

$$\varrho : R : \overset{*}{\varrho} = \frac{1}{NM''} : \frac{1}{NQ} : \frac{1}{QM''}, \quad \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{R} : \frac{1}{\overset{*}{\varrho}} = NM'' : NQ : QM''.$$

In dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck $M''QN$ stellt Winkel $NM''Q = \vartheta$ den Neigungswinkel der Schmiegungsebene der Curve $MM'M''$ gegen die Tangentenebene dar und hat man weiter

$$NM'' : NQ : QM'' = 1 : \sin\vartheta : \cos\vartheta$$

und mit Hülfe dieser Proportion also

$$\frac{1}{\varrho} : \frac{1}{R} : \frac{1}{\overset{*}{\varrho}} = 1 : \sin\vartheta : \cos\vartheta, \quad \varrho = R\sin\vartheta, \quad \overset{*}{\varrho} = \frac{\varrho}{\cos\vartheta} = R\operatorname{tg}\vartheta.$$

Die Gleichung $\varrho = R\sin\vartheta$ enthält den Meunier'schen Satz. Wenn nämlich ϑ der Winkel ist, den die Schmiegungsebene $MM'M''$ mit der Tangentenebene in M (M' fällt mit M zusammen) bildet, so ist $\sin\vartheta$ der Cosinus der Neigung λ derselben Ebene gegen den Normalschnitt und sagt die Gleichung $\varrho = R\cos\lambda$ aus, dass der Krümmungsmittelpunkt der Curve $MM'M''$ erhalten wird, wenn man den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes, welcher die Curve berührt, auf die Schmiegungsebene derselben projicirt. Daher liegen die Krümmungskreise aller Curven, welche mit dem Normalschnitte die Tangente gemein haben, auf einer Kugel, welche den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes zum Mittelpunkte hat. In der letzteren Fassung kann man den Meunier'schen Satz unmittelbar an der Hand der Figur einsehen. Durch die vier Punkte M, M', M'', Q lässt sich nämlich eine Kugel legen, welche die beiden Kreise, die durch die Punkte M, M', M'' einerseits und M, M', Q andererseits möglich sind, enthält. In der Grenze sind dies die Krümmungskreise der Curve $MM'M''\ldots$ und des Normalschnittes $MM'Q\ldots$ Da die Kugel mit der Fläche das Element $M'M''Q$ gemein hat, welches in der Tangentenebene des Punktes M verschwindet, so berührt sie die Fläche in M und da die Ebene des Normalschnittes senkrecht zur Tangentenebene ist, so ist sein Krümmungskreis ein grösster Kreis der Kugel u. s. w.

Nach den obigen Formeln wird der Halbmesser der geodätischen Krümmung erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser der Curve durch den Cosinus seiner Neigung gegen die Tangentenebene der Fläche dividirt. Hieraus erhellt weiter, dass der Halbmesser der geodätischen Krümmung und der Krümmungshalbmesser des Normalschnittes die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dessen Höhe der Krümmungshalbmesser der Curve ist (Fig. 167). Construirt man daher den Krümmungshalbmesser R des Normalschnittes in M, fällt von seinem Mittelpunkte C ein Perpendikel auf die Schmiegungsebene einer Curve $MM'M''$, welche den Normalschnitt in M berührt und führt dasselbe bis zum Durchschnitt E mit der Tangentenebene in M, so ist ME der Halbmesser $\overset{*}{\varrho}$ der geodätischen Krümmung.

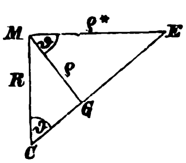

Fig. 167.

Im Gegensatze zur geodätischen Krümmung, welche die Abweichung einer Curve von dem berührenden Normalschnitte ins Auge fasst, nennt man die Krümmung im gewöhnlichen Sinne, welche die Abweichung von der Tangente angibt, die absolute Krümmung.

Der Contingenzwinkel $QM'M''$ der geodätischen Krümmung fällt in die Tangentenebene der Fläche; legt man nun in allen Punkten der Curve $MM'M''\ldots$ an die Fläche die Tangentenebene, so bilden alle diese Tangentenebenen eine abwickelbare Fläche, auf welcher die Curve liegt. Jede Tangente, wie MN ist auf die folgende Tangentenebene zu projiciren, um den Schenkel $M'Q$ des Contingenzwinkels der geodätischen Krümmung zu erhalten. Wickelt man die Fläche der Tangentenebenen ab, indem man jede Ebene um die Schnittlinie d, welche sie mit der folgenden Ebene gemein hat, so lange umdreht, bis sie in diese hineinfällt, so geht die Curve in eine gewisse ebene Deformationscurve über, deren Contingenzwinkel die Contingenzwinkel der geodätischen Krümmung sind. Da hierbei die Curvenelemente selbst nicht geändert werden, so folgt der Satz: Der Halbmesser der geodätischen Krümmung einer Curve ist gleich dem Krümmungshalbmesser der Deformationscurve, in welche die gegebene Curve übergeht, wenn man die abwickelbare Fläche, welche von den Tangentenebenen der Fläche, auf welcher die gegebene Curve liegt, längs dieser gebildet wird, in eine Ebene ausbreitet.

§. 4. Der bewegliche Punkt befinde sich zur Zeit t im Punkte M (Fig. 168) und besitze die Geschwindigkeit v; die gegebene Beschleunigung sei ψ und die des Normalwiderstandes N. Wir zerlegen ψ in zwei Componenten, eine tangentielle ψ_t und eine normale ψ_n; letztere fällt mit N in die Normalebene der Bahn und bildet mit N eine Resultante $[\varphi_n] = [N] + [\psi_n]$. Die beiden Beschleunigungen ψ_t und φ_n, welche zusammen dem System der beiden Beschleunigungen ψ und N äquivalent sind, sind die Tangential- und Centripetalbeschleunigung der Bewegung und es bestehen daher die beiden Gleichungen

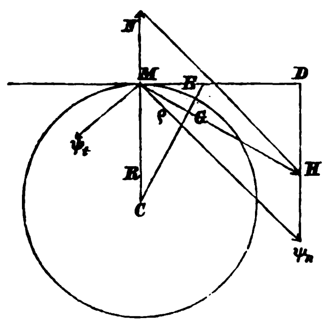

Fig. 168.

$$\frac{dv}{dt} = \psi_t, \quad \left[\frac{v^2}{\varrho}\right] = [N] + [\psi_n].$$

In diesen Gleichungen ist N zwar seiner Richtung, aber noch nicht seiner Grösse und seinem Sinne nach bestimmt, ϱ aber ist noch gänzlich unbekannt. Zur Bestimmung beider Grössen führt Folgendes. Durch die Normale der Fläche und die Tangente der Bahn legen wir den die Bahn berührenden Normalschnitt und construiren über seinem Krümmungskreise als grösstem Kreise eine Kugel. Diese Kugel enthält den Krümmungskreis der Bahn in M und ein Perpendikel von dem Mittelpunkte C der Kugel auf die Ebene dieses Krümmungskreises liefert den Krümmungsmittelpunkt G

derselben, welcher auf der Richtung der Centripetalbeschleunigung $\varphi_n = MH$ sich befindet. Denkt man nun das Perpendikel CG über G hinaus nach E bis an die Tangente der Fläche verlängert, welche in die Normalebene der Bahn fällt und projicirt φ_n oder was dasselbe ist, ψ_n auf diese Tangente als MD, so besteht vermöge der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke MGE und MDH die Gleichung $MG \,.\, MH = ME \,.\, MD$, d. h. $\varrho \,.\, \varphi_n = ME \,.\, MD$ oder da $\varrho\varphi_n = v^2$ ist, $ME \,.\, MD = v^2$. Da nun ψ_n als gegeben anzusehen ist, so kann man seine Projection MD auf die Tangentenebene der Fläche in M finden und gewinnt dadurch ME. Sobald E bekannt ist, bestimmt die Verbindungslinie CE desselben mit dem Mittelpunkte der Kugel die Lage von φ_n und ist in dem Parallelogramme MH alles, insbesondere auch die Widerstandsbeschleunigung N vollkommen bestimmt. Dem vorigen Paragraphen gemäss ist ME nichts anderes, als der Radius der geodätischen Krümmung der Bahn $\overset{*}{\varrho} = \varrho : \cos\vartheta$, wenn ϑ den Winkel bedeutet, den die Schmiegungsebene der Bahn mit der Tangentenebene der Fläche bildet. Die Componente MD von ψ_n, welche in die Tangentenebene fällt, ist $\varphi_n \cos\vartheta = (v^2 \cos\vartheta) : \varrho$, also $v^2 : \overset{*}{\varrho}$, d. h. wenn man die gegebene Beschleunigung ψ in drei Componenten zerlegt, die eine längs der Tangente der Bahn, die andere längs der Normalen der Fläche und die dritte längs der Schnittlinie der Tangentenebene der Fläche mit der Normalebene der Bahn, so wird die letztere Componente erhalten, indem man das Quadrat der Geschwindigkeit durch den Radius der geodätischen Krümmung dividirt.

Was den Widerstand N betrifft, so ist, wegen $[\varphi_n] = [N] + [\psi_n]$ die Summe der Projectionen der beiden letzten Grössen auf eine beliebige Axe gleich der Projection von φ_n. Wählt man nun zu dieser Axe die Flächennormale MC, so erhält man $\frac{v^2}{\varrho} \sin\vartheta = N + \psi_n \sin\lambda$, wenn ψ_n mit MD den Winkel λ bildet. Nach dem Meunier'schen Satze ist aber $\varrho = R \sin\vartheta$, daher wird

$$N = \frac{v^2}{R} - \psi_n \sin\lambda\,.$$

Ebenso gross würde offenbar auch N sein, wenn der bewegliche Punkt sich auf dem Normalschnitte bewegen würde.

Auch hier versteht man unter Centrifugalbeschleunigung die der Centripetalbeschleunigung φ_n entgegengesetzt gleiche Beschleunigung und ebenso unter Druckbeschleunigung die der Widerstandsbeschleunigung entgegengesetzt gleiche Beschleunigung. Letztere ist demnach die Resultante von $[\psi_n]$ und $-[\varphi_n]$.

§. 5. Ist $\psi = 0$, d. h. bewegt sich der Punkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter Einfluss der Widerstandsbeschleunigung N auf der Fläche, so folgt aus der ersten Gleichung des §. 4, dass die Geschwindigkeit constant, die Bewegung also eine gleichförmige ist. Aus der zweiten Gleichung oder auch aus der Figur des Parallelogramms MH folgt weiter, dass die Centripetalbeschleunigung φ_n mit N nach Grösse und Richtung zusammenfällt. Demnach hat der Krümmungshalbmesser die Richtung der Flächennormale und ist die Bahn eine geodätische Linie. Die Widerstandsbeschleunigung, welche den Punkt auf die Fläche zwingt, ist $v^2 : R$ und folglich umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser des berührenden Normalschnittes.

Ist ψ stets normal zu der Fläche, so wird $\psi_t = 0$ und die Bewegung ebenfalls gleichförmig. Die Centripetalbeschleunigung φ_n fällt auch hier in die Flächennormale, es ist $\varphi_n = N + \psi$ und die Bahn gleichfalls eine geodätische Linie. Für die Widerstandsbeschleunigung folgt also
$$N = \frac{v^2}{R} - \psi.$$

§. 6. Die Gleichungen für die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Fläche in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z, wenn N_x, N_y, N_z die Componenten der normalen Widerstandsbeschleunigung bedeuten, nebst allen Nebenrelationen sind
$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z,$$
$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2, \quad F(x, y, z) = 0, \quad N_x : N_y : N_z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$
von denen die zweitletzte ausdrückt, dass der Punkt auf der Fläche $F = 0$ liegt und die Proportion sagt, dass der Widerstand die Richtung der Normalen besitzt.

Bezüglich der Anwendung der Principe der Bewegung rücksichtlich der Integration dieser Gleichungen ist zu bemerken, dass die Beschleunigung des Widerstandes in dem Princip der lebendigen Kraft nicht auftritt; denn die Elementararbeit derselben ist Null, weil ihre Richtung senkrecht zum Elemente der Bahn ist.

§. 7. **Die Bewegung eines schweren Punktes auf der Kugelfläche.** Ein schwerer Punkt sei gezwungen, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen. Der Zwang kann dadurch ausgeübt werden, dass der Punkt durch einen nicht dehnbaren Faden mit dem Kugelmittelpunkte verknüpft wird. Der Faden beschreibt eine Kegelfläche, daher heisst der einfache Apparat ein conisches Pendel; der Punkt verlässt die Kugelfläche nicht, daher heisst er auch ein sphärisches Pendel.

Den Mittelpunkt der Kugel wählen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y, z (Fig. 169), dessen x- und y-Axe horizontal, dessen positive z-Axe vertikal abwärts gerichtet ist. Es sind alsdann die Componenten der Beschleunigung der Schwere: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$ und da für r als Kugelradius $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}$ die Richtungscosinusse der normalen Widerstandsbeschleunigung N sind, so sind die Gleichungen der Bewegung des Pendels nebst der Gleichung der Kugelfläche:

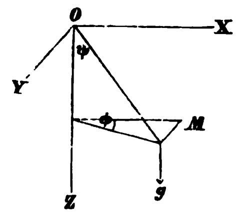

Fig. 169.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - N\frac{z}{r},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Zunächst gibt uns das Princip der lebendigen Kraft ein Integral dieser Gleichungen. Es ist nämlich für die Kräftefunction $dU = gdz$, also $U = gz + h$ und daher

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gz + h,$$

sodann aber gilt auch das Princip der Flächen in Bezug auf die horizontrle xy-Ebene. Es fällt nämlich sowohl die Richtung der Beschleunigung g, als auch die Widerstandsbeschleunigung N in die Vertikalebene, welche durch den beweglichen Punkt M und die z-Axe geht, es schneidet folglich die Resultante von g und N stets die z-Axe und geht daher ihre Projection auf die xy-Ebene fortwährend durch den Coordinatenursprung. Das Integral, welches das Flächenprincip liefert, ist:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = D.$$

Wir wollen beide Integrale durch Polarcoordinaten ausdrücken. Diese seien ausser dem constanten Radiusvector r zwei Polarwinkel, von denen der eine, φ, die Neigung der durch den Radiusvector und die z-Axe gehenden Ebene gegen die xz-Ebene angibt, während der andere, ψ, der Winkel sei, welchen der Radiusvector mit der z-Axe bildet. Bei constantem φ würde nun der Punkt M einen unendlich kleinen Kreisbogen $rd\psi$ beschreiben, wenn ψ sich um $d\psi$ ändert; bei constantem ψ dagegen einen zu der Ebene von ψ rechtwinkligen anderen unendlich kleinen Kreisbogen $r\sin\psi d\varphi$ vom Radius $r\sin\psi$, wenn φ sich um $d\varphi$ ändert. Daher ist das Bogenelement der sphärischen Bahn des Punktes M die Quadratwurzel aus dem Ausdrucke

$$r^2 d\psi^2 + r^2 \sin^2\psi\, d\varphi^2$$

und wird das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe beschrieben wird

$$r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\psi\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Die beiden Integrale nehmen hiedurch mit Rücksicht auf $z = r\cos\psi$ die Form an:

$$r^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2gr\cos\psi + 2h, \quad r^2\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt} = D,$$

wofür, wenn v_0 und z_0 die Geschwindigkeit und die Tiefe des Punktes unter dem Niveau des Kugelmittelpunktes zur Zeit $t = 0$ bedeuten, $\frac{1}{2}v_0^2 = gz_0 + h$ ist und D die doppelte constante Sectorengeschwindigkeit für die Projectionsbewegung in der xy-Ebene bedeutet. Sind ψ_0 und $\varphi_0 = 0$ die Werthe von ψ und φ, so wie

ψ'_0, φ'_0 die Werthe ihrer Differentialquotienten zu derselben Zeit $t = 0$, so kann man h und D durch diese Elemente ausdrücken, nämlich:

$$2h = r^2\psi_0'^2 + r^2 \sin^2\psi_0 \cdot \varphi_0'^2 - 2gr \cos\psi_0\,, \quad D = r^2 \sin^2\psi_0 \cdot \varphi'_0\,.$$

Indem man aus den beiden Integralen einmal $d\varphi$, das anderemal dt eliminirt, gelangt man zu den beiden Gleichungeu

$$dt = \frac{r^2 \sin\psi d\psi}{\sqrt{2r^2 \sin^2\psi\,(gr\cos\psi + h) - D^2}}\,,$$

$$d\varphi = \frac{D \sin\psi d\psi}{\sin^2\psi \sqrt{2r^2 \sin^2\psi\,(gr\cos\psi + h) - D^2}}\,,$$

von denen die erste nach der Integration den Polarwinkel ψ als Functiou der Zeit liefert, während die letzte die Gleichung der Bahn des Pendelpunktes in den sphärischen Coordinaten φ, ψ gibt. Die beiden hier vorliegenden Quadraturen kommen auf elliptische Integrale zurück, da die Wurzel im Nenner die Integrationsvariabele $\cos\psi$ in der dritten Potenz enthält und mithin werden φ und ψ durch elliptische Functionen der Zeit dargestellt. Um die Integrale für t und φ auf die canonische Form zu bringen, ist eine sorgfältige Untersuchung der Wurzelgrösse des Nenners nothwendig, welche uns überdies schon für sich allein einige wichtige Aufschlüsse über die Pendelbewegung zu geben geeignet ist.

Abkürzend restituiren wir $z = r\cos\psi$ und erhalten für den Radicanden des Nenners

$$R = 2(r^2 - z^2)\,(gz + h) - D^2\,.$$

Dieser Ausdruck nimmt nun für

$$z = -\infty\,, \quad -r\,, \qquad z_0 \quad , \quad +r\,, \quad +\infty;$$

die Werthe an

$$R = +\infty\,, \quad -D^2, \quad r^4 \sin^2\psi_0\,\psi_0'^2, \quad -D^2, \quad -\infty;$$

mithin hat die Gleichung $R = 0$ drei reelle Wurzeln, welche zwischen $-\infty$ und und $-r$, zwischen $-r$ und z_0, und z_0 und $+r$ liegen. Indem man

$$\frac{dR}{dz} = 2gr^2 - 4hz - 6gz^2, \quad \frac{d^2R}{dz^2} = -4h - 12gz$$

bildet, ergibt sich, dass R für $z = \sqrt{\frac{1}{9}\frac{h^2}{g^2} + \frac{1}{3}r^2} - \frac{1}{3}\frac{h}{g}$ ein Maximum und für $z = -\sqrt{\frac{1}{9}\frac{h^2}{g^2} + \frac{1}{3}r^2} - \frac{1}{3}\frac{h}{g}$ ein Minimum erreicht. Die Curve, deren Ordinaten R darstellen, hat die Gestalt (Fig. 170). Aus dem positiven Unendlichen kommend tritt R zwischen $-\infty$ und $-r$ ins Negative über, sodann zwischen $-r$ und $+r$ aus dem Negativen wieder ins Positive und von da wieder ins Negative, um fortwährend negativ zu bleiben. Bei $z = -r$ und $z = +r$ hat R denselben Werth $-D^2$. Das Maximum tritt für einen positiven Werth von z ein und ist selbst positiv, das Minimum ist negativ bei negativem z. Von den drei Wurzeln ist daher die grösste α stets positiv, die zweite β kann positiv oder negativ sein, je nachdem der Werth, welchen R für $z = 0$ annimmt, nämlich $2r^2h - D^2$ negativ oder positiv ist, die dritte Wurzel $-\gamma$ ist stets negativ.

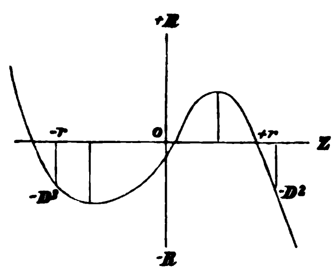

Fig. 170.

Man kann daher setzen:

$$R = 2g(\alpha - z)(z - \beta)(\gamma + z)$$

Bei positivem β kann z nur positive Werthe zwischen α und β annehmen, denn vermöge der Gleichung $-r\frac{dz}{dt} = \sqrt{R}$ darf R nicht negativ werden, wenn überhaupt Bewegung stattfinden soll. Sein grösster Werth ist α, sein kleinster β und zwei Niveauebenen, welche die untere Halbkugel in den Tiefen α und β unter dem Mittelpunkte schneiden, bezeichnen auf ihr die Grenzkreise, zwischen welchen der Pendelpunkt sich bewegt. Im Falle eines negativen β kann z von $-\beta$ bis α gehen. Der eine, der negativen Wurzel $-\beta$ entsprechende Grenzkreis liegt auf der oberen Halbkugel. Der erste Fall tritt ein, wenn $2r^2h - D^2$ negativ, der andere, wenn diese Grösse positiv ist. Das Pendel muss, auch wenn es anfangs auf der oberen Halbkugel lag, immer auf die untere Halbkugel heruntersinken, da die tiefsten Punkte immer auf dieser Halbkugel liegen. Es kann aber auf die obere Halbkugel nur emporsteigen, wenn $2r^2h - D^2$ positiv ist.

Um die Bedeutung des Kriteriums $2r^2h - D^2 \lesseqgtr 0$ zu erkennen, bemerken wir, dass die Geschwindigkeit v und ihre beiden Componenten $r\frac{d\psi}{dt}$ und $r \sin\psi \frac{d\varphi}{dt}$, ein rechtwinkliges Dreieck in der Tangentenebene der Kugel im Punkte M bilden, welches das Azimuth i der Geschwindigkeit, d. h. die Neigung derselben gegen den Meridian enthält und dass

$$r\frac{d\psi}{dt} = v\cos i, \quad r\sin\psi\frac{d\varphi}{dt} = v\sin i, \quad \sin\psi\frac{d\varphi}{d\psi} = \operatorname{tg} i$$

ist.

Daher ist $D = r^2\sin^2\psi\frac{d\varphi}{dt} = rv\sin\psi\sin i$ und wenn v_0, ψ_0, i_0 der Zeit $t = 0$ entsprechen, $D = rv_0\sin\psi_0\sin i_0$. Ferner war $\frac{1}{2}v_0^2 = gr\cos\psi_0 + h$. Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von D und h in das Kriterium ein, so nimmt es die Gestalt an

$$\frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr \frac{r\cos\psi_0}{1 - \sin^2\psi_0\sin^2 i_0}, \quad \text{oder} \quad \frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr \frac{r^2 z_0}{r^2\cos^2 i_0 + z_0^2\sin^2 i_0},$$

aus welcher seine Bedeutung erhellt. Der bewegliche Punkt erhebt sich auf die obere Halbkugel, sobald die Geschwindigkeitshöhe von v_0 grösser als

$$\frac{r^2 z_0}{r^2\cos^2 i_0 + z_0^2\sin^2 i_0}$$

ist. Ist v_0 die Geschwindigkeit in einem tiefsten Punkte, so wird hiefür $i = \frac{1}{2}\pi$, mithin das Kriterium $\frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr \frac{r}{\cos\psi_0}$ d. h. $\frac{v_0^2}{2g} \lesseqgtr \frac{r^2}{z_0}$, was leicht zu deuten ist, da $\frac{r^2}{z_0}$ die Länge einer Tangente an die Kugel vom Punkte M_0 bis zu ihrem Schnitt mit dem vertikalen Durchmesser derselben ist.

Werden die Wurzeln α, β im ersten Falle gleich, so geht die Zone, zwischen denen sich das Pendel bewegt, in einen horizontalen Kreis über, welchen dasselbe fortwährend mit constanter Geschwindigkeit durchläuft. Die Geschwindigkeit v kann man in diesem Falle leicht angeben. Denn da die Kreisbewegung gleichförmig erfolgt, so ist die Tangentialbeschleunigung Null und indem man die Beschleunigung g der Schwere (Fig. 171) nach dem Radius der Kugel und dem

Radius der Kreisbahn zerlegt, sieht man, dass von den beiden Componenten die letztere die Centripetalbeschleunigung $v^2 : r \sin\psi$ sein muss, so dass die Gleichung besteht

$$g \operatorname{tg} \psi = \frac{v^2}{r \sin \psi},$$

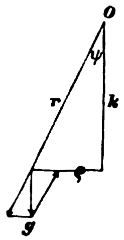

Fig. 171.

woraus

$$v^2 = gr \operatorname{tg} \psi \sin \psi$$

folgt. Die Umlaufszeit des Pendels wird $T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}$.

Von den obigen beiden Differentialausdrücken für dt und $d\varphi$ wollen wir zunächst den ersteren weiter verfolgen; nämlich

$$dt = \frac{-r\,dz}{\sqrt{2g(\alpha - z)(z - \beta)(\gamma + z)}}$$

wo $z = r \cos\psi$ restituirt ist. Da der Coefficient der ersten Potenz von z in der cubischen Gleichung $R = 0$ die Summe der Wurzelcombinationen zu zweien ist, so hat man $\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma = -r^2$, also $\gamma = \frac{\alpha\beta + r^2}{\alpha + \beta}$. Ebenso gibt die weitere Coefficientenvergleichung $\alpha + \beta - \gamma = -\frac{h}{g}$ und $-2g\alpha\beta\gamma = 2r^2h - D^2$, so dass auch h und D durch die Wurzeln α, β, $-\gamma$ ausgedrückt werden können. Um das Integral

$$t = \int_z^{z_0} \frac{r\,dz}{\sqrt{2g(\alpha - z)(z - \beta)(\gamma + z)}}$$

auf die kanonische Form zu reduciren, wird man, da z zwischen β und α liegt, nach Elimination von γ die Substitution

$$\sin^2\sigma = \frac{\alpha - z}{\alpha - \beta}$$

einführen, wodurch man nach leichter Reduction erhält

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\varkappa r}{\sqrt{\alpha - \beta}} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\sigma}}, \quad \varkappa^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{r^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}, \quad \sin^2\sigma_0 = \frac{\alpha - z_0}{\alpha - \beta}.$$

An die Stelle von z kann der Elevationswinkel ψ treten vermöge der Gleichung $z = r\cos\psi$, wozu $z_0 = r\cos\psi_0$ gehört. Um ψ bequemer als Function der Zeit darzustellen, wollen wir diese von dem Momente zählen, in welchem der Pendelpunkt eine tiefste Lage passirt. Dann ist $t = 0$ für $z = \alpha$ und $r\cos\psi_0 = \alpha$. Hiezu folgt $\sigma = 0$ und mithin

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\varkappa r}{\sqrt{\alpha - \beta}} \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\varkappa r}{\sqrt{\alpha - \beta}} F(\sigma, \varkappa).$$

Bezeichnet T die Zeit, während welcher der Punkt von der tiefsten Stelle zur nächsten höchsten gelangt, so wird z von α und β und in Folge dessen σ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gehen, so dass

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\varkappa r}{\sqrt{\alpha - \beta}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\varkappa r}{\sqrt{\alpha - \beta}} K$$

wird. Die Division beider Formeln für t und T ergibt daher

$$t = \frac{T}{K} \cdot F(\sigma, \varkappa).$$

Für $\sigma = \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \ldots$ wird $F(\sigma, \varkappa) = K, 2K, 3K, 4K, \ldots$ und folglich $t = T, 2T, 3T, 4T, \ldots$ Diesen Werthen entspricht aber $\psi = \beta, \alpha, \beta, \ldots$ d. h. der bewegliche Punkt befindet sich zu den Zeiten $0, 2T, 4T, \ldots$ in tiefsten, zu den Zeiten $T, 3T, \ldots$ in höchsten Lagen und gebraucht immer dieselbe Zeit, um von einer extremen Lage zur nächstfolgenden zu gelangen.

Aus der Gleichung $t = \frac{T}{K} F(\sigma, \varkappa)$ folgt $F(\sigma, \varkappa) = \frac{K}{T} t$ und weiter durch Umkehrung

$$\sigma = \text{am} \frac{Kt}{T}, \quad \text{mod } \varkappa.$$

Indem wir diesen Ausdruck für σ in die Gleichung

$$\sin^2\sigma = \frac{\alpha - z}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - r\cos\psi}{\alpha - \beta}$$

einführen, gelangen wir zu der gewünschten Gleichung, welche ψ als Function der Zeit darstellt, nämlich

$$r\cos\psi = \alpha \cos^2 \text{am} \frac{Kt}{T} + \beta \sin^2 \text{am} \frac{Kt}{T}.$$

Nun sind $\cos^2(\sigma \pm \lambda\pi)$ und $\sin^2(\sigma \pm \lambda\pi)$ resp. gleich $\cos^2\sigma$ und $\sin^2\sigma$, wenn λ eine ganze Zahl ist; der Winkel ψ ist daher für alle Lagen des beweglichen Punktes derselbe, deren Amplituden σ sich um ein positives oder negatives Vielfache von π von einander unterscheiden. Aendert sich aber $\sigma = \text{am}\frac{Kt}{T}$ um $\lambda\pi$, so ändert sich $F(\sigma, \varkappa)$ um $2\lambda K$, also t um $2\lambda T$. Daher ist ψ zu allen Zeiten $t \pm 2\lambda T$ derselbe Winkel, wie zur Zeit t.

Das Vierfache von T ist die Zeit, welche der Punkt braucht, um von einer tiefsten Lage zur folgenden höchsten, von da zur nächsten tiefsten, hierauf wieder zur folgenden höchsten und dann endlich wieder zu der nächsten tiefsten zu gelangen. Diese Zeit stellt die ganze Oscillationsdauer dar. Indessen ist die tiefste Lage, welche der Punkt am Schlusse dieser Zeit erreicht, nicht dieselbe, wie zu Anfang, vielmehr verschiebt sich die Stellung der höchsten und tiefsten Lagen im Laufe der Bewegung, wie die Discussion des Winkels φ lehrt.

Man kann die Formel für $\cos\psi$ noch etwas gefügiger gestalten. Dividirt man nämlich die Gleichung $\sin^2\sigma = (\alpha - z):(\alpha - \beta)$ mit α rechts im Zähler und Nenner und setzt:

$$\frac{z}{\alpha} = \cos\psi_1, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \cos\beta_1,$$

so wird $\cos\psi_1 = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\beta_1 \sin^2\sigma$, d. h. $\sin\frac{1}{2}\psi_1 = \sin\frac{1}{2}\beta_1 \sin\sigma$ oder also

$$\sin\tfrac{1}{2}\psi_1 = \sin\tfrac{1}{2}\beta_1 \sin \text{am} \frac{Kt}{T}.$$

Zugleich kann auch der Modulus $\varkappa$ bequemer gestaltet werden. Für ihn ist nämlich

$$\varkappa^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{r^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2} = \frac{1 - \cos^2\beta_1}{\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 2\cos\beta_1 + 1} = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}\beta_1 \cos^2\frac{1}{2}\beta_1}{4\cos^2\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{r^2 - \alpha^2}{\alpha^2}}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta_1}{1 + \frac{r^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}\beta_1}}$$

und wenn man

$$\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{2\alpha\cos\frac{1}{2}\beta_1} = \operatorname{tg}\alpha_1$$

setzt,

$$\varkappa = \sin\tfrac{1}{2}\beta_1 \cos\alpha_1 .$$

Der Differentialausdruck für $d\varphi$, welcher nach Restitution von z die Form annimmt

$$d\varphi = \frac{-Drdz}{(r^2-z^2)R},$$

geht durch Einführung der Wurzeln α, β zunächst über in

$$d\varphi = \frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}\sqrt{r^2-\beta^2}}{\sqrt{(\alpha+\beta)}} \cdot \frac{-rdz}{(r^2-z^2)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)(\gamma+z)}}$$

und zerfällt durch Zerlegung des Factors r^2-z^2 im Nenner in zwei Theile, so dass

$$d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}\sqrt{r^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha+\beta}}\left[\frac{-rdz}{(r+z)\sqrt{(\alpha-z)(z-\beta)(\gamma+z)}} + \frac{-rdz}{(r-z)\sqrt{(\alpha+z)(z-\beta)(\gamma+z)}}\right]$$

wird. Die Substitution

$$\sin^2\omega = \frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{z-\alpha}{z+\dfrac{r^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}},$$

wo $\varkappa^2$ die frühere Bedeutung hat, liefert, wenn ω_0 dem Anfangswerthe z_0 entspricht,

$$\varphi = \frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}\sqrt{r^2-\beta^2}}{r^2+2\alpha\beta+\alpha^2}\left[\frac{r}{r+\alpha}\int_{\omega}^{\omega_0}\frac{(1-\varkappa^2\sin^2\omega)\,d\omega}{(1+m_1\sin^2\omega)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}} + \frac{r}{r-\alpha}\int_{\omega}^{\omega_0}\frac{(1-\varkappa^2\sin^2\omega)\,d\omega}{(1+m_2\sin^2\omega)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}\right],$$

wo der Modulus $\varkappa$, die Parameter m_1, m_2 und ω_0 durch die Formeln gegeben sind:

$$\varkappa^2 = \frac{r^2-\beta^2}{r^2+2\alpha\beta+\alpha^2},\quad m_1 = \varkappa^2\frac{(r-\alpha)(r-\beta)}{(r+\beta)(\alpha+\beta)},\quad m_2 = -\varkappa^2\frac{(r+\alpha)(r+\beta)}{(r-\beta)(\alpha+\beta)},$$

$$\sin^2\omega_0 = \frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{z_0-\alpha}{z+\dfrac{r^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Da $z = r\cos\psi$ und $\cos\psi$ als Function der Zeit gefunden ist, so ergibt sich also durch diese elliptischen Integrale dritter Gattung φ als Function von ψ und damit sowohl die Gleichung der Bahn des Pendelpunktes in sphärischen Coordinaten φ, ψ, als auch mittelbar φ als Function der Zeit t. Die vollständige Ausführung der Reduction von φ auf die canonische Form zeigt, dass φ einen periodischen Bestandtheil hat und einen anderen, welcher der Zeit proportional wächst. Von besonderem Interesse ist die Kenntniss des Winkels Φ, um welchen die Vertikalebene des Pendelpunktes sich dreht, während dieser von einer höchsten zur nächsten tiefsten Lage fortschreitet. Es kann gezeigt werden, dass dieser Winkel grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist und dass sich folgende Werthe von t, ψ, φ entsprechen:

$$\begin{array}{llllll} t = 0, & T, & 2T, & 3T, & 4T, & \dots \\ \psi = \beta, & \alpha, & \beta, & \alpha, & \beta, & \dots \\ \varphi = 0, & \Phi, & 2\Phi, & 3\Phi, & 4\Phi, & \dots \end{array}$$

Ferner ergibt sich, dass die Bahn des Punktes aus congruenten Theilen besteht, welche in die Zeitintervalle zwischen 0 und $2T$, $2T$ und $4T$, $4T$ und $6T, \dots$ und die Winkel 2Φ, 4Φ, $6\Phi, \dots$ fallen, sodass wenn $\frac{\Phi}{\pi}$ rational ist, der Punkt, nachdem er eine Anzahl solcher Theile durchlaufen hat, an seine frühere Stelle wieder gelangt, im Falle, dass dies Verhältniss irrational ist, er aber die Anfangslage nicht wieder erreicht. Die höchsten Punkte rücken auf einem horizontalen Kugelkreise fort.

Ueber die vollständige Durchführung des sphärischen Pendelproblems vgl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen, 2. Aufl., Leipzig, Teubner, 1868, S. 311; Natani (-Hoffmann), mathem. Wörterbuch, Artikel „Raumpendel" in B. VI, S. 206 u. 216 u. ffg., woselbst die Weierstrass'sche Behandlung des Problems mitgetheilt ist; Schellbach, die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen, Berlin 1864, S. 369.

Wir wollen jetzt die Beschleunigung N des Widerstandes (der Spannung des Fadens) suchen. Dies geschieht sehr einfach, indem man die Beschleunigungen N und g einerseits und $\frac{dv}{dt}$, $\frac{v^2}{\varrho}$ andererseits, welche letzteren jenen zusammen äquivalent sind, auf die Richtung der Flächennormalen (des Pendelfadens) projicirt; die Projectionssummen müssen beidemale dieselben sein. Die beiden ersteren liefern $N - g \cos \psi$, die Tangentialbeschleunigung hat die Projection Null und die Centripetalbeschleunigung, welche die Richtung des Krümmungshalbmessers ϱ der Bahn besitzt, bildet mit dem Pendelfaden einen Winkel, dessen Cosinus $\frac{\varrho}{r}$ ist, wodurch ihre Projection $\frac{v^2}{r}$ wird. Man sieht dies unmittelbar, wenn man bedenkt, dass der Krümmungskreis einer sphärischen Curve auf der Kugel liegt und also der Krümmungshalbmesser derselben die Projection des Kugelradius auf die Schmiegungsebene ist. Demnach besteht die Gleichung

$$N - g \cos \psi = \frac{v^2}{r},$$

aus welcher man zieht:

$$N = \frac{v^2}{r} + g \cos \psi .$$

Combinirt man hiermit die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{2} v_0^2 = g(z - z_0)$$

und ersetzt $\cos \psi$ durch das gleichbedeutende $\frac{z}{r}$, so erhält man

$$N = \frac{v_0^2 + g(3z - 2z_0)}{r},$$

oder, wenn man noch für $\frac{v_0^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe h einführt:

$$N = \frac{g}{r}(3z - 2z_0 + 2h).$$

Zu demselben Resultate gelangt man, indem man die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + N\frac{x}{r} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + N\frac{y}{r} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + N\frac{z}{r} - g = 0$$

der Reihe nach mit x, y, z multiplicirt und addirt, dabei aber berücksichtigt, dass aus der Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ durch ein- und zweimaliges Differentiiren folgt:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -v^2.$$

Man erhält damit: $N = \frac{v^2 + gz}{r}$ u. s. w. Für positive z, d. h. so lange der bewegliche Punkt sich auf der unteren Halbkugel befindet, ist N positiv, d. h. von dem Punkte nach dem Kugelmittelpunkte gerichtet. Erhebt sich der Punkt aber auf die obere Halbkugel, so wird gz negativ und kann auch $v^2 + gz$ und damit N negativ werden; d. h. damit der Punkt auf der Kugelfläche erhalten werde, ist eine nach aussen gerichtete Widerstandsbeschleunigung erforderlich. Für $z = 0$ ist $N = \frac{v^2}{r}$.

Für den Fall, dass das sphärische Pendel sich nur wenig von dem vertikalen Kugelradius entfernt, lässt sich die Untersuchung mit grosser Annäherung leicht durchführen. In diesem Falle nimmt nämlich z nur Werthe an, welche von r sehr wenig verschieden sind und ist, damit dies überhaupt möglich sei, v_0 und folglich h sehr klein. Setzt man daher $z = r - u$, $z_0 = r - u_0$, so erhält man für die Beschleunigung des Widerstandes

$$N = \frac{g}{r}\left\{r + 2u_0 + 2h - 3u\right\} = g\left\{1 + \frac{2u_0 + 2h - 3u}{r}\right\}.$$

d. h. sehr nahe

$$N = g.$$

Hiermit werden aber die Bewegungsgleichungen, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{g}{r}z - g = \frac{g}{r}(z - r) = -\frac{g}{r}u, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{d^2u}{dt^2}$$

ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{r}x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{r}y = 0, \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{r}u = 0.$$

Die vollständigen Integrale dieser linearen Gleichungen und deren Derivirte sind:

$$\begin{aligned}
x &= A\cos\lambda t + B\sin\lambda t, & \frac{dx}{dt} &= -\lambda A\sin\lambda t + \lambda B\cos\lambda t, \\
y &= A'\cos\lambda t + B'\sin\lambda t, & \frac{dy}{dt} &= -\lambda A'\sin\lambda t + \lambda B'\cos\lambda t, \quad \lambda = \sqrt{\frac{g}{r}}. \\
u &= A''\cos\lambda t + B''\sin\lambda t, & \frac{du}{dt} &= -\lambda A''\sin\lambda t + \lambda B''\cos\lambda t,
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der 6 Constanten mögen die Anfangsbedingungen sein:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \alpha, & y &= 0, & z &= \gamma, \\
\frac{dx}{dt} &= 0, & \frac{dy}{dt} &= \beta, & \frac{dz}{dt} &= -\frac{du}{dt} = 0,
\end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0,$$

d. h. es möge die xz-Ebene durch einen tiefsten Punkt gehen. Dadurch wird

$$\alpha = A, \quad 0 = A', \quad r - \gamma = A'',$$
$$0 = B, \quad \beta = \lambda B', \quad 0 = B''$$

und hiermit weiter

$$x = \alpha \cos \lambda t, \quad y = \lambda \beta \sin \lambda t, \quad r - z = (r - \gamma) \cos \lambda t.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergibt sich, dass die Projection der Bahn des beweglichen Punktes auf die xy-Ebene ist:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda\beta}\right)^2 = 1,$$

also eine Ellipse mit den Halbaxen α und $\lambda\beta$. Die volle Umlaufszeit T ergibt sich aus dem Ausdrucke für x, indem man $\lambda T = 2\pi$ setzt, nämlich:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}};$$

sie ist also ebenso gross, als die Oscillationsdauer eines einfachen Pendels von derselben Länge r, wie das sphärische, bei kleiner Elongation. — Für die Winkel φ und ψ erhält man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda\beta}{\alpha} \operatorname{tg} \lambda t, \quad \sin \psi = \frac{\alpha^2}{r^2} \cos^2 \lambda t + \frac{\beta^2}{gr} \sin^2 \lambda t.$$

§. 8. Das Studium der Bewegung eines Punktes auf gegebener Fläche wird wesentlich unterstützt durch die Lehre von der geodätischen Krümmung der Curven auf der Fläche. Zerlegen wir zur Zeit t die gegebene Beschleunigung ψ des beweglichen Punktes M (§. 1) in eine Componente $\psi \cos \gamma$ nach der Normalen der Fläche, mit welcher ψ den Winkel γ bilde und in eine zweite $\psi \sin \gamma$, welche in die Tangentenebene der Fläche fällt, so kann die letztere abermals in zwei andere gespalten werden, deren eine $\psi \sin \gamma \cos \alpha$ die Richtung der Tangente der Bahn hat, mit welcher $\psi \sin \gamma$ den Winkel α bildet, während die andere $\psi \sin \gamma \sin \alpha$ der Normalebene der Bahn angehört. Bezeichnen wir, wie früher, die Tangentialbeschleunigung mit ψ_t, den Radius der geodätischen Krümmung mit $\overset{*}{\varrho}$ und den Krümmungshalbmesser der die Bahn berührenden geodätischen Linie mit R, so ist nach §. 3

$$\psi_t = \psi \cos \alpha \sin \gamma, \quad \frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \alpha \sin \gamma, \quad N = \frac{v^2}{R} - \psi \cos \gamma.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man eine wichtige Formel für die Geschwindigkeit v. Dividirt man nämlich die Gleichung des Princips der lebendigen Kraft, nämlich $d \cdot \frac{1}{2} v^2 = \psi \cos \alpha \sin \gamma \cdot ds$ durch die zweite der vorstehenden, nämlich $v^2 = \overset{*}{\varrho} \psi \sin \alpha \sin \gamma$, so ergibt sich

$$\frac{dv}{v} = \frac{ds}{\overset{*}{\varrho} \operatorname{tg} \alpha},$$

oder, weil der geodätische Contingenzwinkel $d\varkappa = ds : \overset{*}{\varrho}$ ist

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\varkappa}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad v = Ce^{\int \frac{d\varkappa}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

Diese Formel enthält die Beschleunigung ψ nur implicite, insofern ψ die Bahn bestimmt und $d\varkappa$ von dieser abhängt.

Die Elimination von γ aus den beiden Gleichungen

$$\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \alpha \sin \gamma \quad \text{und} \quad N = \frac{v^2}{R} - \psi \cos \gamma$$

liefert noch die Relation

$$\left(\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho} \sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} - N\right)^2 = \psi^2.$$

§. 9. Für die Bewegung eines Punktes auf der Ebene fällt der Radius der geodätischen Krümmung mit dem Radius ϱ der absoluten Krümmung zusammen (denn er ist der Krümmungsradius der Deformationscurve des §. 3) und ist der Radius R für den Normalschnitt unendlich gross; man erhält daher für diese Bewegung

$$\psi_t = \psi \cos \alpha \sin \gamma, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \psi \sin \alpha \sin \gamma, \quad N = -\psi \cos \gamma,$$

$$v = C \cdot e^{\int \frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha}}, \quad \left(\frac{v^2}{\varrho \sin \alpha}\right)^2 + N^2 = \psi^2,$$

wo der absolute Contingenzwinkel $d\varepsilon$ an die Stelle des geodätischen Contingenzwinkels $d\varkappa$ getreten ist.

Ist insbesondere die Componente $\psi \sin \gamma$ der Beschleunigung, welche in die Ebene fällt, der Richtung nach constant, so stellt der Contingenzwinkel $d\varepsilon$ die unendlich kleine Abnahme des Winkels α dar, welchen die Richtung von $\psi \sin \gamma$ mit der Tangente der Bahn bildet. Es lenkt nämlich diese Beschleunigung die Tangente der Bahn nach der Seite hin ab, auf welche sie selbst fällt. Man hat also zu setzen $d\varepsilon = -d\alpha$ und findet damit

$$\int \frac{d\varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha} = \int -\frac{\cos \alpha \, d\alpha}{\sin \alpha} = -l \sin \alpha;$$

folglich

$$v = \frac{C}{\sin \alpha},$$

d. h. für jede ebene Bewegung eines Punktes bei einer Beschleunigung von constanter Richtung ist die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn dem Sinus der Neigung der Bahn gegen die Beschleunigungsrichtung umgekehrt proportional, also die Componente der Geschwindigkeit normal zur Beschleunigungsrichtung constant.

§. 10. Für die Bewegung auf einer beliebigen Cylinderfläche wollen wir die Voraussetzung eintreten lassen, dass die Componente $\psi \sin \gamma$ der Beschleunigung, welche in die Tangentenebene der Fläche fällt, in jedem Punkte der Bahn die Richtung der Erzeugungslinie habe, während ihre Grösse keiner weiteren Beschränkung unterworfen sei. Der geodätische Contingenzwinkel $d\varkappa$ ist nun der Contingenzwinkel der ebenen Deformationscurve, in welche die Bahn des beweglichen Punktes bei der Abwickelung der Cylinderfläche mit einer Ebene übergeht (Fig. 172). Derselbe ist aber das Differential des Winkels α, welchen die Erzeugungslinie mit der Tangente der abgewickelten Bahn bildet, welcher bei der Abwickelung keine Veränderung erleidet. Diesen Winkel nehmen wir so, dass der Sinn der Tangente der der Bewegung und der Sinn der Erzeugungslinie der der Beschleunigung ist; dann wird das Differential eine Abnahme von α darstellen, weil die

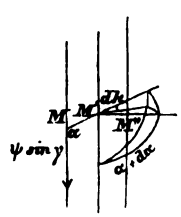

Fig. 172.

Beschleunigung die Tangente ihrem Sinne entsprechend ablenkt. Daher ist wie in §. 8 $d\varkappa = -\,d\alpha$ und findet man wie dort

$$v = \frac{C}{\sin\alpha}, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \psi \sin\alpha \sin\gamma.$$

Dies sind aber genau die Gleichungen der Bewegung eines Punktes in der Ebene, wenn $\psi \sin\gamma$ eine Beschleunigung von constanter Richtung in derselben und α der Winkel ist, den die Tangente der Bahn mit dieser Richtung bildet. Man gewinnt hieraus den Satz:

Wenn ein Punkt sich auf einer beliebigen Cylinderfläche zu bewegen genöthigt ist und ausser der normalen Widerstandsbeschleunigung der Fläche ihn eine Beschleunigung treibt, deren Projection auf die Tangentenebene des Cylinders fortwährend die Richtung der Erzeugungslinie hat und wenn in einem beliebigen Zeitpunkte die Cylinderfläche sammt der Bahn des Punktes in eine Ebene ausgebreitet wird, zugleich aber jene Beschleunigungscomponente die Richtung der Erzeugungslinie beibehält, so wird der Punkt die Deformationscurve seiner Bahn mit derselben Geschwindigkeit beschreiben, welche er auf der cylindrischen Bahn besitzt.

Der Widerstand der Fläche ist, wenn man für v den obigen Werth einsetzt

$$N = \frac{C^2}{R \sin^2\alpha} - \psi \cos\gamma.$$

Der Krümmungshalbmesser R einer unter dem Winkel α gegen die Erzeugungslinien des Cylinders geneigten (die Bahn berührenden) Schraubenlinie (geodätischen Linie des Cylinders), oder also der Krümmungshalbmesser des berührenden Normalschnitts ist aber

$$R = \frac{\varrho}{\sin^2\alpha},$$

wenn ϱ den Krümmungshalbmesser des zu den Erzeugungslinien senkrechten Schnittes bedeutet*). Hiemit wird

$$N = \frac{C^2}{\varrho} - \psi \cos\gamma.$$

Diese Betrachtungen lehren, dass man die Theorie der Bewegung eines Punktes in der Ebene unter Einfluss einer Beschleunigung von constanter Richtung unmittelbar auf die Cylinderflächen übertragen kann. Ein schwerer Punkt beschreibt daher auf einem Cylinder mit vertikalen Erzeugungslinien eine Curve, welche durch die Abwickelung des Cylinders in eine Parabel übergeht. Ist der Cylinder zugleich ein Kreiscylinder, so ist ϱ constant und wird mithin der Druck auf die Fläche gleichfalls durchaus constant sein.

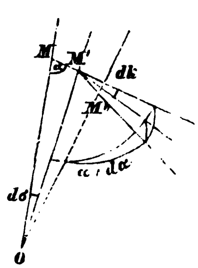

Fig. 173.

§. 11. Für die Bewegung eines Punktes auf einer Kegelfläche habe $\psi \sin\gamma$ gleichfalls die Richtung der Erzeugungslinie. Aus Fig. 173 ist ersichtlich, dass zwischen dem Contingenzwinkel $d\varkappa$ der Deformationscurve, dem Differentiale von α und dem Winkel $d\sigma$ an der Spitze O des Kegels, zwischen dessen Schenkeln das Bogenelement $MM' = ds$ liegt, die Beziehung besteht:

$$d\varkappa = -\,d\alpha + d\sigma.$$

*) S. meine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung", S. 82.

Es zerfällt nämlich der Aussenwinkel $\alpha + d\sigma$ an der Erzeugungslinie, welche durch den Endpunkt M' von ds geht, in zwei Theile, $d\varkappa$ und den geänderten Werth $\alpha + d\alpha$ von α. Zugleich ist, wenn $OM = r$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{r\, d\sigma}{dr},$$

wobei das Zeichen (—) erforderlich ist, weil α bei wachsendem r stumpf, bei abnehmendem r spitz ist. Die Combination beider Formeln liefert

$$\frac{d\varkappa}{\operatorname{tg} \alpha} = - \frac{d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{dr}{r}, \quad \int^{s} \frac{d\varkappa}{\operatorname{tg} \alpha} = - l\,(r \sin \alpha)$$

und hiemit

$$v = \frac{C}{r \sin \alpha} = \frac{C}{p},$$

wenn p das von O auf die Tangente der Bahn gefällte Perpendikel ist. Hiezu tritt wieder die Formel

$$\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \gamma \sin \alpha .$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ergab sich früher für die ebene Centralbewegung (Cap. X, §. 11, S. 373). Wir erhalten daher wie im vorigen §. den Satz:

Wenn ein Punkt sich auf einer Kegelfläche zu bewegen genöthigt ist und ihn eine Beschleunigung afficirt, deren Projection auf die Tangentenebene der Fläche in die Richtung der Erzeugungslinie fällt, so wird derselbe, wenn zu irgend einer Zeit die Kegelfläche sich zu einer Ebene ausbreitet und jene Beschleunigung die Richtung der Erzeugungslinie behält, die ebene Deformationscurve seiner Bahn mit derselben Geschwindigkeit beschreiben, mit welcher er seine conische Bahn durchläuft.

Für den Widerstand N der Fläche ergibt sich, wenn man den Werth der Geschwindigkeit einführt

$$N = \frac{C^2}{R \sin^2 \alpha \,.\, r^2} - \psi \cos \gamma .$$

Die geometrische Bedeutung von $R \sin^2 \alpha$ ist leicht zu erkennen. Zu dem Ende sei $d\Sigma$ der Neigungswinkel zweier aufeinanderfolgender Tangentenebenen des Kegels, welche längs den Erzeugungslinien OM, OM' berühren. Sie bilden mit der Ebene des Normalschnittes der Fläche, welcher durch MM' geht, eine unendlich schmale rechtwinklige körperliche Ecke. Aus dieser ergibt sich für den Contingenzwinkel $d\varepsilon$ des Normalschnittes

$$d\varepsilon = d\Sigma \,.\, \sin \alpha .$$

Bedeutet nun ds_1 das Bogenelement des zur Erzeugungslinie OM senkrechten, durch M geführten Normalschnittes, so wird

$$ds \,.\, \sin \alpha = ds_1$$

und folglich

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{ds_1}{d\Sigma}.$$

Nun ist aber offenbar $\dfrac{ds_1}{d\Sigma} = \varrho$ der Krümmungshalbmesser dieses zu OM senkrechten Normalschnittes. Daher ist $R \sin^2 \alpha = \varrho$ und geht die Formel für N über in

$$N = \frac{C^2}{r^2 \varrho} - \psi \cos \gamma .$$

Diese Betrachtungen lehren, dass man die Theorie der ebenen Centralbewegung auf die Kegelflächen übertragen kann, wenn man die Spitze des Kegels zum Centrum nimmt.

Mit Rücksicht auf die Formel (§. 8.)

$$\psi^2 = \left(\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho} \sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} - N\right)^2$$

lässt sich z. B. leicht die Frage beantworten, wie $\psi \sin \gamma$ beschaffen sein müsse, damit die Bahn des beweglichen Punktes eine kürzeste Linie des Kegels (Kegelloxodrome) werde. Da nämlich die kürzeste Linie bei der Abwickelung des Kegels in eine Gerade übergehen muss, so ist $\overset{*}{\varrho} = \infty$ und da

$$\frac{v^2}{R} = \frac{C^2}{r^2 \varrho}, \quad N = \frac{C^2}{r^2 \varrho} - \psi \cos \gamma$$

ist, so folgt

$$\psi \sin \gamma = 0$$

d. h. ψ muss normal zur Kegelfläche sein.

§. 12. Die Methode des §. 8. lässt sich mit derselben Leichtigkeit auf die Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche anwenden, sobald nur die in die Tangentenebene der Fläche fallende Beschleunigungscomponente die Richtung der Erzeugungslinie besitzt. Man bedarf zur Behandlung hierher gehöriger Aufgaben blos der Kenntniss der Elemente der geodätischen Krümmung der Curven auf abwickelbaren Flächen. Die beiden Formeln

$$v = C e^{\int \frac{d\varkappa}{\operatorname{tg} \alpha}}, \quad \frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin \gamma \sin \alpha ,$$

welche für eine ebene Bewegung gelten, wenn für sie $d\varkappa$ und $\overset{*}{\varrho}$ den absoluten Contingenzwinkel und Krümmungshalbmesser der Bahn bedeuten, führen auch hier zu dem Satze, dass, wenn die Fläche sich zu einer Ebene ausbreitet, der bewegliche Punkt die Deformationscurve seiner Bahn mit ungeänderter Geschwindigkeit beschreibt, vorausgesetzt, dass die Componente $\psi \sin \gamma$ die Richtung der Erzeugungslinie beibehält.

§. 13. Für die Bewegung eines Punktes auf der Kugelfläche wollen wir annehmen, dass die Componente der Beschleunigung, welche in die Tangentenebene der Kugel fällt, immer in der Ebene enthalten sei, welche durch den beweglichen Punkt M und einen festen Kugeldurchmesser hindurchgeht (Meridianebene des Punktes). Der Winkel φ, welchen die Meridianebene von M mit der Meridianebene der Anfangslage bildet und der Bogen $OM = \varrho$ von dem einen Endpunkte O des festen Durchmessers an gerechnet, seien die sphärischen Polarcoordinaten des Punktes M. Es kommt nun zunächst darauf an, den Contingenzwinkel und den Radius der geodätischen Krümmung einer sphärischen Curve zu bestimmen. Da die kürzesten Linien der Kugel grösste Kreise sind, so ist der geodätische Contingenzwinkel der Winkel zweier grösster Kreise, welche die Curve in zwei aufeinanderfolgenden Punkten berühren. Vom Pole O (Fig. 174) fällen wir nun auf diese beiden Kreise die sphärischen Perpendikel

$$OP = p, \; OP' = p + dp$$

und bezeichnen die Winkel OMP, $OM'P'$, welche die sphärischen Radienvectoren, ϱ und $\varrho + d\varrho$ mit den Kreisen bilden, mit α und $\alpha + d\alpha$, sodass auch hier α der Winkel ist, den die Beschleunigung $\psi \sin\gamma$ mit der Tangente der Bahn bildet. Wird α immer auf der Seite der Tangente gerechnet, auf welche die Beschleunigung $\psi \sin\gamma$ fällt, die wir dem Pole zugewandt annehmen, so entspricht wieder ein spitzer Winkel α einer Abnahme von ϱ und hat man daher

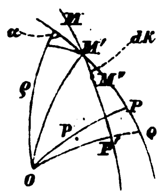

Fig. 174.

$$ds \,.\, \cos\alpha = -\, d\varrho \,.$$

Ist ferner Q der Schnittpunkt von OP' mit MP, so wird $QP' = -\,dp$, d. h.

$$d\varkappa \,.\, \sin(MP) = -\, dp \,.$$

Andererseits ist aber

$$\sin(MP) = \operatorname{tg} p \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\varrho \,.\, \sin\alpha}{\cos p} \cdot \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\varrho \,.\, \cos\alpha}{\cos p} \,.$$

Durch Combination dieser Gleichungen erhält man den geodätischen Contingenzwinkel und den Radius der geodätischen Krümmung

$$d\varkappa = -\,\frac{d\,.\sin p}{\sin\varrho\,\cos\alpha}\,,\quad \overset{*}{\varrho} = \frac{ds}{d\varkappa} = \frac{\sin\varrho \,.\, d\varrho}{\cos p \,.\, dp} = \frac{\sin\varrho \,.\, d\varrho}{d \cdot \sin p} \,.$$

Hiermit wird weiter

$$\frac{d\varkappa}{\operatorname{tg}\alpha} = -\,\frac{d \,.\, \sin p}{\sin\varrho \,.\, \sin\alpha} = -\,\frac{d \,.\, \sin p}{\sin p} = -\, d \,.\, l \sin p$$

und folglich nach §. 7 die Geschwindigkeit

$$v = \frac{C}{\sin p} = \frac{C}{\sin\varrho\,\sin\alpha}\,,$$

d. h. die Geschwindigkeit ist dem Sinus des sphärischen Abstandes des Poles von dem ihre Richtung im beweglichen Punkte berührenden grössten Kreise umgekehrt proportional.

Die Formel für die Geschwindigkeit v ist das Analogon zu der Formel $v = \frac{C}{p}$, welche bei der ebenen Centralbewegung (Cap. X, §. 11) vorkommt. Dort ging die Richtung der Beschleunigung durch einen festen Punkt der Ebene, hier geht ihre Projection auf die Kugelfläche durch den Pol.

Weiter erhält man durch die Formel

$$\frac{v^2}{\overset{*}{\varrho}} = \psi \sin\alpha \sin\gamma \,,$$

wenn man in dieselbe für v und $\overset{*}{\varrho}$ ihre Werthe einsetzt,

$$\frac{\sin\varrho \,.\, d\varrho}{d \,.\, \sin p} = \frac{C^2}{\psi \sin\gamma \sin^2 p \sin\alpha}\,,$$

welche in Bezug auf p und ϱ als Coordinaten die Differentialgleichung der Bahn darstellt, sobald $\psi \sin\gamma$ durch Elemente der Bahn gegeben ist.

Für N findet man, wenn der Radius R des Normalschnittes, welcher der Kugelradius ist, gleich 1 gesetzt wird,

$$N = v^2 - \psi\cos\gamma = \frac{C^2}{\sin^2 p} - \psi\cos\gamma \,.$$

Man kann die Analogie mit der ebenen Centralbewegung noch weiter verfolgen. Da $ds^2 = d\varrho^2 + \sin^2\varrho \,.\, d\varphi^2$ ist, so wird

$$v^2 = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \sin^2\varrho \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Weil ferner in dem vorliegenden Falle das Princip der Flächen für die Projection der Bewegung vom Pole aus auf irgend eine Ebene, z. B. auf die Tangentenebene des Poles gilt, so hat man auch

$$\sin^2\varrho \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C';$$

durch Combination beider Gleichungen erhält man, ähnlich wie Cap. X, §. 11.

$$v^2 = C'^2 \left[\frac{1}{\sin^2\varrho} + \left(\frac{\frac{d\varrho}{\sin^2\varrho}}{d\varphi}\right)^2\right], \quad \text{oder} \quad v^2 = C'^2 \left[\frac{1}{\sin^2\varrho} + \left(\frac{d \cdot \frac{-1}{\operatorname{tg}\varrho}}{d\varphi}\right)^2\right].$$

Ferner ist vermöge des Principes der lebendigen Kraft

$$d \,.\, \tfrac{1}{2} v^2 = \psi \sin\gamma \,.\, \cos\alpha \,.\, ds = -\psi \sin\gamma \,.\, d\varrho.$$

Die Differentiation der vorigen Formel liefert daher mit Rücksicht auf diese Gleichung ähnlich, wie Cap. X, §. 11, S. 374.

$$\psi \sin\gamma = \frac{C'^2}{\sin^2\varrho}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varrho}\right)}{d\varphi^2}\right].$$

§. 14. Die Formeln des vorigen Paragraphen liefern, wenn $\psi \sin\gamma$ die Beschleunigung der Schwere und der feste Kugeldurchmesser, in welchem sich alle Meridianebenen schneiden, vertikal ist, nicht nur die in §. 7 entwickelten Formeln, sondern auch verschiedene Sätze über das sphärische Pendel. Es ist für diesen Fall, wenn für O der tiefste Punkt der Kugel gewählt wird, $\gamma = \varrho$, $\psi = g$ zu setzen. Daher wird

$$v = \frac{C}{\sin p}, \quad \overset{*}{\varrho} = \frac{\sin\varrho\, d\varrho}{d \,.\, \sin p} = \frac{C^2}{g} \cdot \frac{1}{\sin^2 p \sin\alpha \sin\varrho} = \frac{C^2}{g} \cdot \frac{1}{\sin^3 p},$$
$$N = v^2 - g\cos\varrho.$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass für das sphärische Pendel die Geschwindigkeit dem Sinus ihres sphärischen Abstandes vom tiefsten oder höchsten Punkte der Kugel umgekehrt proportional sei. Die zweite liefert in Bezug auf ϱ und p als Coordinaten die Differentialgleichung der Bahn, nämlich

$$\sin\varrho\, d\varrho = \frac{C^2}{g} \frac{d \,.\, \sin p}{\sin^3 p}$$

und ihr Integral ist

$$(A + \cos\varrho)\sin^2 p = \frac{C^2}{2g},$$

worin die Constante A durch die Anfangslage (ϱ_0, p_0) der Geschwindigkeit zu bestimmen ist.

Auch die Bedingung, dass der Punkt einen Kugelkreis beschreibe, ist leicht aufzustellen. Hierzu ist erforderlich, dass der Radius der geodätischen Krümmung constant sei. Die Formel für $\overset{*}{\varrho}$ zeigt, dass alsdann p constant sein müsse. Da aber in diesem Falle p und ϱ identisch sind, so ist auch ϱ constant, also kann der Kugelkreis nur horizontal sein; endlich ergibt sich auch, dass v constant bleiben muss. Der Radius $\overset{*}{\varrho}$ für den Kugelkreis ist nun $\operatorname{tg}\varrho$, wie man sieht, wenn man denselben als den Radius der Deformationscurve ansieht, in welche der

Kugelkreis bei der Abwickelung mit dem die Kugel längs ihm berührenden Kegel übergeht. Daher hat man

$$v = \frac{C}{\sin \varrho}; \quad \operatorname{tg} \varrho = \frac{C^2}{g \sin^3 \varrho},$$

woraus für die Geschwindigkeit folgt

$$v^2 = g \operatorname{tg} \varrho \sin \varrho ,$$

übereinstimmend mit §. 7.

Um von den hier gebrauchten Formeln zu denen des §. 7 überzugehen, dient die Bemerkung, dass $\varrho = \psi$, $d\varrho \,.\, \operatorname{tg} \alpha = \sin \varrho \, d\varphi$, also

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \varrho \cdot \frac{d\varphi}{d\psi}, \quad ds \,.\, \sin \alpha = \sin \varrho \,.\, d\varphi \quad \text{u. s. w.}$$

§. 15. Um die Theorie des §. 8 auf die Bewegung auf Rotationsflächen anzuwenden, bedürfen wir eines bereits von Clairaut in den *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1733 aufgestellten Satzes über die kürzesten Linien auf diesen Flächen. Ein ebener Schnitt der Rotationsfläche, geführt durch ihre Axe, heisst ein Meridian, ein ebener Schnitt senkrecht zu ihr ein Parallelkreis und die Neigung einer Curve auf der Fläche gegen die Meridiancurve das Azimuth dieser Curve. Ist nun r der Radius eines durch den Punkt M einer kürzesten Linie gehenden Parallelkreises und i das Azimuth einer kürzesten Linie in M, so sagt der Clairaut'sche Satz:

Das Produkt $r \sin i$ aus dem Radius r des Parallelkreises und dem Sinus des Azimuths i ist für alle Punkte einer kürzesten Linie eine constante Grösse.

Es hat nach §. 2 die kürzeste Linie jeder Fläche die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene senkrecht auf der Tangentenebene der Fläche steht und mithin die Richtung des Krümmungshalbmessers in die Normale derselben fällt. Nun sind aber die Richtungscosinusse des Krümmungshalbmessers einer Curve gegen drei rechtwinklige Coordinatenaxen den Grössen

$$\frac{d \cdot \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \frac{d \cdot \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \frac{d \cdot \frac{dz}{ds}}{ds},$$

oder wenn wir s als unabhängige Veränderliche für die kürzeste Linie wählen, den Grössen $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$ proportional. Nehmen wir die x- und y-Axe in irgend einem Parallelkreise an, zur z-Axe aber die Rotationsaxe, so sind die Richtungscosinusse der Tangente des Parallelkreises in $M(x, y, z)$ gleich $-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0$ und da die Normale der Rotationsfläche und mithin der Krümmungshalbmesser der kürzesten Linie in die Meridianebene fällt und folglich auf der Tangente des Parallelkreises senkrecht steht, so hat man

$$\frac{x}{r} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{y}{r} \frac{d^2x}{ds^2} = 0 .$$

Integrirt man diese Gleichung, nachdem man sie mit r multiplicirt hat, so ergibt sich

$$x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = \alpha .$$

Nun sind aber $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungscosinusse für die Tangente der kürzesten Linie und da $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0 wie vorher die Richtungscosinusse der Tangente des Parallelkreises bedeuten, so stellt $\frac{x}{r}\frac{dy}{ds} - \frac{y}{r}\frac{dx}{ds}$ den Cosinus der Neigung der Tangente der kürzesten Linie gegen die Tangente des Parallelkreises oder den Sinus des Azimuths der kürzesten Linie dar. Es ist daher $r \sin i = \alpha$, w. z. b. w.

Um den geodätischen Contingenzwinkel für irgend eine Curve auf der Rotationsfläche in einem ihrer Punkte M zu bestimmen, denken wir uns die zwei nächsten Punkte M' und M'' und legen durch die Elemente MM' und $M'M''$ kürzeste Linien, welche die Curve demnach in M und M' berühren. Der Winkel beider kürzesten Linien ist der gesuchte geodätische Contingenzwinkel $d\varkappa$. Nun seien r, $r + dr$ die Radien der Parallelkreise in M, M' und i und $i + di$ die Azimuthe der beiden kürzesten Linien, i' aber die Neigung der ersten kürzesten Linie gegen den Meridian von M'. Man hat alsdann einerseits

$$d\varkappa = i' - (i + di),$$

andererseits ist aber nach dem soeben bewiesenen Satze

$$(r + dr) \sin i' - r \sin i = 0.$$

Aus der zweiten dieser Relationen folgt

$$\frac{\sin i - \sin i'}{\sin i'} = \frac{dr}{r},$$

oder unter Anwendung des Satzes $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)$ und mit Rücksicht auf die unendliche Kleinheit der Differenz $i - i'$ und darauf, dass in der Grenze $\frac{1}{2}(i + i') = i$ wird,

$$\frac{\cos i}{\sin i}(i - i') = \frac{dr}{r}.$$

Entnimmt man hieraus $i - i'$ und substituirt es in die obige Gleichung zwischen $d\varkappa$, i, i' und di, so kommt

$$d\varkappa = -\left(di + \frac{\sin i}{\cos i}\frac{dr}{r}\right) = -\frac{d(r \sin i)}{r \cos i},$$

welches die gesuchte Formel für $d\varkappa$ ist.

Nehmen wir jetzt an, auf einen auf der Rotationsfläche beweglichen Punkt wirke eine Beschleunigung ein, welche fortwährend in die Meridianebene desselben fällt; dann hat die Projection derselben auf die Tangentenebene der Fläche die Richtung der Tangente des Meridians und der frühere Winkel α ist das Azimuth i der Bahn. Daher ist

$$d\varkappa = -\frac{d(r \sin \alpha)}{r \cos \alpha}$$

und folglich

$$\int^{\bullet} \frac{d\varkappa}{\operatorname{tg} \alpha} = -\int^{\bullet} \frac{d(r \sin \alpha)}{r \sin \alpha} = -l(r \sin \alpha)$$

und daher weiter

$$v = \frac{C}{r \sin \alpha},$$

sowie

$$\overset{*}{\varrho} = \frac{v^2}{\psi \sin\gamma \sin\alpha} = \frac{C^2}{\psi \sin\gamma \,.\, r^2 \sin^3\alpha}$$

wozu noch die Formel für den Widerstand hinzutritt:

$$N = \frac{v^2}{R} - \psi \cos\gamma \,.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man z. B. die Bedingungen aufstellen, unter welchen ein schwerer Punkt einen Parallelkreis der Rotationsfläche, deren Axe vertikal steht, durchläuft. Hierfür ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad r = \text{Const.} = r_0\,, \quad \overset{*}{\varrho} = \frac{r}{\cos\vartheta}\,,$$

wo ϑ den Winkel zwischen der Ebene des Parallels und der Tangentenebene, oder, was dasselbe ist, den Winkel zwischen der Axe und der Normalen der Fläche bedeutet und $\gamma = \vartheta$. Man findet

$$v = \frac{C}{r_0} = v_0\,, \quad \frac{r_0}{\cos\vartheta} = \frac{C^2}{g \sin\vartheta \,.\, r_0^2}\,, \quad \text{also} \quad \frac{C}{r_0} = \sqrt{g r_0 \,.\, \operatorname{tg}\vartheta}\,,$$

und mithin

$$v = \sqrt{g r_0 \,.\, \operatorname{tg}\vartheta}\,.$$

Der Punkt bewegt sich gleichförmig und die Umlaufszeit ist

$$T = 2\pi \cdot \frac{r_0}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0}{g \operatorname{tg}\vartheta}} = 2\pi \sqrt{\frac{S_n}{g}}\,,$$

wenn S_n die Subnormale $\frac{r_0}{\operatorname{tg}\vartheta}$ des Meridians bedeutet. Es ist also die Umlaufszeit T gleich der Oscillation eines Pendels von der Länge der Subnormalen des Meridians bei kleinen Elongationen.

§. 16. Der glückliche Erfolg der vorstehenden Methoden knüpft sich theils an den Begriff der geodätischen Krümmung, theils an die Wahl eines für die besondere Flächengattung günstigen Coordinatensystems.

In letzterer Hinsicht wollen wir noch eine kleine Untersuchung zufügen. Der von einem festen Pole O nach dem beweglichen Punkte M gezogene Radiusvector r bilde mit seiner folgenden Lage OM' den unendlich kleinen Winkel $d\mu$ und die Ebene dieses Winkels mit der folgenden Ebene $M'OM''$ den unendlich kleinen Flächenwinkel $d\sigma$. Die Summe aller $d\mu$ ist der mit einer festen Erzeugungslinie r_0 des von r beschriebenen Kegelflächenstückes beginnende conische Winkel μ und die Summe aller $d\sigma$ der analoge conische Winkel auf dem Supplementarkegel. Man kann r, μ, σ als Polarcoordinaten des beweglichen Punktes M ansehen und dessen Beschleunigung φ in drei Componenten zerlegen, φ_r in der Richtung von r, φ_μ senkrecht zu r in der Ebene von $d\mu$ und φ_σ senkrecht zur Ebene von $d\mu$. Um dieselben zu bestimmen, suchen wir die Aenderungen der Geschwindigkeit parallel diesen Richtungen auf und summiren die derselben Richtung angehörigen Aenderungen, nachdem wir sie mit dt dividirt haben. Die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = \frac{MM'}{dt}$ hat nun zwei Componenten $v_r = \frac{dr}{dt}$ längs des Radiusvectors M und $v_\mu = r\frac{d\mu}{dt}$, senkrecht zu ihm in der Ebene von $d\mu$. Im Punkte M' haben wir ebenso $v_r + d.v_r$ längs OM' und $v_\mu + d.v_\mu$ senkrecht zu OM' in der Ebene $M'OM''$ des folgenden Winkels $d\mu$. Eine Linie, geometrisch gleich v_r, von M' aus gezogen, liefert sofort das geometrische Differential von v_r nämlich

$$[d \cdot v_r] = \left[d \cdot \frac{dr}{dt}\right] + [v_r d\mu] = \left[d \cdot \frac{dr}{dt}\right] + \left[\frac{dr}{dt} d\mu\right],$$

von dessen beiden Gliedern das erste die Beschleunigungscomponente $\frac{d^2r}{dt^2}$ in der Richtung des Radiusvectors, das andere eine Componente $\frac{dr}{dt}\frac{d\mu}{dt}$ senkrecht dazu in der Ebene von $d\mu$ darstellt. Ebenso liefert eine v_μ geometrisch gleiche Strecke in M' das geometrische Differential von v_μ, nämlich

$$d[v_\mu] = [v_\mu d\sigma] - [v_\mu d\mu] + [d \cdot v_\mu],$$

von dessen Bestandtheilen der erste eine Beschleunigungscomponente $v_\mu \frac{d\sigma}{dt}$ senkrecht zur Ebene von $d\mu$, der zweite $-r\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$ parallel r und der dritte $\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\mu}{dt}\right)$ senkrecht zu r in der Ebene von $d\mu$ liefert. Indem wir die verschiedenen Bestandtheile sammeln, welche den drei angegebenen Richtungen angehören, erhalten wir

$$\varphi_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2, \quad \varphi_\mu = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\mu}{dt}\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\mu}{dt}\right), \quad \varphi_\sigma = r\frac{d\mu}{dt}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Indem man hiemit die Gleichung $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$ combinirt, gelangt man zu verschiedenen, sehr brauchbaren Formeln, von denen wir die eine entwickeln wollen. Eliminirt man aus den Ausdrücken für φ_r und v^2 die Grösse $\frac{d\mu}{dt}$ und berücksichtigt, dass $\frac{d^2 \cdot \frac{1}{2}r^2}{dt^2} = r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ ist, so ergibt sich sofort

$$v^2 = \frac{d^2 \cdot \frac{1}{2}r^2}{dt^2} - r\varphi_r,$$

eine Formel, in welcher Yvon de Villarceau einen neuen Lehrsatz der Mechanik findet.*) In den Formeln ist φ_r positiv im Sinne der wachsenden r gerechnet.

Ist der Punkt M auf eine Fläche genöthigt, so ist $\varphi_r = \psi_r + N_r$, nämlich gleich der Componenten ψ_r der gegebenen Beschleunigung ψ längs des Radiusvectors und der Componenten N_r des Widerstandes N längs desselben.

Bewegt sich der Punkt auf einer Kugelfläche um O als Mittelpunkt, so folgt, da r constant ist, $v^2 = -(\psi_r + N)r$, welche Gleichung auch im Falle von Reibung, Luftwiderstand etc. fortbesteht, da diese tangentiellen Einwirkungen keine Componenten längs r besitzen. Es ist $\psi_r + N$ stets negativ und wenn $\psi_r = 0$ ist, wird $N = -\frac{v^2}{r}$.

Existirt für ψ_r eine homogene Kräftefunction U vom Grade $\varkappa$, so dass, wenn

*) Vgl. Yvon de Villarceau, Sur un nouveau théorème de Mécanique générale, Comptes rendus de l'Acad. des sc. T. 75 (1872), p. 232, 377, 990; Gilbert, Sur un théorème de M. Villarceau; remarques et conséquences. Compt. r. T. 85 (1877), p. 1280 u. T. 86 (1878), p. 42.

X, Y, Z die Componenten von ψ_r parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen sind, $Xdx + Ydy + Zdz = dU$ ist, so wird

$$\psi_r \cdot r = Xx + Yy + Zz = x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = \varkappa U$$

und also $v^2 = -(Nr + \varkappa U)$ und da $\frac{1}{2} v^2 = U + h$, weiter

$$N = -\frac{(\varkappa + 2) U + 2h}{r}.$$

Im Falle der Schwere ist $U = gz$, $\varkappa = 1$ und erhält man die bekannte Formel für N. N wird constant für $\varkappa = -2$, d. h. wenn

$$U = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma}{z^2}, \quad \text{also} \quad X = \frac{\alpha'}{x^3}, \quad Y = \frac{\beta'}{y^3}, \quad Z = \frac{\gamma'}{z^3}, \quad \psi^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

ist u. s. f.

Auch für eine Bewegung, wofür r proportional der Zeit sich ändert, bleiben die vorstehenden Folgerungen in Kraft.

Die Gleichung $\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \varphi_r$ gibt die relative Bewegung längs des Radiusvectors; der Flächenwiderstand N ist senkrecht zur Fläche, welche r beschreibt und kommt nicht in derselben vor. Mit ihrer Hülfe kann z. B. die Bewegung eines Punktes in einer um O rotirenden engen Röhre behandelt werden.

Weitere Studien über die Bewegung eines Punktes auf gegebenen Flächen enthalten:

Serret, P., Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860, pp. 181—221, welchem Werke wir eine Reihe von Sätzen (§§. 7—14) entlehnt haben.

de Saint Germain, Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle, Paris 1877, pp. 269—294.

Jullien, Problèmes de mécanique rationelle, I, p. 443. — Eine interessante Specialfrage behandelt Foucault, L., Remarques concernant les mouvements d'un point oscillant circulairement sur une surface de révolution du second ordre. (Comptes r. de l'Acad. des sc. T. 61 (1865), p. 515.)

XIII. Capitel.

Beschleunigung im unveränderlichen System. Beschleunigung der Translation und der Rotation. Beschleunigung der ebenen Bewegung.

§. 1. Die Bewegung eines unveränderlichen Systems ist bestimmt durch die Bewegungen dreier Punkte. Sind daher die Geschwindigkeiten dieser nach Grösse und Richtung gegeben, sei es als Functionen der Zeit oder des Ortes oder durch andere Bedingungen, so können mit ihrer Hülfe die Geschwindigkeiten aller übrigen Systempunkte ermittelt werden. Die Lösung dieser und anderer damit in Verbindung stehender Aufgaben war

Gegenstand früherer Untersuchungen. Auf ähnliche Weise sind aber auch die Beschleunigungen aller Systempunkte von den Beschleunigungen dreier Punkte abhängig. Die Untersuchungen hierüber werden Gegenstand des vorliegenden und der nächstfolgenden Capitel sein.

Zunächst untersuchen wir die Beschleunigung der Punkte eines unveränderlichen Systems, welches zur Zeit t eine Translation oder eine Rotation besitzt.

Im Falle einer Translation haben alle Systempunkte zur Zeit t geometrisch gleiche Geschwindigkeiten und beschreiben mit ihnen in dem nächstfolgenden Zeitelemente dt geometrisch gleiche Elementarwege ds, sodass $v = \frac{ds}{dt}$ ihre gemeinsame Geschwindigkeit darstellt. Besteht nun für das folgende Zeitelement die Translationsbewegung des Systems fort, so beschreiben während desselben die Systempunkte gleichfalls geometrisch gleiche Elementarwege von derselben oder von unendlich wenig abweichender Richtung mit gemeinsamer Geschwindigkeit v', in welche v übergegangen ist. Daher besitzen alle Systempunkte dieselbe Elementarbeschleunigung, welche ihre Geschwindigkeit v nach Grösse und Richtung ändert und in Folge dessen auch dieselbe Beschleunigung φ mit denselben Tangential- und Normalcomponenten $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$ und $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$. Es genügt die Kenntniss der Beschleunigung eines einzigen Systempunktes, um die Beschleunigung aller zu wissen. Besitzt das System nicht blos zur Zeit t, sondern während eines endlichen Zeitraumes eine Translationsbewegung, so gelten diese Betrachtungen für alle Momente dieses Zeitraumes. Die Beschleunigungen aller Punkte sind in jedem Momente geometrisch gleich, ändern aber von Moment zu Moment im Allgemeinen ihre gemeinsame Grösse und Richtung.

Besitzt das System zur Zeit t eine Rotation, so sind die Geschwindigkeiten v der Systempunkte den Abständen r der Punkte von der Rotationsaxe proportional und werden, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet, durch $v = r\omega$ dargestellt. Vermöge dieser Geschwindigkeiten beschreiben die Punkte im nächsten Zeitelemente dt Wege $ds = r\omega\, dt$, welche Kreisen angehören, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen und deren Radien die Abstände r sind. Besteht nun auch im folgenden Zeitelemente die Rotation um dieselbe Axe fort, so werden die Radien r die Krümmungshalbmesser der Bahnen der Systempunkte und da sie für beide Zeitelemente nach t constant sind, so erhält man für die Tangential- und Normalcomponente der Beschleunigung die Werthe

$$\varphi_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\omega', \quad \varphi_n = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

wo $\frac{d\omega}{dt} = \omega'$ gesetzt ist, und weiter für die Beschleunigung φ selbst und ihre Neigung λ gegen die Normale der Bahn

$$\varphi = \sqrt{\varphi_n^2 + \varphi_t^2} = r\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}, \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\omega'}{\omega^2}.$$

Für die Punkte in der Entfernung $r = 1$ erhält man

$$\varphi_t = \omega', \quad \varphi_n = \omega^2, \quad \varphi = \sqrt{\omega^4 + \omega'^2} = \vartheta, \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\omega'}{\omega^2}$$

wo ϑ als Abkürzung dienen soll.

Die Beschleunigung der Punkte eines rotirenden Systems sowie ihre Tangential- und Normalcomponente sind dem Abstande r der Punkte von der Rotationsaxe proportional und werden aus den entsprechenden Grössen für die Einheit der Entfernung durch Multiplication mit r gefunden. Für die Einheit der Entfernung ist die Tangentialbeschleunigung die Derivirte der Winkelgeschwindigkeit nach der Zeit, die Normalbeschleunigung aber gleich dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit. Die Neigung der Beschleunigung gegen die Normalen der Bahn ist für alle Systempunkte dieselbe; die Richtung der Normalbeschleunigung schneidet die Rotationsaxe rechtwinklig.

Die Tangentialcomponente ω' heisst die Winkelbeschleunigung des Systems.

Besitzt das System eine endliche Zeit hindurch eine Rotation um dieselbe Axe, so gelten diese Betrachtungen für jeden Moment derselben. Ist die Rotation gleichförmig, also ω constant, so ist

$$\varphi_t = 0, \quad \varphi_n = r\omega^2 = \varphi, \quad \lambda = 0;$$

die Totalbeschleunigung φ reducirt sich dann auf die Normalbeschleunigung und ist senkrecht zur Axe.

Aus der Beschleunigung eines einzigen nicht in der Axe gelegenen Punktes eines rotirenden Systems können die Beschleunigungen aller Punkte gefunden werden.

2. Wir gehen über zur Beschleunigung der ebenen Bewegung. Was wir hier mittheilen, ist bis auf weniger Wichtiges der Inhalt nebst weiterer Ausführung unserer Abhandlung: „Ueber den Beschleunigungszustand des ebenen unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems" (Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. B. XIX, S. 185, u. ffg.).

Der momentane Geschwindigkeitszustand eines unveränderlichen ebenen in der Ebene beweglichen Systems zur Zeit t ist durch die Lage des Mittelpunktes C der Geschwindigkeiten (des Momentancentrums), die Grösse ω und den Sinn der Winkelgeschwindigkeit vollkommen bestimmt. Die Geschwindigkeit $v = r\omega$ eines Systempunktes M in der Entfernung $CM = r$ von C ist auf concentrischen Kreisen um C nach Grösse, auf den Stralen dieses Punktes nach Richtung constant, für Punkte desselben Strales auf verschiedenen Seiten von C aber dem Sinne nach entgegengesetzt. Die Punkte M beschreiben in dem auf t folgenden Zeitelemente dt Bogenelemente $ds = r\omega dt$ senkrecht zu CM und dem Sinne nach harmonirend mit ω. Der Mittelpunkt der Geschwindigkeiten, dessen Geschwindigkeit momentan Null ist, wechselt im Allgemeinen im System, wie in der Ebene, in welcher die Bewegung erfolgt. Der Ort aller Mittelpunkte C in der Ebene der Bewegung ist eine Curve (C), der Ort der Systempunkte Γ, welche nach und nach Mittelpunkte der Geschwindigkeiten werden, eine Curve (Γ) im System und es rollt im Laufe der Bewegung die Curve (Γ) auf der Curve (C) ohne zu gleiten, so dass der Berührungspunkt beider Curven Mittelpunkt der Geschwindigkeiten ist für die Lage des beweglichen Systems, welche durch die zugehörige Lage der Curve (Γ) auf der Curve (C) charakterisirt wird. (Vgl. Cap. IV, §. 2.)

Aehnliches gilt von dem Beschleunigungszustande des Systems zur Zeit t, welcher zu dem Geschwindigkeitszustande dieser Zeit hinzutritt, um ihn in den Geschwindigkeitszustand des nächstfolgenden Moments $t + dt$ überzuführen, d. h. die Winkelgeschwindigkeit ω um C in die Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$ um den folgenden Mittelpunkt C' umzuändern.

Es seien ω und $\omega + d\omega$ die Winkelgeschwindigkeiten des Systems zu den Zeiten t und $t + dt$, so dass dasselbe mit der Winkelgeschwindigkeit ω während des ersten auf t folgenden Zeitelementes um C, mit $\omega + d\omega$ während des zweiten Zeitelementes um C' rotirt (Fig. 175). Nach Cap. III, §. 22 ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$ des zweiten Zeitelementes äquivalent der Winkelgeschwindigkeit ω um C und der unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ um ein gewisses mit C und C' in gerader Linie liegendes Centrum H. Indem wir diese beiden Componenten an die Stelle von $\omega + d\omega$ während des zweiten Zeitelementes treten lassen, besteht die Bewegung des Systems in einer Rotation um C mit der Winkelgeschwindigkeit ω zwei Zeitelemente hindurch und einer Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ um H während des zweiten dieser Zeitelemente. Da die Punkte in der Einheit der Entfernung von C vermöge der Rotation um diesen Punkt zwei Zeitelemente hindurch unveränderliche Geschwindigkeit ω besitzen, so ist ihre Tangentialbeschleunigung Null und haben dieselben blos centripetale Beschleunigung nach C hin gerichtet gleich ω^2. Vermöge der Rotation um H erlangen die Punkte in der Entfernung gleich der Einheit von H den unendlich kleinen Geschwindigkeitszusatz $d\omega$, senkrecht zu den Stralen dieses Punktes, auf welchen sie liegen. Diese unendlich kleine Geschwindigkeitsänderung $d\omega$ nennen wir die Elementarwinkel-

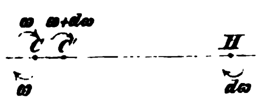

Fig. 175.

beschleunigung des Systems zur Zeit t und H ihren Mittelpunkt; dieselbe Grösse aber, auf die Zeiteinheit bezogen, nämlich $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega'$, dessen Winkelbeschleunigung und H ebenso ihren Mittelpunkt. Die Winkelbeschleunigung ist positiv oder negativ, je nachdem $d\omega$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem die Winkelgeschwindigkeit ω wächst oder abnimmt. Der Mittelpunkt der Winkelbeschleunigung liegt auf der gemeinsamen Tangente der Curven (C), (Γ) auf dem Halbstrale vom Sinne CC' bei positivem, auf dem Halbstrale des Sinnes $C'C$ bei negativem $d\omega$, im Abstande CH, welcher aus der Proportion

$$\frac{CC'}{d\omega} = \frac{C'H}{\omega} = \frac{CH}{\omega + d\omega}$$

folgt. Verbinden wir hiemit die Geschwindigkeit u, mit welcher der Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten wechselt, nämlich die Grösse $u = \frac{CC'}{dt}$, so ergibt sich für den gesuchten Abstand CH, den wir mit c bezeichnen wollen:

$$c = \frac{\omega u}{\alpha}.$$

Diese Entwickelung führt uns zu dem Satze:

Der Beschleunigungszustand des beweglichen ebenen Systems, welcher den Geschwindigkeitszustand desselben zur Zeit t ändert, wird durch zwei Beschleunigungscomponenten dargestellt: die Centripetalbeschleunigung und die Winkelbeschleunigung. Die erstere ist nach dem Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten gerichtet und hat in der Einheit der Entfernung von diesem die Intensität ω^2, letztere ist senkrecht zu den Strahlen ihres Mittelpunktes H, welcher auf der gemeinsamen Tangente der Curven (C), (Γ) liegt und besitzt in der Entfernung gleich der Einheit von diesem die Intensität $\alpha = \omega'$. Die Entfernung c der Mittelpunkte C und H von einander ist $c = \frac{\omega u}{\alpha}$. Die Punkte in der Einheit der Entfernung von C und H erlangen durch diese Beschleunigungscomponenten die elementaren Geschwindigkeitsänderungen $\omega^2 dt$ und $\alpha dt = d\omega$ in den Richtungen derselben.

Ist der Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten stationär, also $u = 0$, so fällt der Mittelpunkt H der Winkelbeschleunigung mit ihm zusammen. Ist die Winkelgeschwindigkeit ω constant, ohne dass $u = 0$ ist, so rückt H ins Unendliche. Wird ω zur Zeit t gleich 0, ohne dass u unendlich wird, so fallen H und C ebenfalls zusammen.

§. 3. Mit Hülfe der im vorigen §. benutzten Zerlegung der Bewegung des Systems in eine Rotation um C mit der Winkelgeschwindigkeit ω während beider Zeitelemente und eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ um H während des zweiten dieser Zeitelemente ergibt sich ebenso der Satz (Fig. 176):

Die Beschleunigung φ eines Systempunktes M, dessen Entfernungen vom Mittelpunkte C der Geschwindigkeiten r und vom Mittelpunkte H der Winkelbeschleunigung r' sind, hat zwei Componenten: die centripetale Beschleunigung $\omega^2 r$ nach C gerichtet und die von der Winkelbeschleunigung herrührende Beschleunigung $\alpha r'$ senkrecht zu r' und dem Sinne nach mit ω harmonirend oder nicht harmonirend, je nachdem α positiv oder negativ ist.

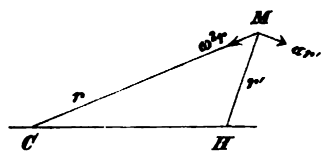

Fig. 176.

Wir wollen dem System für das zweite Zeitelement um C die unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit gleich der Elementarbeschleunigung $d\omega$ in deren Sinn und zugleich im umgekehrten Sinne ertheilen (Fig. 177) und von diesen beiden zugefügten Componenten die erste mit der Winkelgeschwindigkeit ω des zweiten Zeitelementes um C zu $\omega + d\omega$, die andere aber mit der Elementarwinkelbeschleunigung $d\omega$ um H zu dem Rotationspaare $(d\omega, -d\omega)$ verbinden, welches einer unendlich kleinen Translationsgeschwindigkeit $CH \,.\, d\omega = c d\omega = c\alpha dt = \omega u dt$ parallel zur Normalen der Curve (C) äquivalent und nach derjenigen Seite der Tangente von (C) gerichtet ist, nach welcher die Winkelgeschwindigkeit ω das System nicht in Rotation versetzt. Das System rotirt alsdann im ersten Zeitelemente mit der Winkelgeschwindigkeit ω um C, im zweiten Zeitelemente mit $\omega + d\omega$ gleichfalls um C und besitzt in diesem Zeitelemente zugleich die unendlich kleine Translationsgeschwindigkeit $\omega u\, dt$. Die Beschleunigung des Systempunktes M setzt sich daher zusammen aus der Beschleunigung, welche von dieser Rotation herrührt und in die centripetale Beschleunigung $\omega^2 r$ und die tangentiale $r\omega' = \alpha r$ zerfällt, sowie aus der für alle Systempunkte gleichen Beschleunigung ωu, welche durch das Rotationspaar veranlasst wird. Die letztere Componente rührt allein von dem Wechsel des Mittelpunktes der Geschwindigkeiten her und verschwindet, wenn das System blos um C rotirt. Wir können sie als das Winkelbeschleunigungspaar $(\alpha, -\alpha)$ mit dem Momente $\alpha c = \omega u$ auffassen.

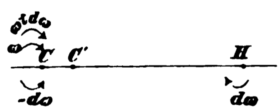

Fig. 177.

Wir erhalten hiedurch den Satz (Fig. 178):

Die Beschleunigung des Systempunktes M ist darstellbar durch zwei Componenten, von denen die eine die Beschleunigung ist, welche der Systempunkt haben würde, wenn der Mittelpunkt der Geschwindigkeiten C nicht wechselte, während die andere von diesem Wechsel des Mittelpunktes der Geschwindigkeiten herrührt. Die erstere zerfällt in die centripetale Componente $\omega^2 r$, welche nach dem Mittelpunkte C hin gerichtet ist und in die Tangentialbeschleunigung αr senkrecht zu dem Strahle des Mittelpunktes C, welcher durch M geht, und bildet mit der Normalen CM der Bahn des Systempunktes den constanten Winkel λ, für welchen $\operatorname{tang} \lambda = \frac{\alpha}{\omega^2}$ ist. Die letztere ist von der Lage des Punktes M im System unabhängig, senkrecht zur Tangente der Curve (C) und nach derjenigen Seite dieser Tangente gewandt, nach welcher die Winkelgeschwindigkeit ω das System nicht dreht; sie wird durch das Moment $\alpha c = \omega u$ des Winkelbeschleunigungspaares $(\alpha, -\alpha)$ ausgedrückt.

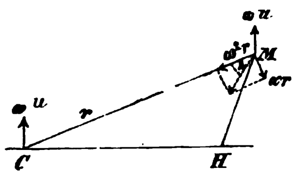

Fig. 178.

Hieraus erhellt, dass sämmtliche Punkte des Systems eine gemeinsame Beschleunigungscomponente haben. Sie ist die Beschleunigung des Mittelpunktes C der Geschwindigkeiten. Denn für ihn ist wegen $r = 0$ die Beschleunigung, welche von der Rotation um C herrührt, Null, die von der Winkelbeschleunigung α um H herrührende ist aber αc und senkrecht zu c.

§. 4. Es kann gefragt werden, ob es im System Punkte gebe, deren Beschleunigung Null ist. Aus dem ersten Satze des §. 3 folgt, dass ein solcher Punkt den Bedingungen genügen müsse: 1. dass die Componenten $\omega^2 r$ und αr, von denen die erste längs r gerichtet, die zweite senkrecht zu r' ist, in eine Gerade fallen, 2. dass dieselben entgegengesetzten Sinnes seien und 3. dass ihre Grösse dieselbe sei. Der ersten Bedingung zufolge kann ein solcher Punkt nur auf dem Kreise liegen, der über der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Geschwindigkeiten und der Winkelbeschleunigung als Durchmesser beschrieben werden kann. Verfolgt man aber die Punkte dieses Kreises, so erkennt man leicht, dass nur die Punkte der einen Hälfte desselben der zweiten Bedingung genügen. Für positive wie negative Werthe von α haben nur die Punkte auf der Seite von CH entgegengesetzte Beschleunigungscomponenten, nach welcher die Rotation nicht erfolgt, die der andern Seite haben Beschleunigungscomponenten $\omega^2 r$ und $\alpha r'$, welche beide nach C hingerichtet sind. Die Beschleunigung ist auf dem ersteren Halbkreise $\omega^2 r - \alpha r'$, auf dem zweiten $\omega^2 r + \alpha r'$. Der dritten Bedingung gemäss muss $\omega^2 r - \alpha r' = 0$, d. h.

$$\frac{r}{r'} = \frac{\alpha}{\omega^2} = \operatorname{tg} \lambda$$

sein. Der Ort der Punkte, welche dieser Bedingung genügen, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf CH liegt und welcher die Strecke CH im Verhältnisse $\alpha : \omega^2$ harmonisch theilt. Dieser Kreis schneidet mithin den vorhin bezeichneten Halbkreis über CH in dem einzigen Punkte, dessen Beschleunigung verschwindet. Der Stral des Punktes C, welcher nach diesem Punkte geht, bildet mit der Normalen der Curve (C) den Winkel λ. Daher (Fig. 179):

Es gibt in dem beweglichen System für jeden Zeitmoment nur einen Punkt, dessen Beschleunigung Null, dessen Geschwindigkeit in diesem Momente also nach Grösse und Richtung stationär ist. Wir nennen diesen Punkt den Mittelpunkt der Beschleunigungen und bezeichnen ihn mit G.

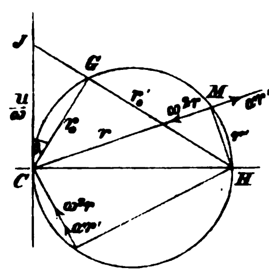
Fig. 179.

Der Mittelpunkt G der Beschleunigungen liegt stets auf derjenigen Seite der gemeinsamen Tangente der Curven (C) und (Γ), nach welcher die Rotation des Systems um C nicht erfolgt und mit dem Mittelpunkte H der Winkelbeschleunigung auf gleicher Seite der Normalen dieser Curven.

Die Abstände r_0, r'_0 des Punktes G von C und H ergeben sich mit Hülfe der Gleichungen

$$\omega^2 r_0 - \alpha r'_0 = 0, \quad r_0^2 + r_0'^2 = c^2,$$

nämlich

$$r_0 = \frac{\alpha c}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{\omega u}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}}, \quad r'_0 = \frac{\omega^2 c}{\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}} = \frac{\omega^3 u}{\alpha \sqrt{\omega^4 + \alpha^2}}.$$

Eine Linie durch G parallel zur Normalen der Curve (C) theilt die Strecke CH im Verhältniss

$$\frac{r_0^2}{r_0'^2} = \frac{\alpha^2}{\omega^4}.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit ω constant, also $\alpha = 0$, so wird $c = \frac{\omega u}{\alpha} = \infty$, mithin $r'_0 = \infty$, aber $r_0 = \frac{u}{\omega}\cdot$ Der Mittelpunkt der Beschleunigungen fällt dann in die Normale der Curve (C). Seine Lage in diesem Falle ist ein Punkt J, welcher in späteren §§. eine Rolle spielen wird; man nennt ihn den Wendepol. Da $r_0 = \frac{u}{\omega} = \frac{\omega u}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2} = c \cdot \operatorname{tg} \lambda$, so ist J der Schnittpunkt der Geraden HG mit der Normalen an (C).

Fällt der Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten ins Unendliche und wird $\omega = 0$, aber so, dass $r\omega$ endlich und für alle Punkte constant gleich v wird, so hat das System eine Translationsgeschwindigkeit. Für sie fällt G mit C und H im Unendlichen zusammen. Die parallelen Richtungen der Normalen der Bahnen der Systempunkte gehen durch G und die Beschleunigungen aller Punkte sind geometrisch gleich.

§. 5. Es seien (Fig. 180 und 181) C, H, G die Mittelpunkte der Geschwindigkeiten, der Winkelbeschleunigung und der Beschleunigung und

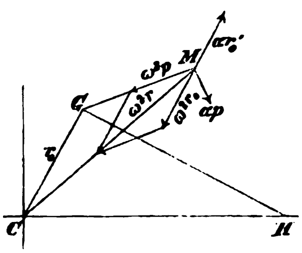

Fig. 180.

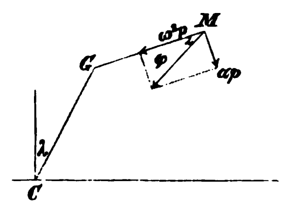

Fig. 181.

$CH = c$, $CG = r_0$, $HG = r_0'$ ihre Entfernungen von einander. Ein beliebiger Systempunkt M in den Entfernungen $CM = r$, $HM = r'$, $GM = p$ von diesen Punkten besitzt die beiden Beschleunigungscomponenten $\omega^2 r$ längs MC nach C hingerichtet und $\alpha r'$ senkrecht zu HM und dem Sinne nach harmonirend mit α. Wir zerlegen die centripetale Componente $\omega^2 r$ nach p und parallel GC; vermöge der Aehnlichkeit der hiezu dienenden Figuren erhalten wir hiedurch statt $\omega^2 r$ die Componenten $\omega^2 p$ nach G hin gerichtet und $\omega^2 r_0$ parallel GC. Die letztere ist von der Lage des Punktes M im System unabhängig, für alle Punkte dieselbe nach Grösse, Richtung und Sinn und stellt die centripetale Beschleunigung des Punktes G dar. Die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Componente $\alpha r'$ lösen wir ebenfalls in zwei Componenten auf. Zu dem Ende denken wir zunächst dem System um G zwei entgegengesetzt gleiche unendlich kleine Geschwindigkeitscomponenten gleich der Elementarwinkelbeschleunigung $d\omega$ um H ertheilt und erhalten dadurch anstatt $d\omega$ um H die Elementarwinkelbeschleunigung $d\omega$ um G in Verbindung mit dem Rotationspaare $(d\omega, -d\omega)$, dessen Moment $d\omega \,.\, GH$ eine unendlich kleine Translationsgeschwindigkeit senkrecht zu GH und dem Sinne nach mit $d\omega$ um H harmonirend darstellt. Indem wir mit dem Zeitelemente dt dividirt denken, treten hiedurch an die Stelle der Winkelbeschleunigung α um H dieselbe Winkelbeschleunigung α um G in Verbindung mit der Beschleunigung $\alpha r_0'$ senkrecht zu GH. Die Winkelbeschleunigung α um G veranlasst im Punkte M die Beschleunigungscomponente αp senkrecht zum Strahle GM und harmonirenden Sinnes mit α, welche in Verbindung mit der Beschleunigung

$\alpha r'_0$ die aus der Winkelbeschleunigung α entspringende Beschleunigungscomponente $\alpha r'$ vertreten kann. Die Componente $\alpha r'_0$ ist, wie $\omega^2 r_0$ von der Lage des Systempunktes unabhängig und stellt die aus der Winkelbeschleunigung stammende Beschleunigung des Punktes G dar. Diese beiden letztgenannten Componenten tilgen sich daher an jedem Systempunkte M, wie sie sich am Mittelpunkte der Beschleunigungen tilgten (§. 4). Demnach bleiben am Punkte M die Componenten $\omega^2 p$ und αp, so dass wir zu folgendem Satze gelangen:

Die Beschleunigung φ eines Systempunktes M in der Entfernung p vom Mittelpunkte G der Bechleunigungen kann durch zwei Componenten dargestellt werden: die centripetale Beschleunigung $\omega^2 p$, nach dem Punkte G hin gerichtet und der Entfernung von diesem proportional und die Beschleunigung αp, von der Winkelbeschleunigung α herrührend, senkrecht zum Strahle GM des Beschleunigungsmittelpunktes, harmonirenden Sinnes mit α und gleichfalls dem Abstande p proportional.

Aus diesen zu einander rechtwinkligen Componenten $\omega^2 p$ und αp erhält man die Grösse φ der Beschleunigung und ihre Neigung λ gegen den Stral GM, nämlich:

$$\varphi = p\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = pd, \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\alpha}{\omega^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

Die Beschleunigung des Systempunktes ist der Entfernung vom Mittelpunkte der Beschleunigungen proportional und auf concentrischen Kreisen um diesen Punkt constant. Sie bildet in allen Punkten des Systems mit dem Strale dieses Punktes constanten Winkel und ist längs eines und desselben Strahles constant nach Richtung, in zwei Punkten desselben Strahles aber, welche auf verschiedenen Seiten des Beschleunigungsmittelpunktes liegen dem Sinne nach entgegengesetzt.

Die Existenz der centripetalen Beschleunigungscomponente $\omega^2 p$ bewirkt, dass der Winkel λ, den φ mit dem Strahle GM bildet, nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ sein kann.

Die vorstehende Reduction der Beschleunigungen ist anwendbar nicht blos für den Punkt G, sondern auch für jeden andern Punkt P, nur tilgen sich bei der Wahl eines solchen die Componenten wie $\omega^2 r_0$ und $\alpha r'_0$ nicht. Man kann die Beschleunigung auch hier aus zwei Componenten $\omega^2 . PM$ und $\alpha . PM$ bilden, die erste nach P gerichtet, die zweite senkrecht zu PM, zu welchen aber noch $\omega^2 . PC$ und $\alpha . PH$ hinzutreten, von denen die eine parallel PC, die andere senkrecht zu PH ist.

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, dass das System der centripetalen Beschleunigungen wie $\omega^2 r$ von einem Centrum auf das andere übertragen werden kann, wenn man allen Systempunkten eine gemeinschaftliche Beschleunigung hinzugefügt, gleich dem Produkte aus dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit und dem Abstande beider Centra, parallel diesem Abstande und von dem Sinne, welcher vom zweiten Centrum nach dem ersten hinzeigt. Ebenso kann jedes von einer Winkelbeschleunigung herrührende System von Beschleunigungen auf ein anderes Centrum der Winkelbeschleunigung bezogen werden, wenn zugleich dem System eine Translationsbeschleunigung gleich dem Momente des Paares von Winkelbeschleunigungen zugefügt wird, welches durch die Winkelbeschleunigung um das zweite Centrum gebildet wird.

Wenn man auf die hier angedeutete Weise z. B. die Beschleunigungen $\omega^2 p$ und αp von G auf C überträgt, so ergeben sich $\omega^2 r$, αr in Verbindung mit $\omega^2 r_0$ parallel CG und αr_0 senkrecht zu CG, welche beide zusammen die Componente $r_0 \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = \omega u = \alpha c$ (s. §. 2) liefern, welches die Beschleunigung des Punktes C ist. Dies Resultat stimmt mit dem zweiten Satze des §. 3. überein. Man erkennt hierin mit Leichtigkeit den etwas allgemeineren Satz:

Man kann die Beschleunigungen des Systems vom Beschleunigungsmittelpunkte G auf jeden andern Punkt P übertragen, indem man zugleich allen Systempunkten die Beschleunigung des Punktes P ertheilt.

§. 6. Der Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten hat keine nach C gerichtete Centripetalbeschleunigung, seine Beschleunigung rührt blos von der Winkelbeschleunigung α um H her und ist dieselbe $\alpha c = \omega u$ und parallel zur Normalen der Curve (C). Da die Beschleunigungen aller Punkte eines Strales von G parallel sind, so ist die Gerade CG der Ort aller Punkte, deren Beschleunigung der Normalen der Curve (C) parallel ist.

Der Mittelpunkt H der Winkelbeschleunigung besitzt blos Centripetalbeschleunigung nach C hin. Daher ist die Gerade GH der Ort aller Punkte, deren Beschleunigung parallel der Tangente der Curve (C) ist.

Von den beiden hier erwähnten Geraden bildet die erste mit der Normalen, die letztere mit der Tangente der Curve (C) den Winkel λ, für welchen $\operatorname{tg} \lambda = \alpha : \omega^2$; da sie sich in G schneiden und durch C und H gehen, so sind sie senkrecht zu einander und können zur Auffindung des Mittelpunktes der Beschleunigungen dienen.

§. 7. Die Gerade CM ist die Normale der Bahn des Systempunktes M. Für Punkte ohne Tangentialbeschleunigung müssen die beiden Componenten der Beschleunigung, die centripetale, nach C gerichtete $\omega^2 r$ und die zu MH senkrecht von der Winkelbeschleunigung um H herrührende in diese Normale fallen. Für sie müssen also CM und MH zu einander rechtwinklig werden. Daher:

Der Kreis, welcher über dem Abstande der Mittelpunkte C und H der Geschwindigkeiten und der Winkelbeschleunigung als Durchmesser beschrieben werden kann, ist der Ort der Systempunkte ohne Tangentialbeschleunigung.

Die Beschleunigung der Punkte dieses Kreises ist blos Normalbeschleunigung $\varphi_n = \omega^2 r \mp \alpha r$, wo das Zeichen $(-)$ für die Punkte auf der Seite von CH gilt, auf welcher der Beschleunigungsmittelpunkt liegt, das Zeichen $(+)$ für die andere Seite und die Beschleunigung positiv nach C hin gerechnet ist.

Da die Tangentialbeschleunigung der Punkte des Kreises Null ist, so ist ihre Geschwindigkeit zur Zeit t stationär, also im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum in Bezug auf Zeit oder Ort.

Bezeichnen wir den Winkel HMC, den die Strahlen, welche von irgend einem Systempunkte M nach den Mittelpunkten C und H der Geschwindigkeiten und der Winkelgeschwindigkeit gezogen werden können, mit einander bilden, positiv im Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω gerechnet mit ε, so ist die Tangentialbeschleunigung φ_t bestimmt durch die Gleichung

$$\varphi_t = \alpha r' \cos \varepsilon$$

und positiv für die Punkte ausserhalb des Kreises über CH als Durchmesser, negativ für die Punkte im Innern desselben. Daher der Satz:

Der Kreis, welcher den Ort der Systempunkte ohne Tangentialbeschleunigung darstellt, scheidet die Punkte, deren Geschwindigkeit zur Zeit t wächst von denen, deren Geschwindigkeit im Abnehmen begriffen ist; die ersteren liegen ausserhalb, die letzteren innerhalb desselben.

Der Mittelpunkt der Beschleunigungen hat keine Tangentialbeschleunigung und liegt auf dem genannten Kreise (§. 4).

Die Punkte M gleicher Tangentialbeschleunigung a genügen der Bedingung $\varphi_t = a$, $r' \cos \varepsilon = a : \alpha$. Bezeichnet ϑ den Winkel, welchen der Radiusvector $CM = r$, vom Mittelpunkt der Geschwindigkeiten nach M gezogen, mit CH bildet, so ist die Sehne, welche er in dem Kreise der Punkte ohne Tangentialbeschleunigung bestimmt $c \cos \vartheta = r - r' \cos \varepsilon$. Hiemit erhält man für die Punkte M die Gleichung $r = c \cos \vartheta + \frac{a}{\alpha}$. Der Ort derselben wird daher erhalten, indem man auf den Strahlen des Punktes C von ihrem Schnittpunkte D mit dem Kreise die Länge $DM = \frac{a}{\alpha}$ aufträgt und ist daher eine Pascal'sche Schneckenlinie (Fig. 182). Für die Punkte dieser Curve ausserhalb des Kreises ist die Tangentialbeschleunigung der positive Werth von $a = \alpha \,.\, DM$, für die inneren der negative; der Doppelpunkt C der Curve genügt der Forderung nicht, da seine Beschleunigung αc die Tangentialbeschleunigung ist. Für $a = c\alpha$ wird die Curve eine Cardioide, für $a = 0$ der Kreis über CH als Durchmesser.

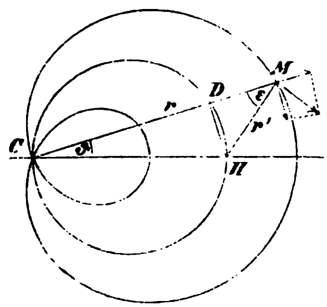

Fig. 182.

Die Tangentialbeschleunigung ist constant auf den einzelnen Curven eines Systems Pascal'scher Schneckenlinien, welche den Mittelpunkt der Geschwindigkeiten zum Doppelpunkte, die Tangente der Curve (C) zur Symmetrieaxe und den Kreis verschwindender Tangentialbeschleunigung zur Basis haben.

Mit Hülfe von $c \cos \vartheta = r - r' \cos \varepsilon$ erhält man

$$\varphi_t = \alpha r' \cos \varepsilon = \alpha\,(r - c \cos \vartheta) = \alpha\,(r - r_0),$$

wenn r_0 der Radiusvector von der Richtung r bis an den Tangentialkreis ist. Die Tangentialbeschleunigung eines Systempunktes ist also der Differenz $r - r_0$ proportional.

§. 8. Die Normalbeschleunigung φ_n des Systempunktes M besteht aus der centripetalen Componente $\omega^2 r$ und dem Bestandtheile $\alpha r' \sin \varepsilon$ der von der Winkelbeschleunigung α um H herrührenden Beschleunigung $\alpha r'$, deren anderer Bestandtheil $\alpha r' \cos \varepsilon$ die Tangentialbeschleunigung φ_t bildet. Sie ist daher $\varphi_n = \omega^2 r - \alpha r' \sin \varepsilon$, wenn hinsichtlich des Sinnes von ε die obige Bestimmung festgehalten wird. Die Punkte M, deren Normalbeschleunigung verschwindet, genügen daher der Bedingung

$$\omega^2 r - \alpha r' \sin \varepsilon = 0$$

und da $c \cos \vartheta' = r' \sin \varepsilon$ ist, wenn ϑ' den Winkel bezeichnet, welchen r mit der Normalen der Curve (C) bildet (Fig. 183), so geht diese Bedingung über in $r = \frac{\alpha c}{\omega^2} \cos \vartheta'$ oder da $\alpha c = \omega u$ ist, in $r = \frac{u}{\omega} \cos \vartheta'$. Trägt man daher auf der Normalen von (C) nach der Seite von CH, auf welcher der Mittelpunkt der Beschleunigungen liegt, die Länge

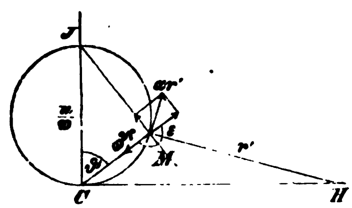

Fig. 183.

$CJ = \frac{u}{\omega}$ auf, so sind die Punkte M ohne Normalbeschleunigung die Projectionen des Punktes J auf die Stralen des Mittelpunktes C der Geschwindigkeiten. Hieraus folgt der Satz:

Der Ort der Systempunkte ohne Normalbeschleunigung ist ein Kreis vom Durchmesser $\frac{u}{\omega}$, welcher die Curve (C) im Mittelpunkte der Geschwindigkeiten berührt und mit dem Beschleunigungsmittelpunkte auf derselben Seite der Tangente dieser Curve liegt.

Die Grösse $\frac{u}{\omega}$, welche die Lage des Wendepols (§. 4) bestimmt, hat eine rein geometrische Bedeutung, die sich später ergeben wird.

Der Mittelpunkt G der Beschleunigungen liegt auf dem Kreise, da er keine Normalbeschleunigung hat. Es ist

$$\varphi_n = \omega^2 \left(r - \frac{\alpha c}{\omega^2} \cos \vartheta'\right) = \omega^2 \left(r - \frac{u}{\omega} \cos \vartheta'\right) = \omega^2 (r - r_n),$$

wenn r_n der Radiusvector bis an den Wendekreis ist. Demnach ist φ_n proportional der Differenz $r - r_n$, d. h. dem Abstande des Systempunktes M vom Wendekreis in der Richtung von MC.

Für die Punkte im Innern des Kreises wird, wie man hieraus sieht, die Normalbeschleunigung, deren positiven Sinn wir nach O hingerichtet angenommen haben, negativ, für äussere Punkte ist sie positiv.

Der Kreis der Punkte verschwindender Normalbeschleunigung scheidet die Systempunkte positiver Normalbeschleunigung von den Systempunkten negativer Normalbeschleunigung, so dass die ersteren ausserhalb, die letzteren innerhalb liegen. Die Normalbeschleunigung aller Punkte ausserhalb dieses Kreises ist daher nach dem Mittelpunkte der Geschwindigkeiten hin gerichtet, die Normalbeschleunigung der Punkte innerhalb desselben ist von diesem Punkte abgewandt.

Da die Normalbeschleunigung eines Punktes immer nach dem Krümmungsmittelpunkte seiner Bahn gerichtet ist, so folgt weiter:

Die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen der Punkte, welche im Innern des Kreises ohne Normalbeschleunigung liegen, fallen auf die Seite des Mittelpunktes der Geschwindigkeiten, auf welcher dieser Kreis liegt, die der Punkte ausserhalb dieses Kreises auf die entgegengesetzte. Die Bahnen der innern Punkte wenden daher ihre convexe Seite, die der äusseren Punkte ihre concave Seite dem Mittelpunkte der Geschwindigkeiten zu. Die Bahnen der Punkte des Kreises selbst bilden den Uebergang und haben diese Punkte zu Wendepunkten.

Die letzte Behauptung dieses Satzes folgt daraus, dass die Normalbeschleunigung, da sie gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Bahn ist, nur verschwinden kann, wenn letzterer unendlich wird, also die Krümmungsmittelpunkte der Bahnen jener Punkte des Kreises im Unendlichen liegen, für die Bahnen selbst also zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente in ein und dieselbe Gerade fallen. Dieser Eigenschaft wegen nennen wir den Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung den **Wendekreis** des Systems für C als Mittelpunkt der Geschwindigkeiten.

Für die Punkte, deren Normalbeschleunigung zur Zeit t den Werth b hat, ist $\omega^2 r - \alpha r' \sin \varepsilon = b$. Da aber $r' \sin \varepsilon = c \cos \vartheta'$, so wird für sie $r = \frac{\alpha c}{\omega^2} \cos \vartheta' + \frac{b}{\omega^2}$ oder $r = \frac{u}{\omega} \cos \vartheta' + \frac{b}{\omega^2}$. Die Grösse $\frac{u}{\omega} \cos \vartheta'$ ist aber die Sehne, welche der Stral r im Wendekreise bestimmt. Daher:

Der Ort der Punkte gleicher Normalbeschleunigung ist eine Pascal'sche Schneckenlinie mit dem Mittelpunkte der Geschwindigkeiten als Doppelpunkt, der Normalen der Curve (C) als Symmetrieaxe und deren Wendekreis als Basis.

§. 9. Durch jeden Punkt des Systems kann eine Curve gelegt werden, deren Normalen die Richtungen der Beschleunigung der Curvenpunkte sind. Da die Normale die Richtung der Beschleunigung haben soll und diese mit dem Strale, welcher den Beschleunigungsmittelpunkt mit dem Curvenpunkt verbindet, den constanten Winkel λ bildet, so ist die Curve eine logarithmische Spirale, deren Pol im Beschleunigungscentrum liegt und deren Tangenten gegen die Radienvectoren dieses Pols unter dem Winkel $\frac{1}{2}\pi - \lambda$ geneigt sind. Ebenso ist der Ort der Punkte, deren Tangenten die Beschleunigungsrichtung haben, eine logarithmische Spirale von der Neigung λ gegen die Radienvectoren. Ebenso die Orte der Punkte deren Beschleunigung mit der Tangenten oder Normalen constanten Winkel bilden.

Der Ort der Punkte, deren Beschleunigung durch einen festen Punkt P geht, ist ein Kreis, welcher den Mittelpunkt der Beschleunigungen enthält und den Winkel λ als Peripheriewinkel fasst. (Von den zwei möglichen Kreisen ist nur der eine hieher gehörig.) Daher liegen je zwei Systempunkte mit dem Schnittpunkte ihrer Beschleunigungsrichtungen und dem Mittelpunkte der Beschleunigungen auf demselben Kreise.

Der Ort der Punkte, für welche die centripetale Beschleunigung $\omega^2 r$ in Bezug auf den Mittelpunkt der Geschwindigkeiten constantes Verhältniss ε zu der Beschleunigung $\alpha r'$ senkrecht zum Strahle r' des Mittelpunktes der Winkelgeschwindigkeit hat, ist der Kreis $\frac{r'}{r} = \frac{\varepsilon \alpha}{\omega^2}$.

Ebenso sind die Orte, für welche die Verhältnisse von ωr, $\omega^2 p$, αp constant sind, Kreise.

Die beiden oben erwähnten Kreise, für welche resp. φ_n und φ_t verschwinden, wurden zuerst von **Bresse** gefunden (*Mémoire sur un théorème* *nouveau concernant les mouvements plans et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure. Journal de l'école polytechn. T. XX, p. 104, a. 1853*).

§. 10. Für die analytische Darstellung der vorstehenden Theorie wählen wir die Tangente der Curve (C) zur x-Axe, positiv im Sinne der Wechselgeschwindigkeit u und die Normale derselben zur y-Axe positiv im Sinne der gemeinsamen Beschleunigungscomponente ωu. Der Systempunkt $M(x, y)$ (Fig. 184) hat die Beschleunigungscomponenten $r\omega^2, r\omega', \omega u$ (s. §. 3), die erste von M nach C gerichtet, die zweite senkrecht zu CM und die dritte parallel der y-Axe. Indem wir den Sinn der Drehung übereinstimmend mit der Uhrzeigerbewegung annehmen, sind die Richtungscosinusse dieser Componenten

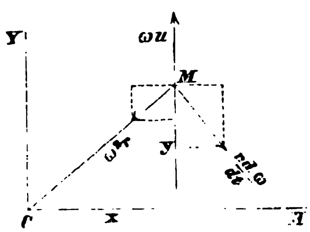

Fig. 184.

$$-x:r, \quad -y:r; \quad y:r, \quad -x:r; \quad 0, 1,$$

folglich die Gesammtcomponenten X, Y der Beschleunigung von M parallel den Coordinatenaxen:

$$X = -\omega^2 x + \omega' y, \quad Y = -\omega^2 y - \omega' x + \omega u.$$

Die Systempunkte M, deren Beschleunigung parallel der Normalen der Curve (C) ist, liegen auf der Geraden $X = 0$, d. h. $-\omega^2 x + \omega' y = 0$, welche durch C geht und mit der Tangente einen Winkel bildet, dessen Tangente $\omega^2 : \omega'$ ist. Die Punkte, deren Beschleunigung parallel der Tangente ist, erfüllen die Gerade $Y = 0$ oder $-\omega' x - \omega^2 y + \omega u = 0$, welche zur vorigen senkrecht ist im Abstande $\delta = \omega u : \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ von ihr. Der Schnittpunkt beider Geraden hat die Beschleunigung Null. Es ist der Beschleunigungsmittelpunkt mit den Coordinaten x_1, y_1, welche den beiden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \omega^2 x_1 - \omega' y_1 &= 0, \\ \omega' x_1 + \omega^2 y_1 &= \omega u, \end{aligned} \quad \text{woraus folgen:} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\omega\omega' u}{\vartheta}, \\ y' &= \frac{\omega^3 u}{\vartheta}, \end{aligned} \quad \vartheta = \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}.$$

Mit Hülfe der Coordinaten x_1, y_1 des Beschleunigungsmittelpunktes bringt man X, Y auf die Form

$$\begin{aligned} X &= -\omega^2(x - x_1) + \omega'(y - y_1), \\ Y &= -\omega^2(y - y_1) - \omega'(x - x_1), \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} X &= -\omega^2 \xi + \omega' \eta, \\ Y &= -\omega^2 \eta + \omega' \xi, \end{aligned}$$

indem man nämlich die Gleichungen, denen x_1, y_1 genügen, von den Ausdrücken für X, Y abzieht und die Coordinaten $x - x_1$, $y - y_1$ des Punktes M in Bezug auf ein dem gewählten paralleles Coordinatensystem mit dem Ursprung im Beschleunigungsmittelpunkte durch ξ, η bezeichnet. Man erkennt in dieser Form die Componenten $\omega^2 p$, $\omega' p$ (§. 5), welche in $-\omega^2\xi$, $-\omega^2\eta$; $\omega'\eta$, $-\omega'\xi$ zerfallen.

Indem man die Componenten X, Y auf die Normale CM der Bahn des Punktes M und deren Tangente projicirt, d. h. mit $x:r$, $y:r$, resp. $y:r$, $-x:r$ multiplicirt und addirt, erhält man die Normal- und die Tangentialbeschleunigung des Punktes M, nämlich:

$$\varphi_n = X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} = -\frac{\omega^2}{r}(x^2 + y^2) + \frac{\omega u}{r}y,$$

$$\varphi_t = X\frac{y}{r} + Y\frac{x}{r} = \frac{\omega'}{r}(x^2 + y^2) - \frac{\omega u}{r}x.$$

Die Systempunkte M ohne Normalbeschleunigung oder ohne Tangentialbeschleunigung genügen daher den Bedingungen:

$$\omega^2(x^2+y^2)-\omega u y=0, \quad \omega(x^2+y^2)-\omega u x=0,$$

in welchen man leicht die Kreise (§§. 7. 8.) erkennt.

§. 11. Durch die speciell gewählte Lage des Coordinatensystems wurde eine gewisse geometrische Durchsichtigkeit gewahrt. Indessen ist es leicht, die Betrachtungen auch in allgemeinerer Form durchzuführen. Das Bedürfniss hierfür stellt sich heraus, wenn es sich z. B. um die Aufsuchung des Ortes aller Beschleunigungscentra für ein bestimmtes Bewegungsproblem oder des Ortes aller Systempunkte handelt, welche nach und nach mit dem Beschleunigungscentrum zusammenfallen oder wenn man die Enveloppe aller Wendekreise untersuchen wollte u. s. w.

Nehmen wir in der absoluten Ebene ein festes Coordinatensystem der x, y, in dem beweglichen System ein mit diesem bewegliches, mit ihm aber fest verbundenes der x', y' an und bezeichnen ausserdem mit x_1, y_1 die Coordinaten des Ursprungs des letzteren, sowie mit a, b; a', b' die Richtungscosinusse seiner Axen gegen die Axen der x, y, so bestehen für den Systempunkt $M(x', y')$, welcher zur Zeit t die absoluten Coordinaten x, y hat, die Relationen:

$$x=x_1+ax'+a'y', \qquad y=y_1+bx'+b'y'.$$

Differentiiren wir dieselben zweimal mit Rücksicht darauf, dass x', y' von der Zeit unabhängig sind, nach t, so kommt

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_1}{dt}+x'\frac{da}{dt}+y'\frac{da'}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy_1}{dt}+x'\frac{db}{dt}+y'\frac{db'}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}+x'\frac{d^2a}{dt^2}+y'\frac{d^2a'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y_1}{dt^2}+x'\frac{d^2b}{dt^2}+y'\frac{d^2b'}{dt^2},$$

welche Formeln die Componenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes x', y' parallel den absoluten Axen liefern.

Für die Coordinaten x'_1, y'_1 des Beschleunigungscentrums gelten, weil für diesen Punkt $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$ sind, die Gleichungen

$$0=\frac{d^2x_1}{dt^2}+x'_1\frac{d^2a}{dt^2}+y'_1\frac{d^2a'}{dt^2}, \quad 0=\frac{d^2y_1}{dt^2}+x'_1\frac{d^2b}{dt^2}+y'_1\frac{d^2b'}{dt^2}.$$

Indem man diese Gleichungen von den vorigen abzieht, eliminirt man die Componenten der Beschleunigung des beweglichen Ursprungs und erhält für die Componenten der Beschleunigung eines beliebigen Systempunktes die etwas einfacheren Formeln:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(x'-x'_1)\frac{d^2a}{dt^2}+(y'-y'_1)\frac{d^2a'}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=(x'-x'_1)\frac{d^2b}{dt^2}+(y'-y'_1)\frac{d^2b'}{dt^2}.$$

Für die Punkte x', y', deren Normalbeschleunigung $\frac{v^2}{\varrho}$ verschwindet, hat man wegen

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad \varrho=\frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix}\frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2}\end{vmatrix}}, \quad \frac{v^2}{\varrho}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2}\end{vmatrix}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die Differentialquotienten mit Hülfe der obigen Formeln durch die Grössen x', y' auszudrücken sind.

Für die Punkte x', y', deren Tangentialbeschleunigung $\frac{dv}{dt}$ verschwindet, ist

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

in derselben Weise zu behandeln.

Die Ausführung dieser Andeutungen führt zu den allgemeinen Gleichungen des Wendekreises und Tangentialkreises. Will man die Formeln des §. 10 wiedergewinnen, so hat man nur zu Axen der x, y die Tangente und Normale der Curve (C) und zu Axen der x', y' die mit diesen zusammenfallenden Geraden, die Tangente und Normale der Curve (Γ) zu wählen. Ist allgemein α der Winkel $(x'x)$, so wird

$$\begin{array}{llll}
a = \cos\alpha, & & \frac{da}{dt} = \omega\sin\alpha = b\omega, & \frac{d^2a}{dt^2} = -a\omega^2 + b\frac{d\omega}{dt}, \\
b = \sin\alpha, & & \frac{db}{dt} = -\omega\cos\alpha = -a\omega, & \frac{d^2b}{dt^2} = -b\omega^2 - a\frac{d\omega}{dt}, \\
a' = -\sin\alpha, & \frac{d\alpha}{dt} = -\omega & \frac{da'}{dt} = \omega\cos\alpha = a\omega, & \frac{d^2a'}{dt^2} = b\omega^2 + a\frac{d\omega}{dt}, \\
b' = \cos\alpha, & & \frac{db'}{dt} = \omega\sin\alpha = b\omega, & \frac{d^2b'}{dt^2} = -a\omega^2 + b\frac{d\omega}{dt};
\end{array}$$

im vorliegenden Falle

$$\begin{array}{llll}
a = 1 & & \frac{da}{dt} = 0, & \frac{d^2a}{dt^2} = -\omega^2, \\
b = 0 & & \frac{db}{dt} = -\omega, & \frac{d^2b}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}, \\
a' = 0 & \frac{d\alpha}{dt} = -\omega & \frac{da'}{dt} = \omega, & \frac{d^2a'}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}, \\
b' = 1 & & \frac{db'}{dt} = 0, & \frac{d^2b'}{dt^2} = -\omega^2.
\end{array}$$

Ferner sind $x_1 = y_1 = 0$, ebenso $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = 0$, weil der Punkt x_1, y_1 im Momentancentrum liegt und also seine Geschwindigkeit Null ist, $\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0$, weil in Folge der Rotation um das folgende Momentancentrum derselbe Punkt keine Beschleunigung in der Richtung der x-Axe erhält, $\frac{d^2y_1}{dt^2} = \omega u$. Daher wird

$$\frac{dx}{dt} = \omega y', \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega x',$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x' + \frac{d\omega}{dt}y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega u - \frac{d\omega}{dt}x' - \omega^2 y'$$

und also

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^3(x'^2 + y'^2) + \omega^2 u y',$$

$$\frac{d(\frac{1}{2}v^2)}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{dt}(x'^2 + y'^2) - \omega^2 u x',$$

wodurch sich die Gleichungen der Orte $\frac{v^2}{\varrho} = 0$ und $\frac{dv}{dt} = 0$ ergeben als

$$x'^2 + y'^2 - \frac{u}{\omega}y' = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt}(x'^2 + y'^2) - \omega u x' = 0$$

wie früher.

§. 12. Bereits in Cap. IV, §. 15. fanden wir, dass wenn ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser der während der Bewegung des ebenen Systems auf einander rollenden Curven (C), (Γ) sind und die Krümmungskreise auf entgegengesetzte Seiten der gemeinschaftlichen Tangente dieser Curven fallen, zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω, der Winkelgeschwindigkeit u und ϱ und ϱ', oder auch zwischen der Elementaramplitude $d\vartheta$, welche die Summe der Contingenzwinkel $d\varepsilon$, $d\varepsilon'$ der Curven (C), (Γ) ist, dem gemeinsamen Bogenelemente $d\sigma$ und ϱ, ϱ' die Relationen bestehen

$$\frac{\omega}{u} = \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}.$$

Fallen die Krümmungskreise auf dieselbe Seite der gemeinsamen Tangente, so tritt die Differenz $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}$ mit dem Zeichen $+$ oder $-$ an die Stelle der Summe $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$, je nachdem $\frac{1}{\varrho} \lessgtr \frac{1}{\varrho'}$ ist. Indem wir also die Grössen ϱ, ϱ' als von gleichen oder entgegengesetzten Zeichen ansehen, je nach der Lage der Krümmungskreise kann die Formel als allgemeingültig beibehalten werden. Nun fanden wir §. 8, dass $\frac{u}{\omega}$ der Durchmesser des Wendekreises ist. Daher also der Satz: Der Durchmesser $\frac{u}{\omega}$ des Wendekreises ist der reciproke Werth der Summe der Krümmungen der beiden während der Bewegung auf einander rollenden Curven (C), (Γ).

Der Wendekreis hat die Eigenschaft, dass die Krümmungshalbmesser der Bahnen seiner Punkte für die ihm entsprechende Lage des Systems unendlich gross sind. Dies kann folgendermassen geometrisch erwiesen werden.

Durch den Berührungspunkt C der Curven (C), (Γ) (Fig. 185) ziehen wir einen beliebigen Stral und durch den folgenden Punkt C', den Endpunkt ihres gemeinschaftlichen Bogenelementes CC', mit ihm eine Parallele. Ein weiterer Stral durch C, welcher mit dem ersten die unendlich kleine Elementaramplitude $d\vartheta$ bildet, schneidet den Parallelstral in M', welcher Punkt die Lage des Punktes M im Abstande $CM = CM'$ bezeichnet, in welche dieser durch die Drehung des Systems gelangt. Nun ist MC die Normale der Bahn des Punktes M seiner ersten, $M'C'$ die Normale derselben für seine zweite Lage. Beide Normalen schneiden sich aber im Krümmungsmittelpunkte der Bahn von M und da sie parallel sind, so liegt dieser Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen. Demnach gibt es auf jedem Strale des Punktes C einen Punkt M, dessen Krümmungshalbmesser unendlich gross ist. Da der Winkel $d\vartheta$ für alle Stralen derselbe ist, so liegen die Punkte M' auf einem Kreise um CC', welcher den Winkel $CM'C' = d\vartheta$ als Peripheriewinkel fasst. Der Durchmesser dieses Kreises ist daher

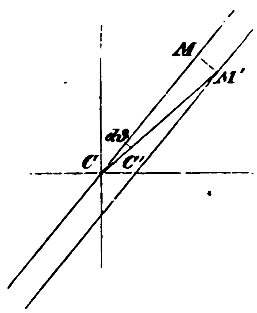

Fig. 185.

$$\frac{CC'}{d\vartheta} = \frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{u}{\omega}.$$

In der Grenze ist dieser Kreis der Ort der Punkte M. Die Punkte, wie M' liegen nur auf dieser Seite von CC' nach welcher hin die Rotation $d\vartheta$ nicht erfolgt. Der fragliche Ort ist daher der Wendekreis. Er enthält die Punkte des beweglichen Systems, welche für die durch ihn charakterisirte Lage derselben Wendepunkte ihrer Bahnen passiren.

Kehren wir die Bewegung um, so dass die Curve (C) über die Curve (Γ) als eine feste Curve hinrollt, so fällt der Wendekreis der neuen Bewegung auf die andere Seite der gemeinsamen Tangente von (C) und (Γ), hat übrigens denselben Durchmesser $\frac{u}{\omega}$

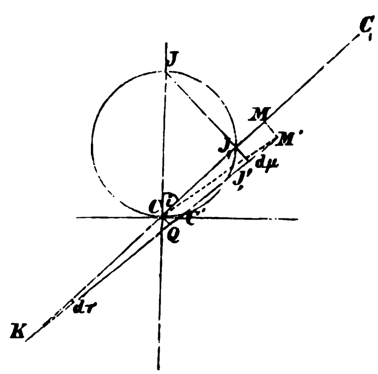

Fig. 186.

Es sei MM' (Fig. 186) das Bahnelement irgend eines Systempunktes M, J_1J_1' das Bahnelement des Punktes J_1, in welchem der Stral CM den Wendekreis trifft, so dass der Winkel $CJ_1'C' = d\vartheta$ ist. Liegt nun M ausserhalb des Wendekreises, aber auf der Seite der Tangente der Curve (C), wo dieser Kreis liegt, so ist der Winkel $CM'C'$, den wir mit $d\mu$ bezeichnen, kleiner als $d\vartheta$, da $d\vartheta$ Peripheriewinkel dieses Kreises ist. Daher schneiden sich die Normalen MC, $M'C'$ der Bahn von M jenseits C

in K auf der entgegengesetzten Seite der Tangente von (C) unter dem Contingenzwinkel $d\tau$, für welchen $d\tau = d\vartheta - d\mu$ ist. Für Punkte M innerhalb des Wendekreises ist $d\mu > d\vartheta$ und liegt der Schnittpunkt K der Normalen auf der Seite dieses Kreises, so dass $d\tau = d\mu - d\vartheta$. Liegt aber M auf der dem Wendekreise abgewandten Seite der Tangente von (C), so fällt der Normalendurchschnitt stets zwischen C und M und ist $d\tau = d\vartheta + d\mu$. Man erkennt hieraus, dass der Wendekreis nur auf derjenigen Seite liegen kann, für welche $d\tau = \pm (d\mu - d\vartheta')$ wird, da nur für Punkte auf ihr $d\tau$ verschwinden und also der Krümmungsmittelpunkt ins Unendliche rücken kann. Um den Krümmungshalbmesser MK zu bestimmen, sei i der Winkel, welchen CM mit der Normalen der Curve (C) bildet, und werde mit KC der unendlich kleine Kreisbogen CQ beschrieben. Man hat dann in allen Fällen

$$CK \,.\, d\tau = CC' \,.\, \cos i, \quad CM' \,.\, d\mu = CC' \,.\, \cos i, \quad \frac{1}{CJ} = \frac{d\vartheta}{CC'},$$

wo CJ der Durchmesser des Wendekreises ist. Entnehmen wir hieraus die Werthe von $d\tau$, $d\mu$, $d\vartheta$ und setzen sie in die Relationen

$$d\tau = d\vartheta - d\mu, \quad d\tau = d\mu - d\vartheta, \quad d\tau = d\vartheta + d\mu,$$

welche den verschiedenen Lagen des Punktes M entsprechen, ein, so kommt, wenn für CM' die gleichbedeutende Linie CM gesetzt wird, in diesen drei Fällen, der Ordnung nach:

$$\frac{1}{CJ} = \left(\frac{1}{CM} + \frac{1}{CK}\right) \cos i, \quad \frac{1}{CJ} = \left(\frac{1}{CM} - \frac{1}{CK}\right) \cos i,$$

$$\frac{1}{CJ} = \left(\frac{1}{CK} - \frac{1}{CM}\right) \cos i.$$

Man kann, indem man $CM = r$, $CK = r'$ setzt und r für Punkte M auf der Seite der Tangente von (C), wo der Wendekreis liegt, als positiv, für solche auf der entgegengesetzten Seite als negativ, r' aber als negativ für K auf der Seite des Wendekreises, als positiv für die andere Seite ansieht, diese drei Formeln in die eine vereinigen

$$\frac{1}{CJ} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos i.$$

So lange i denselben Werth hat, ist auch CJ dasselbe. Daher ist die Summe der reciproken Werthe der Abstände eines Punktes M und des Krümmungsmittelpunktes K seiner Bahn vom Momentancentrum C für die Punkte eines und desselben durch C gehenden Strales eine Constante.

Dividirt man die gefundene Relation mit $\cos i$ und bemerkt, dass

$CJ \cdot \cos i$ die Projection CJ_1 des Durchmessers des Wendekreises auf den Stral CM ist, so folgt, dass diese Constante der reciproke Werth der Projection des Durchmessers $\frac{u}{\omega}$ des Wendekreises auf den Stral ist. Man hat daher auch

$$\frac{1}{CJ_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Bezeichnet man mit ϱ jetzt den Krümmungshalbmesser der Bahn des Punktes M und berücksichtigt, dass in den oben unterschiedenen drei Fällen

$$r + r' = \varrho, \qquad r' - \varrho = r \qquad r' = r - \varrho$$
$$CJ_1 + MJ_1 = r, \quad CJ_1 = r + MJ_1, \quad CJ_1 = MJ_1 - r$$

ist, so folgt, indem man CJ_1 eliminirt

$$r^2 = MJ_1 \cdot \varrho \quad \text{oder} \quad r^2 = \frac{u}{\omega}\, \varrho \cos i,$$

wodurch der Krümmungshalbmesser des Punktes M als die dritte Proportionale zu seinem Abstande vom Momentancentrum C und dem Abstande der Projection J_1 des Wendepols J auf die Normale MC von M gefunden wird.

Sucht man den zu C in Bezug auf M symmetrisch liegenden Punkt C_1 auf der Normalen CM auf, so sind die vier Punkte C, C_1, J_1, K harmonisch und zwar ist der Krümmungsmittelpunkt K der Projection J_1 des Wendepols zugeordnet. Man erkennt dies aus vorstehender Gleichung in Verbindung mit der obigen Betrachtung über die Lage von K, woraus sich ergibt, dass die Punkte C, C_1 stets durch J und K getrennt werden.

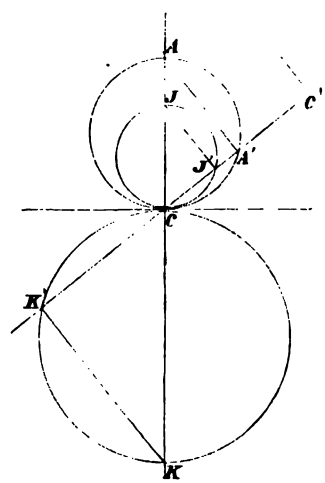

Fig. 187.

Nehmen wir auf der gemeinsamen Normalen der Curven (C), (Γ) einen Punkt A beliebig an (Fig. 187), und suchen den Krümmungsmittelpunkt K seiner Bahn, so sind die vier Punkte C, C_0, J, K harmonisch, wo C_0 in Bezug auf A symmetrisch zu C liegt. Ziehen wir durch C irgend einen Stral und projiciren die fünf Punkte A, C, C_0, J, K auf ihn, so sind von den Projectionen A', C, C', J', K' gleichfalls C, C', J', K' harmonisch und A' in der Mitte von CC'. Daher ist K' der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes A', d. h.:

Der Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines Systempunktes ist die Projection des Krümmungsmittelpunktes eines auf der gemeinschaftlichen Normalen der Curven (C), (Γ) gelegenen Punktes, dessen Projection der Systempunkt ist.

Oder, weil die Punkte A' alle auf einem über CA und die Punkte K' alle auf einem über CK als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen:

Die Krümmungsmittelpunkte aller Punkte eines die Curve (C) im Momentancentrum berührenden Kreises liegen auf einem zweiten, die Curve (C) gleichfalls in C berührenden Kreise. Die Lage und Grösse des zweiten Kreises ist dadurch bestimmt, dass er den Krümmungsmittelpunkt K des dem Momentancentrum auf dem ersten Kreise diametral gegenüberliegenden Punktes A enthält.

Man sieht leicht, dass der Krümmungsmittelpunkt der Curve (Γ) eine Bahn beschreibt, deren Krümmungsmittelpunkt in den Krümmungsmittelpunkt der Curve (C) der Momentancentra fällt. Denn die Normalen in C, C' schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte von (C); die Linie des Systems aber, welche nach der Elementarrotation in die Normale von C' eintritt, ist eine unendlich nahe Normale von (Γ), welche die gemeinschaftliche Normale in C im Krümmungsmittelpunkte von (Γ) schneidet. Dieser Krümmungsmittelpunkt beschreibt daher eine Bahn, für welche die Normalen in C und C' gleichfalls zwei aufeinanderfolgende Normalen sind, für welche also ihr Durchschnitt ebenfalls der Krümmungsmittelpunkt ist.

§. 13. Auf die Betrachtungen des vorigen §. kann man eine sehr einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes der Bahnen der Systempunkte gründen. Sie setzt nichts voraus, als die Kenntniss des Momentancentrums C und des Wendepoles J (Fig. 188).

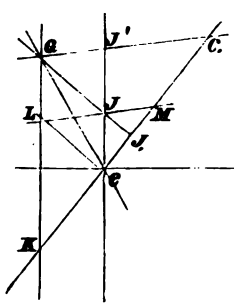

Fig. 188.

Trägt man nämlich CJ im Sinne CJ als JJ' nochmals auf, verbindet den gegebenen Systempunkt M, für dessen Bahn der Krümmungsmittelpunkt gesucht wird, mit J und legt durch J' eine Parallele zu JM, so erhält man auf dem Strale CM den Punkt C_1, welcher zu C in Bezug auf M symmetrisch liegt. Zieht man durch den Wendepol J die Gerade JJ_1, welche J rechtwinklig auf CM projicirt, so liefert JJ_1 auf $J'C_1$ einen Punkt G. Da nun J in der Mitte zwischen C und J' liegt, so sind C_1, J' das eine und J und der unendlich ferne Punkt auf CJ das andere Paar von vier harmonischen Punkten und sind daher die vier Stralen GC_1, GC, GJ und der zu CJ parallele Stral GL harmonisch und zwar sind GC, GC_1 das eine, GJ, GL das andere Paar zugeordneter

Stralen. Daher sind weiter C, C_1, J_1 und der Schnittpunkt K von GL mit CM harmonisch und ist also nach §. 12 K der Krümmungsmittelpunkt für die Bahn des Punktes M. Da $\angle CJL \cong \triangle JJ'G$ wird, so folgt CL parallel JJ_1' und kann man daher den Satz aufstellen:

Verbindet man den Systempunkt M (Fig. 189) mit dem Wendepol J durch eine Gerade und errichtet im Momentancentrum C auf die Normale CM des Punktes M ein Perpendikel CL, so trifft eine durch den Schnittpunkt L von MJ und dem Perpendikel zu CJ parallele Gerade die Normale CM in dem Krümmungsmittelpunkte K der Bahn des Systempunktes M.

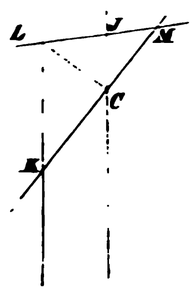

Fig. 189.

Je nach der Beschaffenheit der Bedingungen, welche die Bewegung des Systems bestimmen, ergibt sich der Wendepol auf eine mehr oder weniger einfache Weise. Sind die beiden Curven (C), (Γ) gegeben, welche aufeinander rollen, so findet sich der Durchmesser des Wendekreises und damit der Wendepol aus den Krümmungsradien beider Curven nach §. 12. Sind die Bahnen zweier Systempunkte A, B gegeben, so erhält man zunächst das Momentancentrum C für die fragliche Lage des Systems durch den Durchschnitt der Normalen dieser Curven in A und B und hat auf ihnen die Krümmungsmittelpunkte K_1, K_2 für diese Curven zu bestimmen. Indem man hierauf auf diesen Normalen die Punkte A_1, B_1 in den Richtungen CA, CB so annimmt, dass $AA_1 = AC$, $BB_1 = BC$ wird, liefern die vierten harmonischen Punkte zu C, A_1; K_1 und C, B_1; K_2 die Punkte J_1, J_2, welche die Projectionen des Wendepoles auf die Linien CA, CB sind. Errichtet man also in J_1, J_2 auf CA, CB Normalen, so ist ihr Durchschnitt der gesuchte Wendepol J des Systems.

Zur Auffindung des Wendepols kann oft der folgende Satz dienen:

Wenn ein Punkt des Systems eine Gerade beschreibt, so geht diese durch den Wendepol. Fällt man nämlich vom Momentancentrum C die Normale auf die Gerade, so bestimmt ihr Fusspunkt die Lage M des beschreibenden Punktes für die durch das Momentancentrum charakterisirte Lage des Systems. Verlängert man CM um $MC_1 = CM$, so müssen der Krümmungsmittelpunkt und die Projection J_1 des Wendepols auf die Normale CM die Strecke CC_1 harmonisch theilen. Da aber der Krümmungsmittelpunkt der Geraden im Unendlichen liegt, so fällt J_1 in die Mitte M von CC_1. Die Gerade, welche M beschreibt, projicirt also selbst den Wendepol auf die Normale CM und geht mithin durch den Wendepol.

Der beschreibende Punkt gehört dem Wendekreis an.

§. 14. Beispiele.

1. Krümmungsmittelpunkt der Ellipsen, welche die Systempunkte bei der elliptischen Hypocycloïdenbewegung (S. 227) beschreiben. Da die beiden Punkte A und B zwei gerade Linien beschreiben (Fig. 190), so geht jede dieser Geraden durch den Wendepol dieser ist also ihr Schnittpunkt O. Das Perpendikel auf die Verbindungslinie des Systempunktes M mit dem Momentancentrum C, in C errichtet, trifft OM in L; eine Parallele durch L mit OC liefert den Krümmungsmittelpunkt K.

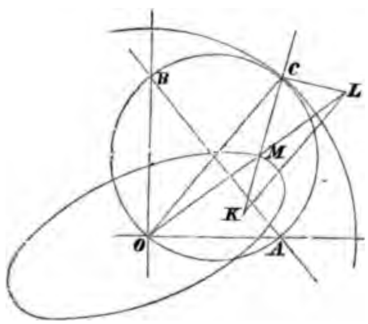

Fig. 190.

2. Krümmungsmittelpunkt der Curven der Schleifenbewegung (S. 233). Zwei Punkte A, B des Systems beschreiben Kreise, man suche also auf den Normalen dieser Kreise die Punkte J' und errichte in ihnen Perpendikel auf sie, so schneiden sich dieselben im Wendepole u. s. w.

3. Krümmungsmittelpunkt der Cycloïden. Der Mittelpunkt des rollenden Kreises beschreibt eine Gerade parallel der Basis der Cycloïde, mithin geht diese durch den Wendepol und da der Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der Basis das Momentancentrum C ist und der Wendepol in der gemeinschaftlichen Normale beider Linien liegt, so fällt er mit dem Mittelpunkte des rollenden Kreises selbst zusammen. Ein Perpendikel vom Wendepole auf die Normale des beschreibenden Punktes M liefert J' und indem man zu C den Punkt C_1 bestimmt und die vier harmonischen Punkte C_1, C; J', K näher untersucht, für welche $J'C_1 : JC = 3 : 1$ ist, so folgt, dass $CK = CM$ sein muss, wie bekannt. Der Wendekreis behält während der ganzen Bewegung des Systems dieselbe Grösse und relative Lage gegen die Basis. Von allen Cycloïden, welche die verschiedenen Punkte des Systems beschreiben, haben nur diejenigen Wendepunkte, welche von Punkten auf seinem Umfange beschrieben werden.

4. Es sei L eine Gerade des beweglichen Systems, L, L', L'' drei aufeinanderfolgende Lagen derselben. Die Punkte A von L bilden in ihren homologen Lagen A, A', A'' drei projectivische (congruente) Reihen auf L, L', L''. Die Normalen der Bahnen AA' laufen sämmtlich durch das Momentancentrum C und bilden einen Stralenbüschel C, projectivische mit der Punktreihe A in projectivischer Lage; die Normalen der Bahnen $A'A''$ laufen ebenso durch das folgende Momentancentrum C' hindurch und bilden einen zweiten Stralenbüschel C', projectivisch mit der Punktreihe A'. Da die Punktreihen A und A' unter sich perspectivisch sind, so sind es auch die Büschel C, C' und erzeugen diese mithin durch die Durchschnitte K der homologen Stralenpaare AC, $A'C'$ einen Kegelschnitt, welcher durch C, C' hindurchgeht, d. h. die Curve (C) in C berührt. Dieser Kegelschnitt ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen aller Punkte der Geraden L, entsprechend der bestimmten Lage von L. Derselbe kann hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sein; denn die ihn erzeugenden Büschel haben gleichartige Lage. Schneidet die Gerade L den Wendekreis ihrer Lage in zwei Punkten, so sind diese Wendepunkte ihrer Bahnen und fällt ihr Krümmungsmittelpunkt ins Unendliche. In diesem Falle ist der Kegelschnitt hyperbolisch, weil er diese beiden unendlich fernen Punkte enthalten muss. Berührt L den Wende-

kreis, so wird der Kegelschnitt eine Parabel; hat L nichts mit dem Wendekreis gemein, so ist er eine Ellipse. Daher:

Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen, welche die Punkte einer Geraden L des Systems beschreiben, ist ein Kegelschnitt, welcher die Curve der Momentancentra berührt; derselbe ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem L mit dem Wendekreise zwei, einen oder keinen Punkt gemein hat.

§. 15. Man kann leicht die Krümmungsverhältnisse der Curven ermitteln, welche Enveloppen von irgend welchen Curven des beweglichen Systems sind. Es seien (Fig. 191) c, c' zwei aufeinanderfolgende Lagen einer Curve des beweglichen Systems. Von dem Momentancentrum C, entsprechend der Lage c, fällen wir auf c die Normale CM; ebenso von dem folgenden Momentancentrum C' auf c' die Normale $C'M'$. Die Curve c berührt die Enveloppe in M und hat mit ihr die Normale CM gemein; gleiches gilt von c' in Bezug auf M'. Daher sind CM, $C'M'$ zwei aufeinanderfolgende Normalen der Enveloppe der beweglichen Curve c und mithin ist deren Schnittpunkt K ihr Krümmungsmittelpunkt für den Punkt M. Suchen wir nun die erste Lage der Normalen $C'M'$ auf, so ist sie eine Normale von c in einem dem Punkte M unendlich nahen Punkte m und schneidet daher CM in dem Krümmungsmittelpunkte k der beweglichen Curve c entsprechend den Punkt M, mit welchem sie die Enveloppe berührt. Diese Normale mk geht aber durch die Elementarrotation des Systems in die Normale $C'M'$ über und dabei beschreibt der Punkt k ein Bogenelement kk' seiner Bahn. Da nun die Geraden, welche durch das Momentancentrum gehen, Normalen sind für die Bahnen ihrer sämmtlichen Punkte, so folgt, dass Ck, $C'k'$ zwei aufeinanderfolgende Normalen der Curve sind, welche der Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Curve beschreibt und da sie sich in dem Punkte K schneiden, so ergibt sich der Satz:

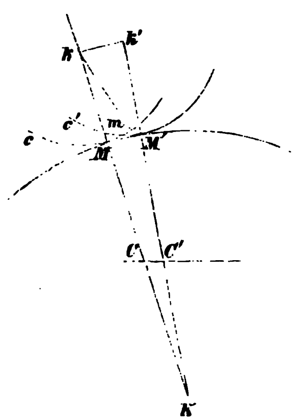

Fig. 191.

Der Krümmungsmittelpunkt K der Enveloppe (M), welche von einer Curve c des beweglichen Systems erzeugt wird, in dem Punkte, in welchem c ihre Enveloppe berührt, ist identisch mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, welche der Krümmungsmittelpunkt k der beweglichen Curve selbst bei der Bewegung des Systems beschreibt.

Durch diesen Satz kann also die Untersuchung der Krümmung der Enveloppen auf die Untersuchung der Krümmung der Punktcurven zurückgeführt werden. Wenden wir denselben auf die Enveloppe einer Geraden an. Der Krümmungsmittelpunkt der Geraden beschreibt eine unendlich ferne Curve; der Punkt C_1, welcher in Bezug auf ihn mit C auf der Normalen symmetrisch liegt, ist daher gleichfalls unendlich fern, C und C_1 müssen aber die Entfernung $J_1 K$ harmonisch theilen, daher muss C in der Mitte von $J_1 K$ liegen. Daher liegt der Krümmungsmittelpunkt K jener unendlich fernen Curve und damit auch der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe der Geraden für den Punkt, in welchem sie diese letztere berührt, auf einem zu dem Wendekreise gegen die Tangente der Curve (C) symmetrisch liegenden Kreise. Da dasselbe von den Enveloppen sämmtlicher Geraden des Systems gilt, so haben wir den Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen, welche die Geraden eines beweglichen Systems erzeugen, liegen für eine gegebene Lage des Systems sämmtlich auf einem Kreise, welcher die Curve der Momentancentra in dem der betreffenden Lage des Systems entsprechenden Momentancentrum berührt und mit dem Wendekreise dieser Lage von gleicher Grösse ist, aber mit ihm auf entgegengesetzten Seiten der Tangente der Curve der Momentancentra liegt (Wendekreis der umgekehrten Bewegung).

Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes auch direct, wenn man bedenkt, dass die Normalen, welche man von C und C' auf die beiden aufeinanderfolgenden Lagen der beweglichen Geraden fällt, mit einander den Winkel $d\vartheta$ der Elementarrotation des Systems bilden und dass dieser für alle Geraden derselbe ist, woraus folgt, dass die Schnittpunkte der verschiedenen Normalenpaare, welche verschiedenen Geraden entsprechen, auf einem Kreise liegen müssen, welcher den Winkel $d\vartheta$ als Peripheriewinkel fasst. Die nämliche Eigenschaft hat aber der Wendekreis u. s. w.

Aus dem vorstehenden Satze folgt:

Wenn eine Curve des beweglichen Systems fortwährend eine feste Curve berührt, so dass also die gemeinschaftliche Normale beider das Momentancentrum C enthält, und man bestimmt auf dieser Normalen den Punkt K_1', so dass der Abstand $K'K_1'$ dieses Punktes vom Krümmungsmittelpunkte K' der beweglichen Curve gleich dem Abstande CK' des Momentancentrums von K' wird, so ist der vierte harmonische Punkt J_1 zu C, K_1' und dem Krümmungsmittelpunkte K der festen Curve die Projection des Wendepoles J auf die gemeinsame Normale. Denn der Krümmungsmittelpunkt K fällt mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn zusammen, welche K' beschreibt, indem die feste Curve die Enveloppe der beweglichen ist.

Als Specialitäten dieses Satzes ergeben sich folgende:

Wenn eine Gerade fortwährend eine feste Curve berührt, so liegt C in der Mitte zwischen K und J_1. Denn K_1' und C theilen KJ_1 harmonisch, aber K_1' liegt im Unendlichen.

Wenn eine Curve des Systems fortwährend eine feste Gerade berührt, so fällt J_1 in den Krümmungsmittelpunkt K' der Curve. Denn K liegt im Unendlichen, also J_1 in der Mitte zwischen C und K_1', d. h. in K'.

Wenn die feste Curve sich auf einen Punkt reducirt, also eine Curve des Systems fortwährend durch einen festen Punkt geht, so ist J_1 vierter harmonischer Punkt zum festen Punkte, dem Momentancentrum und zu K_1'. Denn K fällt in den festen Punkt.

Wenn eine Gerade fortwährend durch einen festen Punkt geht, so liegt das Momentancentrum in der Mitte zwischen J_1 und dem festen Punkte. Der feste Punkt gehört dem Wendekreis der umgekehrten Bewegung an.

Anwendung des letzten Satzes behufs Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Curven der Conchoidenbewegung (Fig. 97, S. 237). Die Gerade, welche der Punkt B beschreibt, geht durch den Wendepol J (§. 12) und B liegt auf dem Wendekreise. Da OB sich um O dreht, so liegt das Momentancentrum C in der Mitte zwischen O und J_1. Der Wendekreis geht stets durch J_1 und C; er kann also mit Hülfe von drei Punkten construirt werden. Die feste Gerade g bestimmt auf ihm den Wendepol u. s. w.

§. 16. Man sieht leicht, dass die Sätze des §. 12 auf die Krümmungshalbmesser der Enveloppen ausgedehnt werden können.

Die Winkelgeschwindigkeit ω um das Momentancentrum C (s. Fig. 191) können wir zerlegen in zwei Winkelgeschwindigkeiten ω' und ω'' um die Krümmungsmittelpunkte k, K der beweglichen Curve c und ihrer Enveloppe (M). Dann ist $\omega = \omega' + \omega''$ und wenn $Ck = r$, $CK = r'$ gesetzt wird, $r\omega' dt = r'\omega'' dt = d\sigma \,.\, \cos i$ oder $r\omega' = r'\omega'' = u \cos i$. Indem man ω', ω'' eliminirt, folgt $\frac{\omega}{u \cos i} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ oder da $\frac{u}{\omega} \cos i = CJ_1$ ist.

$$\frac{1}{CJ_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Es ist also die Summe der reciproken Werthe der Abstände der Krümmungsmittelpunkte einer Curve des beweglichen Systems und ihrer Enveloppe vom Momentancentrum C für denselben zu beiden Curven normalen Stral von C constant. Indem man mit $\cos i$ multiplicirt, ergibt sich

$$\frac{1}{CJ} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \cos i$$

d. h. für alle Stralen des Momentancentrums, normal zu irgend welchen Paaren von einhüllenden und umhüllenden Curven ist

$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\cos i$ constant, nämlich gleich dem reciproken Werthe des Durchmessers des Wendekreises. Da die Curven (Γ), (C) ein solches Paar bilden, wofür $i = 0$ ist, so wird

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\cos i = \frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'},$$

welche Gleichung den Namen des Savary'schen Satzes führt.

Bezeichnet man den Abstand der Krümmungsmittelpunkte k, K mit ϱ, d. h. setzt $r + r' = \varrho$ und bedenkt, dass $CJ_1 + J_1k = r$, so gibt die Elimination von CJ_1 die Gleichung

$$r^2 = J_1k\,.\,\varrho,$$

welche den Punkt K bestimmt. Sie enthält die analoge Gleichung §. 12 für den Fall, dass die bewegliche Curve sich auf einen Punkt reducirt, welcher alsdann mit k zusammenfällt. Sie liefert zugleich den Beweis des Hauptsatzes von §. 15. Auch überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit derselben für die verschiedenen Fälle, welche durch die Vorzeichen von r, r' hervorgerufen werden. Lässt man die Enveloppe sich auf einen Punkt reduciren, so fällt derselbe mit K zusammen. Kehrt man die Bewegung um, so lassen sich andere leichte Folgerungen ziehen u. s. w.

§. 17. Wir wollen noch die Beziehungen der Geschwindigkeiten der Systempunkte zum Wendepunkte entwickeln. Die Geschwindigkeit eines Punktes M im Abstande CM vom Momentancentrum C ist $v = \omega\,.\,CM$. Nun ist aber der Durchmesser des Wendekreises $CJ = u : \omega$. Daher also

$$v = u \cdot \frac{CM}{CJ}.$$

Für die Punkte des Wendekreises ist $CM = CJ\,.\cos i$, also $v = u \cos i$. Für den Wendepol ist $i = 0$, also $v = u$ d. h. die Geschwindigkeit des Wendepols ist gleich der Wechselgeschwindigkeit u des Systems und da die Richtungen der Geschwindigkeiten eines Punktes des Wendekreises und des Wendepols den Winkel i mit einander bilden, so ist die Geschwindigkeit eines Punktes des Wendekreises die Projection der Wechselgeschwindigkeit u auf die Tangente seiner Bahn.

§. 18. Alle Punkte des Systems, welche dem Wendekreise angehören passiren die Wendepunkte ihrer Bahnen, und beschreiben folglich zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente, welche in dieselbe Gerade, die Wendetangente, fallen. Der Wendekreis, welcher der Zeit t entspricht, wird von dem Wendekreise, entsprechend der Zeit $t + dt$ in zwei Punkten geschnitten. Jeder dieser beiden Punkte beschreibt also, weil er dem ersten Kreise angehört, während des ersten und zweiten auf t folgenden Zeitelementes zwei Bogenelemente, welche in dieselbe Gerade fallen, während des zweiten und dritten Zeitelementes ebenfalls zwei solche. Es ist also ein Punkt, welcher drei aufeinanderfolgende in dieselbe Gerade fallende Bogenelemente durchläuft. Die aufeinanderfolgenden Wendekreise erzeugen eine Enveloppe und die beiden Schnittpunkte sind die Berührungspunkte des Wendekreises mit der Enveloppe. Daher der Satz:

Für jede Lage des beweglichen Systems gibt es zwei Punkte desselben, welche drei aufeinanderfolgende Elemente derselben Geraden beschreiben. Sie sind die Berührungspunkte des Wendekreises mit der Enveloppe aller Wendekreise und die Geraden, welche die drei Bogenelemente enthalten, sind die beiden Tangenten der Enveloppe in den genannten Berührungspunkten. Auf diesen Satz machte zuerst aufmerksam: Ball, Notes on applied Mechanics. (Proceed. of the R. Irish. Acad. Vol. I, Ser. II., p. 243; 1871).

§. 19. Der Mittelpunkt G der Beschleunigungen wechselt im Allgemeinen von Moment zu Moment und zwar sowohl in der festen Ebene, als auch im System, sodass jeden Augenblick ein anderer Systempunkt in denselben eintritt und immer an einer anderen Stelle. Der Ort der Beschleunigungsmittelpunkte bildet in der festen Ebene eine Curve, die Punkte des Systems, welche in ihn eintreten, im System eine andere Curve, beide stehen aber nicht in einer ähnlichen Beziehung zu einander, wie die Curven (C) und (Γ); im Allgemeinen berühren sie einander nicht.

Für $u = 0$ fällt G mit C zusammen, weil in diesem Falle zwei Zeitelemente hindurch die Bewegung des Systems eine Rotation um dasselbe Centrum und mithin die Beschleunigung die dieser Rotation entsprechende ist.

Für $\omega = 0$ findet dasselbe statt, nur kann in diesem Falle blos von einer Grenzlage des Momentancentrums die Rede sein.

Rückt das Beschleunigungscentrum ins Unendliche, so werden die Beschleunigungen aller Systempunkte geometrisch gleich. Man kann die Beschleunigung in diesem Falle eine Translationsbeschleunigung nennen, darf daraus aber nicht etwa auf eine Translationsbewegung schliessen, denn diese hängt von der Gleichheit und dem Parallelismus der Geschwindigkeiten ab. Im Gegensatze hierzu dürfte es nicht unzweckmässig sein, die Beschleunigung des Systems bei einem Beschleunigungsmittelpunkte G in endlicher Entfernung eine Rotationsbeschleunigung um diesen Punkt zu nennen.

§. 20. Durch den Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten und die Grösse und den Sinn der Winkelgeschwindigkeit ω zur Zeit t ist der Geschwindigkeitszustand des unveränderlichen ebenen in einer Ebene beweglichen Systems für diese Zeit bestimmt. Kommen zu diesen Elementen noch deren Aenderungselemente, nämlich die Grösse und der Sinn der Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ und die Grösse, Richtung und der Sinn der Wechselgeschwindigkeit u jenes Mittelpunktes C, so folgt daraus der Beschleunigungszustand zu derselben Zeit t, nämlich der Mittelpunkt G der Beschleunigungen und die Beschleunigung aller Systempunkte. Man kann nun eine Reihe umgekehrter Probleme bezeichnen, welche verlangen, aus der Grösse, dem Verhältniss, der Richtung oder andern Bedingungen der Beschleunigung einzelner Systempunkte den Mittelpunkt der Beschleunigungen, die Winkelgeschwindigkeit, die Winkelbeschleunigung und die Elemente des Geschwindigkeitszustandes zu bestimmen. Einzelne derselben wollen wir behandeln.

Es seien die Richtungen, der Sinn und das Verhältniss k der Beschleunigungen φ_a, φ_b zweier bestimmter Systempunkte A, B gegeben. Da die Richtungen von φ_a, φ_b mit den Stralen AG, BG, welche die Punkte A, B mit dem Mittelpunkte G der Beschleunigungen verbinden, gleiche Winkel nach derselben Seite hingewandt bilden, so folgt, dass A, B und der Schnittpunkt D der beiden Beschleunigungsrichtungen mit dem Beschleunigungsmittelpunkte G auf ein und demselben, nämlich dem dem Dreiecke ABD umschriebenen Kreise liegen (s. §. 9.). Da ferner die Beschleunigungen der Systempunkte ihrem Abstande vom Beschleunigungsmittelpunkte proportional sind, so ist $GA : GB = k$ und liegt mithin G auf einem zweiten Kreise, dessen Mittelpunkt der Verbindungslinie AB der gegebenen Punkte angehört und welcher die Strecke AB nach dem Verhältniss k harmonisch theilt. Von den beiden Schnittpunkten dieser Kreise ist aber nur einer Beschleunigungsmittelpunkt. Welcher von beiden dies ist, entscheidet sich durch den Sinn der Beschleunigungen, der bei allen Systempunkten nach derselben Seite der Stralen gewandt ist, welche von G nach ihnen hinlaufen. Hiemit ist die Aufgabe gelöst:

Aus dem Verhältnisse, den Richtungen und dem Sinne der Beschleunigung irgend zweier Systempunkte den Mittelpunkt der Beschleunigungen, die Richtung und den Sinn, sowie die Grössenverhältnisse der Beschleunigungen aller Systempunkte zu finden.

Sind die Beschleunigungen der beiden Systempunkte A und B parallel, so wird der Kreis um ABD unendlich gross und geht in die Gerade AB über. Fallen dabei die Beschleunigungen dem Sinne nach auf dieselbe Seite von AB, so liegt der Beschleunigungsmittelpunkt auf dieser Geraden ausserhalb AB, fallen sie auf entgegengesetzte Seiten, zwischen A und B. Sind die Beschleunigungen parallel und gleich, so wird der zweite der obigen Kreise ebenfalls unendlich gross und fällt G ins Unendliche, wenn die Beschleunigungen dem Sinne nach auf dieselbe, in die Mitte zwischen A und B, wenn sie auf entgegengesetzte Seite fallen. Im letzteren Falle ist der Schnittpunkt beider unendlich grosser Kreise nur dann Beschleunigungsmittelpunkt, wenn der Winkel, welchen die Beschleunigungsrichtungen mit AB bilden, $\leqq \frac{1}{2}\pi$ ist. Sonst existirt überhaupt kein solcher Mittelpunkt. Zwei entgegengesetzt gleiche Beschleunigungen, welche längs AB nach dem Innern der Strecke AB gerichtet sind, sind als Grenzlage zweier auf entgegengesetzte Seite von AB fallenden Beschleunigungen anzusehen und liegt der Beschleunigungsmittelpunkt für diesen Fall in der Mitte von AB. Zwei entgegengesetzt gleiche Beschleunigungen, welche nach den Aussenstralen gerichtet sind, liefern keinen Beschleunigungsmittelpunkt.

Fügt man den oben gegebenen Elementen die Lage des Mittelpunktes C der Geschwindigkeiten hinzu, so ist die Normale und die Tangente der Curve (C) bestimmt, denn die Richtung der Beschleunigung des Punktes C fällt mit der Normalen zusammen. Da die Richtung der Beschleunigung der Systempunkte gefunden ist, und sie mit den Stralen des Beschleunigungsmittelpunktes den Winkel λ bildet, dessen Tangente $\operatorname{tg}\lambda = \alpha : \omega^2$ ist, so ist auch dies Verhältniss bekannt. Ziehen wir nach irgend einem Systempunkte, z. B. nach A, den Stral CA und tragen an diesen den Winkel λ bei A in derselben Weise an, wie der Winkel GAD gegen den Stral GA liegt und ziehen durch A eine Gerade in der Richtung der Normalen der Curve (C), so würde die Beschleunigung φ_a des Punktes A, wenn sie der Grösse nach bekannt wäre, nach dem Schenkel jenes Winkels, der nicht in CA fällt, und der Richtung der Normalen in zwei Componenten zerlegt werden können, von denen die erste $CA \,.\, \vartheta$, die letztere ωu sein müsste (§. 3.). Das Verhältniss derselben, was aber durch Richtung und Sinn von φ_a bestimmt ist, ist damit bekannt, und wenn dasselbe mit n bezeichnet wird, so hat man $CA \,.\, \vartheta : \omega u = n$, woraus $\frac{u}{\omega}$ folgt. $\frac{u}{\omega}$ ist aber der Durchmesser des Wendekreises, welcher demnach gleichfalls construirt werden kann. Hiemit ist aber weiter auch der Mittelpunkt H der Winkelbeschleunigung bekannt, denn eine Gerade durch den Wendepol und den Mittelpunkt der Beschleunigungen bezeichnet ihn auf der Tangente der Curve (C).

Hieraus ergibt sich:

Aus Richtung, Sinn und dem Grössenverhältniss der Beschleunigung zweier Systempunkte, sowie der Lage des Mittelpunktes der Geschwindigkeiten können die Verhältnisse der Beschleunigungen aller Systempunkte, die Lage der Tangente und Normalen der Curve (C) und das Verhältniss der Wechselgeschwindigkeit des Mittelpunktes der Geschwindigkeiten zur Winkelgeschwindigkeit gefunden werden.

Sind gegeben der Mittelpunkt G der Beschleunigung und der Wendepol J, so ist der Mittelpunkt der Geschwindigkeiten auf die Senkrechte beschränkt, welche in G auf GJ errichtet werden kann. Kommt hiezu noch die Grösse des Winkels λ, d. h. das Verhältniss $\alpha : \omega^2$, so ergeben sich zwei Punkte für C.

Einige Literatur zur Beschleunigung der ebenen Bewegung.

Die Entwickelung der Beschleunigungstheorie für das ebene System hängt aufs Engste mit der Entwickelung der Methoden für die Bestimmung des Krümmungshalbmessers ebener Curven zusammen. A. Transon gab 1844 im Institut, p. 573 und später in Liouville, Journ. de mathém. T. X, p. 148 (1845) in einer Abhandlung: „Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes" eine Methode, um die Krümmungshalbmesser der Rouletten zu finden. Chasles fügte dieser Arbeit eine Note bei und erweiterte in demselben Bande die Transon'sche Construction für die Enveloppen (Construction du rayon de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan. Liouville, Journ. de math. T. X, p. 204). Stegmann gab in Grunert's Archiv eine gehaltvolle Ableitung der Transon'schen Methode (Th. VII, S. 48; 1846), zu der er sich der Construction einer Cycloïde bedient, welche mit der gegebenen Curve denselben Krümmungsmittelpunkt hat. Der Radius des Wälzungskreises dieser Cycloïde ist der Durchmesser $u : \omega$ des Wendekreises.

Tiefer gehende Untersuchungen über die Beschleunigung und deren Zusammenhang mit der Krümmung der Bahnen publicirte 1853 Bresse (Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans et sur l'application de la cinématique à la détermination du rayon de courbure. Journ. de l'école polyt. T. XX, (Cah. 35), p. 89). In seiner Abhandlung theilt er einige gleichzeitige Arbeiten von Arnoux und Rivals über denselben Gegenstand mit. Dieselbe entwickelt zum ersten Male die Bedeutung des Tangentialkreises, des Wendekreises und des Beschleunigungsmittelpunktes. 1862 gab Resal in seiner Cinématique pure eine ausführliche analytische Theorie der Beschleunigungen im ebenen Systeme, welcher sich die Darstellung des Verfassers dieses Buches in der 1. Auflage anschloss, die er aber jetzt durch eine andere mehr synthetischen Charakters ersetzt hat, welche von ihm zuerst in Schlömilchs Zeitschrift f. Methematik und Physik, Bd. XIX, S. 185 publicirt wurde. Von besonderer Wichtigkeit sind noch:

Mannheim, Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan (Journ. de l'école polytechn. T. XXI (Cah. 37), p. 177).

Nicolaïdès, Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan. Paris et Athènes 1863 et 1869, sowie verschiedene Abhandlungen in seinen Analectes ou Série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques. Athènes 1871 — . . .

Lamarle, Théorie géométrique des rayons et centres de courbure. Bullet. de l'Académie de Bruxelles T. II (1857), pp. 33, 307, 528; T. III (1857), p. 295;

T. V. (1858), p. 5; T. VI. (1859), p. 11. Hiezu noch: Théorie des centres et axes instantanés de rotation, Bullet. T. V, p. 340; T. VI. pp. 23, 412; T. VII, p. 7.

Chelini, Dei moti geometrici e loro leggi nello spostamento di una figura di forma invariabile. (Memorie dell' Accademia di Bologna. Ser. II, Vol. I, p. 66 (1862)).

Gilbert, Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans. (Mém. cour. de l'Acad. de Bruxelles. T. XXX, p. 1. (1861.)

Dahlander, Geometrisk theori för accelerationen vid en plan figurs förflyttning i dess plan. (Öfversigt at Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1868. Nr. 2.)

Aronhold, kinematische Mittheilungen. (Verhandlungen des Vereins z. Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen. Berlin 1872.)

Rittershaus, kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung. (Hartig's Civilingenieur, B. XXIV, p. 1 u. ffg.)

XIV. Capitel.

Beschleunigung der sphärischen Bewegung.

§. 1. Für die sphärische Bewegung eines unveränderlichen Systems seien ω und $\omega + d\omega$ die Winkelgeschwindigkeiten, entsprechend den Zeiten t und $t + dt$, mit welchen dasselbe in den beiden auf die Zeit t folgenden Zeitelementen um die sich im Punkte O schneidenden Axen c und c' rotirt (Fig. 192). Nach dem Satze vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$, mit welcher das System während des zweiten Zeitelementes um die Axe c' rotirt, aequivalent einer Winkelgeschwindigkeit gleich ω um die Axe c in Verbindung mit einer Winkelgeschwindigkeit $d\varpi$ um eine in die Ebene beider Axen fallende, durch O hindurchgehende Axe h. Diese Winkelgeschwindigkeit $d\varpi$ ist wegen des unendlich kleinen Winkels $d\sigma$, den die Axen c, c' mit einander bilden, eine unendlich kleine Grösse. Die Bewegung des Systems während der beiden Zeitelemente ist hienach aequivalent einer Rotation um die Axe c beide Zeitelemente hindurch mit der Winkelgeschwindigkeit ω, zu welcher für das zweite Zeitelement eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $d\varpi$ um die Axe h hinzutritt. Da die Systempunkte in der Einheit der Entfernung von c zwei Zeitelemente hindurch unveränderliche Geschwindigkeit ω um diese Axe besitzen, so erlangen sie durch die Rotation um c keine tangentiale, sondern blos centripetale Beschleunigung von der Grösse ω^2, deren Richtung die Axe c rechtwinklig schneidet und ihrem Sinne nach dieser Axe zugewandt ist.

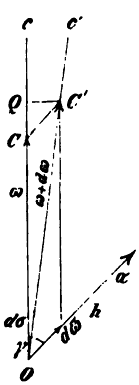

Fig. 192.

Vermöge der Rotation um die Axe h erlangen die Punkte in der Einheit der Entfernung von dieser Axe die unendlich kleine Geschwindigkeit $d\varpi$, senkrecht zu den Ebenen, welche durch sie und die Axe h gehen. Diese unendlich kleine Winkelgeschwindigkeit $d\varpi$, welche zu der Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe c hinzutritt, um die Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$ um die Axe c' zu bilden, heisst die Elementarwinkelbeschleunigung des Systems zur Zeit t und h ihre Axe; dieselbe Grösse aber, dividirt durch das Zeitelement dt, nämlich die endliche Grösse $\alpha = \frac{d\varpi}{dt}$ die Winkelbeschleunigung des Systems zur Zeit t und h auch ihre Axe. Wir tragen die Winkelbeschleunigung α auf ihrer Axe h gleichfalls als Länge auf und bezeichnen durch die Pfeilspitze an ihrem Ende deren Sinn, welcher der Sinn der Elementarwinkelbeschleunigung $d\varpi = \alpha dt$ ist. Es ist die Elementarwinkelbeschleunigung das geometrische Differential und die Winkelbeschleunigung die geometrische Derivirte der Winkelgeschwindigkeit.

Die Lage der Axe h der Winkelbeschleunigung in der Ebene (cc') ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{\sin cc'}{d\varpi} = \frac{\sin c'h}{\omega} = \frac{\sin ch}{\omega + d\omega};$$

dieselbe liefert nach gehöriger Reduction für den Winkel $\gamma = (ch)$

$$\sin \gamma = \omega \frac{d\sigma}{d\varpi}.$$

Mit Hülfe der Wechselgeschwindigkeit $\psi = \frac{d\sigma}{dt}$ der Momentanaxe c und der Definitionsgleichung $\alpha = \frac{d\varpi}{dt}$ der Winkelbeschleunigung geht diese Gleichung über in:

$$\sin \gamma = \frac{\omega\psi}{\alpha}.$$

Aus dem unendlich kleinen Dreiecke $CC'Q$, welches wir erhalten, indem wir von dem Endpunkte C' der Länge $OC' = \omega + d\omega$ ein Perpendikel $C'Q$ auf die Axe c fällen und dessen Seiten

$$CC' = d\varpi, \quad CQ = d\omega, \quad C'Q = (\omega + d\omega)\, d\sigma$$

sind, während sein Winkel $C'CQ = \gamma$ ist, entnehmen wir die beiden weitern Formeln

$$\cos \gamma = \frac{d\omega}{d\varpi}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \omega \frac{d\sigma}{d\omega},$$

welche auch in der Form

$$\cos\gamma = \frac{\omega'}{\alpha}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega\psi}{\omega'}$$

geschrieben werden können, wenn $\frac{d\omega}{dt} = \omega'$ gesetzt wird.

Die beiden Ausdrücke für $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ liefern uns für die Grösse α der Winkelbeschleunigung die Gleichung:

$$\alpha^2 = \omega'^2 + \omega^2\psi^2.$$

Um die Bedeutung der beiden Glieder ω' und $\omega\psi$ zu erkennen, aus deren Quadraten das Quadrat der Winkelbeschleunigung α sich zusammensetzt, wollen wir auf einem etwas anderen Wege zu dieser Formel zu gelangen suchen. Zu dem Ende ertheilen wir dem System im zweiten Zeitelemente zu der Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$, mit welcher es während dieses Zeitelementes um die Axe c' rotirt, die beiden entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten $\omega + d\omega$ und $-(\omega + d\omega)$ um die Axe c (Fig. 193). Wir können dann den Vorgang der Bewegung während der beiden auf t folgenden Zeitelemente so auffassen, dass wir annehmen, dasselbe rotire während beider Zeitelemente um die Axe c, während des ersten mit der Winkelgeschwindigkeit ω, während des zweiten mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$, besitze aber ausserdem während des zweiten Zeitelementes noch die beiden Winkelgeschwindigkeiten $\omega + d\omega$ um c' und $-(\omega + d\omega)$ um c. Vermöge der Rotation um c erlangen die Systempunkte in der Einheit der Entfernung von dieser Axe die centripetale Beschleunigung ω^2 und die tangentiale ω', erstere senkrecht zur Axe c, letztere senkrecht zu den Ebenen, welche sie mit dieser Axe verbinden. Jene beiden noch übrigen Winkelgeschwindigkeiten $\omega + d\omega$ um c' und $-(\omega + d\omega)$ um c sind zusammen aequivalent einer

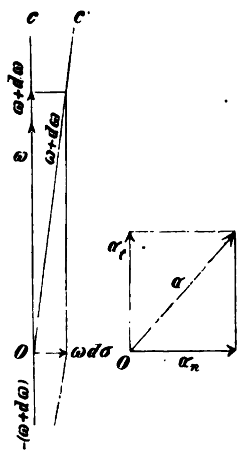

Fig. 193.

unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeit um die Halbirungslinie des Nebenwinkels von dem Winkel $d\sigma$, den die Axen c, c' mit einander bilden oder was dasselbe ist, um die Normale n zur Momentanaxe c, welche in der Ebene des Winkels $d\sigma$ durch den Punkt O hindurch gelegt werden kann. Die Grösse dieser Winkelgeschwindigkeit ist $(\omega + d\omega)\sin d\sigma$ oder abgekürzt $\omega d\sigma$. Sie verleiht dem System die Beschleunigung $\omega\frac{d\sigma}{dt} = \omega\psi$ um die Axe n.

Die beiden Beschleunigungen ω' um c und $\omega\psi$ um n sind zusammen aequivalent der Winkelbeschleunigung α und da sie zu einander rechtwinklich sind, so geht aus ihnen α mit Hülfe eines Rechtecks und der Formel

$\alpha^2 = \omega'^2 + \omega^2\psi^2$ hervor. Sie führen die Namen der tangentialen und normalen Componente der Winkelbeschleunigung. Wir bezeichnen sie mit α_t und α_n, so dass also

$$\alpha_t = \omega', \quad \alpha_n = \omega\psi$$

ist, und tragen sie als Länge nach Grösse und Sinn auf ihren Axen c und n auf. Die erstere ertheilt der Winkelgeschwindigkeit ω die unendlich kleine Aenderung $\alpha_t dt = \omega' dt = d\omega$, ohne die Axe zu ändern, die zweite neigt die Axe um den Winkel $d\sigma$, indem sie zu ω die unendlich kleine Componente $\alpha_n dt = \omega\psi\, dt$ hinzufügt.

Zu denselben Resultaten gelangt man auch, indem man die Elementarwinkelbeschleunigung $d\varpi$ um h in ihre beiden Componenten $d\omega$ um c und $\omega d\sigma$ um n zerlegt und sie durch das Zeitelement dt dividirt. Wegen der Aehnlichkeit der Figuren erhält man damit die Componenten

$$\alpha_t = \frac{d\omega}{dt} = \omega' \quad \text{und} \quad \alpha_n = \omega\frac{d\sigma}{dt} = \omega\psi$$

von α, wie oben.

Den Inhalt der vorstehenden Betrachtung fassen wir in den Satz zusammen:

Der Beschleunigungszustand des Systems, welches zur Zeit t die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe c besitzt, wird durch zwei Beschleunigungen charakterisirt: die Centripetalbeschleunigung und die Winkelbeschleunigung. Die erstere schneidet die Axe c rechtwinklig, ist dem Sinne nach ihr zugewandt und hat für die Punkte in der Einheit der Entfernung von c den Werth ω^2; die Axe h der Winkelbeschleunigung geht durch den Schnittpunkt O der Axe c mit der nächstfolgenden Axe c' und bildet in der Ebene des Winkels $d\sigma$ beider Axen mit c den Winkel γ, für welchen $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega\psi}{\omega'}$ ist. Die Winkelbeschleunigung ist senkrecht zu den Ebenen der Axe h und ihre Grösse α wird durch die Gleichung

$$\alpha^2 = \omega'^2 + \omega^2\psi^2$$

bestimmt; sie kann in zwei Componenten zerfällt werden, die tangentiale Componente $\alpha_t = \omega'$, deren Axe die Momentanaxe c ist und die normale Componente $\alpha_n = \omega\psi$, deren Axe n in der Ebene (ch) im Punkte O auf c senkrecht steht. Die tangentiale Winkelbeschleunigungscomponente ist senkrecht zu den Ebenen der Axe c, die normale senkrecht zu den Ebenen der Axe n.

Neigt sich die Momentanaxe c nicht, ist also $d\sigma = 0$, so verschwindet $\alpha_n = \omega\psi$ und reducirt sich die Winkelbeschleunigung auf ihre tangentiale

Componente $\alpha_t = \omega'$; das System rotirt zwei Zeitelemente hindurch um dieselbe Axe c; bleibt ω constant, während die Axe c wechselt, so wird $\alpha_t = 0$ und besitzt das System ausser der centripetalen Beschleunigung nur Normalbeschleunigung $\alpha_n = \omega\psi$.

§. 2. Aus dem vorigen §. erhellt unmittelbar:

Die Beschleunigung eines Systempunktes in den Entfernungen r, r' von den Axen c, h der Winkelgeschwindigkeit ω und der Winkelbeschleunigung α hat zwei Componenten, eine centripetale $\omega^2 r$, welche die Axe c rechtwinklig schneidet und dem Sinne nach ihr zugewandt ist, und eine der Winkelbeschleunigung α entsprechende von der Grösse $\alpha r'$, senkrecht zu der Ebene welche den Systempunkt und die Axe h enthält und dem Sinne nach mit α übereinstimmend.

Indem man die Winkelbeschleunigung α um die Axe h in ihre tangentiale und normale Componente $\alpha_t = \omega'$ und $\alpha_n = \omega\psi$ um die Axen c und n auflöst und den Abstand des Systempunktes von n mit r'' bezeichnet, ergibt sich:

Die Beschleunigung des Systempunktes zerfällt in die drei Componenten $\omega^2 r$, $\omega' r$, $\omega\psi r''$, von welchen die beiden ersten die centripetale und tangentiale Beschleunigung bezüglich der Axe c der Winkelgeschwindigkeit darstellen, wie sie der Punkt besitzen würde, wenn die Axe c nicht wechselte, während die dritte von der Normalwinkelbeschleunigung α_n herrührt, senkrecht zu der Ebene ist, welche deren Axe n und den Systempunkt enthält und dem Sinne nach mit α_n übereinstimmt.

Die Componenten $\omega^2 r$ und $\omega' r$ kann man zu der Beschleunigung $r\vartheta$ verbinden, wo $\vartheta = \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$, welche mit r in die zur Axe c senkrechte Ebene des Systempunktes fällt und gegen den Stral r unter einem für alle Systempunkte constanten Winkel λ geneigt ist, für welchen

$$\operatorname{tg} \lambda = \omega' : \omega^2$$

ist. Sie ist die Beschleunigung, welche der Punkt besitzen würde, wenn die Axe c nicht wechselte. Die Componente $\omega\psi r''$ stellt die durch den Wechsel dieser Axe bedingte Beschleunigung dar.

Für die Punkte eines und desselben durch O gehenden Strales sind die Abstände r, r' dem Abstande von O proportional und die Ebenen, welche die Punkte mit den Axen c und h verbinden, dieselben. Hieraus folgt:

Für die Punkte eines durch O gehenden Strales ist die Beschleunigung dem Abstande von O proportional und von derselben Richtung, so dass die Beschleunigungen aller solcher Punkte in dieselbe Ebene des Strales fallen und mit ihm denselben

Winkel bilden. Diesseits und jenseits des Punktes O sind sie übrigens dem Sinne nach entgegengesetzt.

§. 3. Damit die Beschleunigung eines Systempunktes verschwinde, müssen ihre beiden Componenten $\omega^2 r$ und $\alpha r'$ einzeln Null werden oder sich gegenseitig tilgen. Nehmen wir zunächst an, dass die Axen c und h nicht zusammenfallen, ihr Schnittpunkt O nicht unendlich fern und weder ω noch α Null sei. Dann ist eine gegenseitige Tilgung der Componenten nicht möglich. Denn da $\omega^2 r$ zur Axe c, $\alpha r'$ zur Axe h senkrecht ist, so könnte ihre zur Tilgung erforderliche gemeinsame Richtung nur senkrecht zur Ebene (ch) sein. Da aber $\alpha r'$ zu r' senkrecht ist, so müsste r' in die Ebene (ch) hineinfallen und könnten mithin Punkte verschwindender Beschleunigung nur in dieser Ebene gesucht werden. Es muss aber die gemeinsame Richtung der Componenten auch die Axe c schneiden. Daher könnte dieselbe nur in die zur Ebene (ch) senkrechte durch c gehende Ebene fallen nnd würden jene Punkte nur in der Axe c selbst zu finden sein. Für die Punkte von c ist aber $\omega^2 r$ Null und kann mithin $\alpha r'$ nicht tilgen. Es muss daher auch die Componente $\alpha r'$ für sich verschwinden, wenn die Beschleunigung verschwinden soll. Da sie nur für die Punkte der Axe h verschwindet, so kann der Schnittpunkt O der Axen c und h allein ein Punkt ohne Beschleunigung sein, für den in der That beide Componenten sich einzeln auf Null reduciren.

Ist die Winkelgeschwindigkeit ω Null (in welchem Falle die Momentanaxe c nur als die Grenzlage einer Folge von Rotationsaxen verstanden werden kann), so verschwindet die Beschleunigung für alle Punkte der Axe h der Winkelbeschleunigung. Ebenso verschwindet die Beschleunigung für alle Punkte von c, sobald die Winkelbeschleunigung Null ist. In diesen beiden Fällen besitzt das System also eine Axe verschwindender Beschleunigung, nicht einen einzelnen Punkt.

Fallen die Axen c und h zusammen, d. h. wechselt die Momentanaxe nicht, so ist die Doppelaxe (ch) Axe verschwindender Beschleunigung. Werden ω und α zugleich Null, so ist jeder Systempunkt ein Punkt ohne Beschleunigung.

Fällt O ins Unendliche, so gelten für alle Schnitte des Systems senkrecht zur Axe c die Betrachtungen des vorigen Capitels. Da alle solche Schnitte identische Bewegungen haben und jeder solche einen Punkt ohne Beschleunigung besitzt, so enthält das System in diesem Falle eine Axe ohne Beschleunigung.

Einen Punkt ohne Beschleunigung wollen wir einen **Mittelpunkt der Beschleunigung**, eine Axe voll solcher Punkte eine **Beschleunigungsaxe** nennen.

Demnach können wir jetzt folgenden Satz aussprechen:

Der Schnittpunkt O der beiden aufeinanderfolgenden Momentanaxen ist, wenn er nicht im Unendlichen liegt, die Axe der Winkelbeschleunigung nicht mit der Momentanaxe zusammenfällt und weder die Winkelgeschwindigkeit noch die Winkelbeschleunigung Null ist, der einzige Mittelpunkt der Beschleunigung im System. In den besonderen Fällen, dass die Winkelgeschwindigkeit Null ist, oder die Axen beider zusammenfallen, oder die Winkelbeschleunigung verschwindet, oder der Punkt O im Unendlichen liegt, existirt eine Beschleunigungsaxe. Dieselbe fällt im ersten dieser Fälle mit der Axe der Winkelbeschleunigung, im zweiten und dritten mit der Momentanaxe zusammen, im letzten Falle ist sie von diesen Axen verschieden, ihnen aber parallel. Verschwinden die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung zugleich, so ist jeder Punkt des Systems Beschleunigungsmittelpunkt.

Der Schnitt des Systems mit einer um den Punkt O beschriebenen Kugelfläche ist ein sphärisches System, welches sich auf der Kugelfläche bewegt. Dasselbe besitzt im Allgemeinen keinen Mittelpunkt der Beschleunigung; in den besonderen Fällen verschwindender Winkelgeschwindigkeit oder Winkelbeschleunigung, sowie in dem Falle, dass die Axen c und h zusammenfallen, gibt es zwei Mittelpunkte der Beschleunigung, nämlich die Punkte, in welchen die Beschleunigungsaxe des Gesammtsystems die Kugelfläche schneidet. Für das ebene System, in welches das sphärische in dem Falle übergeht, dass der Punkt O ins Unendliche rückt, existirt stets ein Mittelpunkt der Beschleunigung.

§. 4. Von O ziehen wir nach einem beliebigen Systempunkt M den Stral m, und verbinden ihn mit den Axen c und h durch die Ebenen (cm) und (hm). Die erstere von ihnen ist die Normalebene der Bahn des Punktes M; sie enthält die centripetale Componente $\omega^2 r$ seiner Beschleunigung; senkrecht zu der letzteren ist die der Winkelbeschleunigung α entspringende Beschleunigungscomponente $\alpha r'$. Die Tangente der Bahn und die Richtung von $\alpha r'$ sind daher beide senkrecht zum Strale m und bilden mit einander einen Winkel, gleich dem Neigungswinkel ε der Ebenen (cm) und (hm). Diesen Winkel zählen wir positiv so, dass ein von M nach O hinsehender Punkt den Uebergang der Ebene (hm) in die Ebene (cm) im Sinne der Uhrzeigerbewegung erblickt, wenn diese Ebene um m gedreht wird. Beim Durchgang des Punktes M durch die Ebene (ch) wechselt der Sinn dieser Drehung und damit das Zeichen von ε. Zerlegen wir die Componente $\alpha r'$ nach der Tangente und senkrecht zu ihr in die beiden weiteren Componenten $\alpha r' \cos\varepsilon$ und $\alpha r' \sin\varepsilon$ (Figg. 194 u. 195), so bildet die erstere von ihnen für sich allein die Tangentialbeschleunigung φ_t

des Punktes M, während die zweite, in die Normalebene fallende, sich mit $\omega^2 r$ zur Normalbeschleunigung φ_n verbindet. Wir haben daher

$$\varphi_t = \alpha r' \cos \varepsilon\,, \quad [\varphi_n] = [\omega^2 r] + [\alpha r' \sin \varepsilon]\,.$$

Um die Resultante von $\omega^2 r$ und $\alpha r' \sin \varepsilon$ zu bilden, bemerken wir, dass die Richtungen von r und $\alpha r' \sin \varepsilon$ in der Normalebene zu den Stralen c und m senkrecht sind und daher den Winkel $\varrho = (cm)$ mit einander bilden. Mit Rücksicht auf den der Axe c zugewandten Sinn von $\omega^2 r$ aber ergibt sich für den Winkel beider Componenten bei positivem ε der Werth $\pi - \varrho$, so dass

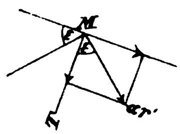

Fig 194.

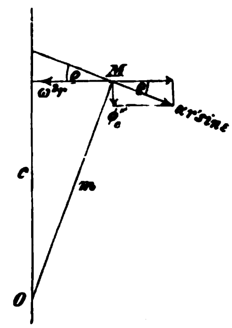

Fig. 195.

$$\varphi_n^2 = \omega^4 r^2 + \alpha^2 r'^2 \sin^2 \varepsilon$$
$$- 2\,\omega^2\,\alpha r r' \sin \varepsilon \cos \varrho$$

wird. Die normale Componente $\alpha r' \sin \varepsilon$ wollen wir übrigens weiter in zwei Componenten spalten, von denen die eine zur Axe c senkrecht, die andere ihr parallel ist. Dieselben sind

$$\alpha r' \sin \varepsilon \cos (\pi - \varrho) = - \alpha r' \sin \varepsilon \cos \varrho \quad \text{und} \quad \alpha r' \sin \varepsilon \sin \varrho\,.$$

Die erstere von diesen bildet mit $\omega^2 r$ zusammen die zur Momentanaxe c senkrechte Componente φ_c der Normalbeschleunigung φ_n, nämlich

$$\varphi_c = \omega^2 r - \alpha r' \sin \varepsilon \cos \varrho\,;$$

welche positiv im Sinne nach c hin gerechnet ist, der Werth der anderen φ_c' ist

$$\varphi_c' = \alpha r' \sin \varepsilon \sin \varrho\,.$$

Die Quadratsumme beider liefert wieder das obige φ_n^2.

Aus den beiden zu einander rechtwinkligen Componenten φ_t, φ_n, sowie auch aus den drei rechtwinkligen Componenten φ_t, φ_c, φ_c' geht die totale Beschleunigung φ des Punktes M hervor. Für sie ist daher:

$$\varphi^2 = \omega^4 r^2 + \alpha^2 r'^2 - 2\,\omega^2\,\alpha r r' \sin \varepsilon \cos \varrho\,.$$

Die Axen c, h und der Stral m bestimmen auf einer mit der Einheit als Radius um O beschriebenen Kugelfläche ein sphärisches Dreieck chm (Fig. 196), in welchem die Seiten cm, ch gleich ϱ und γ, der Winkel hmc aber gleich ε ist. Die Seite hm wollen wir mit ϱ' und den ihr gegenüberliegenden Winkel hcm mit ϑ bezeichnen. Statt wie bisher zur Bestimmung der Lage des Strales m seine Neigung ϱ gegen die Axe c und den Winkel ε der Ebenen (cm) und (hm) zu be-

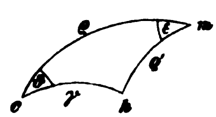

Fig. 196.

nutzen, können wir hiezu auch andere Bestimmungselemente aus dem Dreieck cmh entnehmen. Für das Folgende wählen wir zweckmässig hiezu die sphärischen Coordinaten ϱ, ϑ. Hiemit erhalten wir, wenn wir den Radiusvector OM des Systempunktes mit s bezeichnen:

$$r = s \,.\, \sin\varrho\,, \quad \sin\varrho' \sin\varepsilon = \sin\gamma \,.\, \sin\vartheta$$
$$r' = s \,.\, \sin\varrho'\,, \quad \cos\varrho' = \cos\gamma\cos\varrho + \sin\gamma\sin\varrho\cos\vartheta$$
$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\gamma - \cos\varrho\cos\varrho'}{\sin\varrho\sin\varrho'} = \frac{\cos\gamma\sin\varrho - \sin\gamma\cos\varrho\cos\vartheta}{\sin\varrho'},$$

wobei ϑ zugleich mit ε positiv oder negativ wird.

Mit Hülfe der Formeln

$$\alpha\cos\gamma = \omega', \quad \alpha\sin\gamma = \omega\psi \quad (§.\ 1)$$

ergeben sich daher die folgenden Ausdrücke für die Componenten der Beschleunigung des Punktes M:

$$\varphi_t = (\omega'\sin\varrho - \omega\psi\cos\varrho\cos\vartheta) \,.\, s$$
$$\varphi_c = (\omega^2\sin\varrho - \omega\psi\cos\varrho\sin\vartheta) \,.\, s$$
$$\varphi_c' = \omega\psi\sin\varrho\sin\vartheta \,.\, s$$
$$\varphi_n^2 = (\omega^4\sin^2\varrho + \omega^2\psi^2\sin^2\vartheta - 2\omega^3\psi\sin\varrho\cos\varrho\sin\vartheta) \,.\, s^2$$

und hieraus für φ selbst:

$$\varphi^2 = [(\omega^4 + \omega'^2)\sin^2\varrho + \omega^2\psi^2(\sin^2\vartheta + \cos^2\varrho\cos^2\vartheta)$$
$$- 2\omega^3\psi\sin\varrho\cos\varrho\sin\vartheta - 2\omega\omega'\psi\sin\varrho\cos\varrho\cos\vartheta] \,.\, s^2.$$

§. 5. Für die Systempunkte, deren Beschleunigungscomponente $\alpha r'$ in die Normalebene ihrer Bahn hineinfällt, verschwindet die Tangentialbeschleunigung φ_t, da die centripetale Componente $\omega^2 r$ stets der Normalebene angehört. Da $\alpha r'$ senkrecht zu der Ebene (hm) ist, so wird diese Bedingung von den Punkten der Stralen m erfüllt, für welche die Ebenen, welche sie mit den Axen c und h verbinden, zu einander rechtwinklig sind. Der Ort aller Stralen m, in welchem sich zwei Ebenen rechtwinklig schneiden, welche durch zwei sich in einem Punkte O schneidende feste Gerade c, h hindurchgehen, ist aber eine Kegelfläche zweiten Grades, welche die Geraden c, h enthält und von den Ebenen, welche zu ihnen senkrecht sind, in Kreisen geschnitten wird, deren Mittelpunkte auf der Ebene (ch) liegen. Denn legt man eine Ebene E senkrecht zu einer der Geraden c, h, z. B. zu c, welche diese Gerade in C, die andere in H und einen beliebigen der Stralen m, in welchem sich (cm) und (hm) rechtwinklig treffen, in M schneidet, so stehen die Ebenen E und (hm) beide senkrecht auf der Ebene (cm). Daher ist ihre Schnittlinie HM senkrecht zu CM, d. h. die Ebene E trifft die Stralen m in den Punkten eines Kreises, für welchen CH ein Durchmesser ist. Ebenso für die Ebenen senkrecht zu h. Daher der Satz:

Der Ort der Systempunkte verschwindender Tangentialbeschleunigung ist eine Kegelfläche zweiten Grades, welche die Axen c, h der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung enthält. Ihre Kreisschnitte sind senkrecht zu diesen Axen und je zwei Ebenen dieser Axen, welche durch einen Stral der Kegelfläche hindurchgehen, schneiden sich rechtwinklig.

In dem sphärischen Dreieck cmh, welches ein Stral m der Kegelfläche mit c und h bestimmt, besteht wegen des rechten Winkels bei m die Gleichung: $\operatorname{tg}(cm) = \operatorname{tg}(ch) \,.\, \cos(mch)$ oder also, wenn, wie früher die sphärischen Coordinaten des Strales m mit ϱ und ϑ bezeichnet werden, mit Rücksicht auf $\operatorname{tg}(ch) = \operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega\psi}{\omega'}$:

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\omega\psi}{\omega'} \cos\vartheta.$$

Diese Gleichung der Kegelfläche ergibt sich auch aus §. 4., wenn man den dortigen Ausdruck für φ_t gleich Null setzt.

Rückt der Punkt O ins Unendliche, so geht die Kegelfläche in eine Cylinderfläche über, deren Schnitte senkrecht zu c, h die Kreise ohne Tangentialbeschleunigung der ebenen, in ihren Ebenen beweglichen Systeme liefern, welche in diese Schnitte fallen. (S. Cap. XIII, §. 7).

Da die Tangentialbeschleunigung der Punkte der Kegelfläche verschwindet, so haben dieselben zur Zeit t stationäre Geschwindigkeit; ihre Beschleunigung ist blos Normalbeschleunigung.

Die Kegelfläche verschwindender Tangentialbeschleunigung scheidet die Punkte, deren Tangentialbeschleunigung positiv ist, von denen, für welche dieselbe negativ ist. Erstere erleiden eine momentane Zunahme, letztere eine momentane Abnahme der Geschwindigkeit, jene gehören dem Aussenraume, diese dem Innenraume der Kegelfläche an, wie man aus der Formel $\varphi_t = \alpha r' \cos\varepsilon$ ersieht.

Für rechtwinklige Coordinaten, deren positive z- und x-Axe mit der Momentanaxe und der Axe n der Normalbeschleunigung zusammenfallen ist $\operatorname{tg}\varrho = r : z$, $\cos\vartheta = x : r$, $r^2 = x^2 + y^2$, mithin die Gleichung der Kegelfläche ohne Tangentialbeschleunigung

$$\omega'(x^2 + y^2) - \omega\psi\, xz = 0.$$

§. 6. Die Punkte, deren Tangentialbeschleunigung gleich a ist, genügen der Bedingung $\alpha r' \cos\varepsilon = a$ (§. 4) und liegen bei positivem a ausserhalb, bei negativem a innerhalb des Kegels $\varphi_t = 0$. Legen wir durch den Punkt O eine Ebene senkrecht zur Axe h der Winkelbeschleunigung und bezeichnen mit p den Abstand eines Punktes M von ihr, so wird $r' = p \operatorname{tg}\varrho'$ und geht diese Bedingung über in:

31*

$$\operatorname{tg}\varrho' \cos\varepsilon = \frac{a}{\alpha p}.$$

In dem zugehörigen sphärischen Dreieck cmh (Fig. 196) schneidet die Seite $cm = \varrho$ den sphärischen Kegelschnitt, welchen der Kegel verschwindender Tangentialbeschleunigung mit der Kugel gemein hat, in einem Punkte n, so dass cn und hn zu einander rechtwinklig sind. Daher ist

$$\operatorname{tg}\varrho' . \cos\varepsilon = \operatorname{tg}(nm)$$

und erfüllen die Punkte von der Tangentialbeschleunigung a die Bedingung $\operatorname{tg}(nm) = a : \alpha p$, d. h. für die Punkte eines zur Axe h senkrecht geführten ebenen Schnittes des gesuchten Ortes ist der Bogen nm constant. Die Punkte m bilden daher auf der Kugelfläche eine der Pascal'schen Schneckenlinie analoge Curve, welche den sphärischen Kegelschnitt in ähnlicher Weise umgibt, wie die Pascal'sche Curve ihren Grundkreis. Für den unendlich fernen Schnitt fällt die Curve mit dem sphärischen Kegelschnitt zusammen. Unter Zugrundelegung des rechtwinkligen Coordinatensystems des vor. §. ergibt sich mit Hülfe des Ausdruckes $\varphi_t = (\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \cos\vartheta)\, s$ als Gleichung des Ortes der Punkte von der Tangentialbeschleunigung a:

$$[\omega'(x^2 + y^2) - \omega\psi\, xz]^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

Der Ort ist mithin eine Fläche 4. Grades, welche die Momentanaxe c als Doppellinie enthält. Die Fläche schmiegt sich dem Kegel verschwindender Tangentialbeschleunigung im Unendlichen an und umgibt ihn ähnlich wie die Pascal'sche Schneckenlinie ihren Grundkreis.

§. 7. Die Normalbeschleunigung φ_n hat die beiden Componenten

$$\varphi_c = \omega^2 r - \alpha r' \sin\varepsilon \cos\varrho = (\omega^2 \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \sin\vartheta)\, .\, s$$

und

$$\varphi_c' = \alpha r' \sin\varepsilon \sin\varrho = \omega\psi \sin\varrho \sin\vartheta\, .\, s$$

senkrecht und parallel zur Momentanaxe c. Sie kann nur vollständig verschwinden, wenn beide einzeln sich auf Null reduciren, da sie zu einander rechtwinklig sind.

Wir fragen zunächst nach dem Orte der Systempunkte, für welche die zur Momentanaxe c senkrechte Componente φ_c verschwindet. Die hiefür zu erfüllende Bedingung $\omega \sin\varrho - \psi \cos\varrho \sin\vartheta = 0$ schreiben wir unter Einführung des Complementes ϑ' von ϑ in der Form

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\psi}{\omega} \cos\vartheta'.$$

Für den Stral i des Punktes O, welcher dem Winkel $\vartheta' = 0$ oder

$\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ entspricht, wird $\operatorname{tg}\varrho = \operatorname{tg}(ci) = \frac{\psi}{\omega}$ und wenn wir den Winkel (ci) mit γ' bezeichnen, so nimmt die Gleichung die Form an

$$\operatorname{tg}\varrho = \operatorname{tg}\gamma' \,.\, \cos\vartheta',$$

aus welcher man ersieht, dass die Ebenen, welche einen Punkt unseres Ortes mit den Axen c und i verbinden, zu einander rechtwinklig sind. Analog der Untersuchung des §. 5 erhalten wir daher den Satz:

Der Ort der Systempunkte, deren Normalbeschleunigungscomponente φ_c senkrecht zur Momentanaxe verschwindet, ist eine Kegelfläche zweiten Grades, welche die Axe c und eine gewisse Axe i des Punktes O enthält, welche in der zur Axenebene (ch) senkrechten Ebene gegen die Axe c unter dem Winkel γ' geneigt ist, dessen Tangente durch das Verhältniss der Wechselgeschwindigkeit ψ der Momentanaxe zur Winkelgeschwindigkeit ω angegeben wird. Die Kreisschnitte dieses Kegels sind senkrecht zu den Axen c und i und ihre Mittelpunkte fallen in die Ebene (ci). Der Kegel berührt daher die Axenebene (ch) längs c.

Die Punkte dieses Ortes besitzen blos Tangentialbeschleunigung und Normalbeschleunigung parallel der Momentanaxe. Da die Normalbeschleunigung in die Schmiegungsebene der Bahn fällt, so sind sie die Punkte, deren Bahnschmiegungsebene zur Momentanaxe parallel ist.

In Bezug auf das obige rechtwinklige Coordinatensystem der x, y, z, wobei wir jetzt den Sinn der y-Axe so bestimmen wollen, dass von der positiven z-Axe aus gesehen, der Uebergang von der positiven x-Axe zur y-Axe der Uhrzeigerbewegung folgt (bisher war es nicht nöthig, darüber eine bestimmte Annahme zu machen), ist die Gleichung unserer Kegelfläche $\varphi_c = 0$:

$$\omega\,(x^2 + y^2) + \psi y z = 0\,.$$

Aehnliche Betrachtungen, wie die am Schlusse des vorigen §. gelten auch hier hinsichtlich des Ortes der Punkte gleicher Beschleunigungscomponente $\varphi_c = b$. Derselbe ist die Fläche 4. Grades

$$[\omega^2\,(x^2 + y^2) + \omega\psi y z]^2 = b^2\,(x^2 + y^2)\,.$$

Für den Ort aller Punkte, deren Normalbeschleunigungscomponente

$$\varphi_c' = \alpha r' \sin\varepsilon \sin\varrho = \omega\psi\,.\,\sin\varrho \sin\vartheta\,.\,s$$

verschwindet, oder denselben Werth c hat, folgt:

Der Ort der Systempunkte, deren Beschleunigungscomponente φ_c' parallel der Momentanaxe verschwindet, deren Schmiegungsebene mithin auf dieser Axe senkrecht steht, ist die Ebene der Axen c und h.

Der Ort der Systempunkte, deren Beschleunigungscomponente φ_c' parallel der Momentanaxe den Werth c hat, ist eine Ebene parallel zur Ebene (ch) im Abstande $c : \omega\psi$, diesseits oder jenseits von ihr, je nach dem Sinne von c.

Der Ort der Systempunkte, für welche φ_c und φ_c' gleichzeitig verschwinden, ist die Momentanaxe c.

§. 8. Die Punkte, deren Tangentialbeschleunigung φ_t und Normalbeschleunigungscomponente φ_c senkrecht zur Momentanaxe verschwinden, werden blos parallel zur Momentanaxe beschleunigt. Sie liegen auf den beiden Kegelflächen $\varphi_t = 0$, $\varphi_c = 0$, d. h.

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{\omega\psi}{\omega'} \cos \vartheta, \qquad \operatorname{tg} \varrho = \frac{\psi}{\omega} \sin \vartheta$$

zugleich. Diese Flächen schneiden sich ausser der Momentanaxe, deren Punkte den Bedingungen nicht genügen, noch in einem Strale g des Punktes O, welcher den fraglichen Ort darstellt. Die Lage dieses Strales g wird durch die sphärischen Coordinaten ϱ_0, ϑ_0 bestimmt, welche aus vorstehenden Gleichungen für ϱ, ϑ folgen, für welche nämlich:

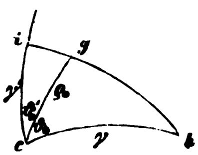

Fig. 197.

$$\operatorname{tg} \varrho_0 = \frac{\omega\psi}{\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{\omega^2}{\omega'}.$$

Da in den sphärischen Dreiecken cgh, cgi (Fig. 197) die Winkel bei g rechte sind, so fällt der Stral g in die Ebene (hi) hinein. Er theilt den Bogen hi so, dass

$$\frac{\cos gh}{\cos \gamma} = \frac{\cos gi}{\cos \gamma'} \text{ d. h. } \frac{\cos gh}{\cos gi} = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}}{\sqrt{\omega^2 + \psi^2}}.$$

Die Beschleunigung im Punkte M dieses Strales g, welcher die Entfernung s von O besitzt, ist

$$\varphi_c' = \omega\psi \sin \varrho_0 \sin \vartheta_0 \,.\, s = \frac{\omega^4\psi^2}{\sqrt{(\omega^4 + \omega'^2)(\omega^4 + \omega'^2 + \omega^2\psi^2)}} \cdot s.$$

§. 9. Mit Hülfe des Strales g können wir die Beschleunigung der Systempunkte besonders elegant darstellen. Schneiden wir nämlich das System mit einer Ebene E senkrecht zur Momentanaxe c, so trifft sie Geraden c, h, i, g in den Punkten C, H, J, G und die Kegelflächen verschwindender Tangentialbeschleunigung und zur Axe c senkrechter Normalbeschleunigungscomponente in zwei Kreisen, welche sich in C und G durchschneiden und die zu einander rechtwinkligen Strecken CH, CJ zu Durchmessern haben. Die Winkelbeschleunigung α um die Axe h zerlegen wir nach zwei zu einander rechtwinkligen durch den Punkt H gehenden Axen c', n', beide in der Ebene (ch) gelegen, die erstere, c', parallel zur Momentanaxe c, die letztere, n', parallel zur Axe n der Normalwinkelbeschleunigung. Die Componenten von α für diese Axen sind gleich der Tangentialwinkelbeschleunigung $\alpha_t = \omega'$ und der Normalwinkelbeschleunigung $\alpha_n = \omega\psi$. Die Beschleunigung der Systempunkte M der Ebene E zerfällt demnach in die Componenten: die centripetale $\omega^2 r$, nach C hin gerichtet, die Componente $\omega' . HM$ senkrecht zu HM und eine dritte, $\omega\psi . MQ$, wo MQ das von M auf die Axe n' gefällte Perpendikel bedeutet, senkrecht zur Ebene E.

Die beiden ersten Componenten $\omega^2 . MC$ und $\omega' . HM$ stellen den Bestandtheil der Beschleunigung dar, welche in die Ebene E fallen. Für sie ist der Punkt G Mittelpunkt der Beschleunigung und verschwinden auf den beiden Kreisen über CH und CJ die in diese Ebene fallenden Tangential- und Normalcomponenten. Alles, was Cap. XIII, §. 4 entwickelt ist, tritt auch hier in Kraft. Insbesondere ist der in die Ebene E fallende Antheil der Beschleunigung des Punktes M aequivalent den beiden Componenten $\omega^2 . MG$ und $\omega' . MG$, erstere längs MG, letztere senkrecht zu MG gerichtet, welche sich auch zu der Beschleunigung $MG . \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ vereinigen lassen, welche unter dem von der Lage des Punktes M in der Ebene unabhängigen Winkel λ gegen MG geneigt ist, für welchen $\operatorname{tg} \lambda = \omega' : \omega^2$ ist. Daher:

Der Stral g ist der Ort der Mittelpunkte der Beschleunigung für die ebenen Systeme, in welchen das Gesammtsystem von den Ebenen eines zur Momentanaxe c senkrechten Parallelebenenbüschels geschnitten wird, bezüglich der Beschleunigungsbestandtheile, welche in diese Ebenen fallen.

Zu der Beschleunigung $MG . \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ des Punktes M, welche in die Ebene E des Parallelebenenbüschels fällt und mit MG den Winkel λ bildet, tritt noch die Componente $\omega\psi . MQ$ senkrecht zu E hinzu, um sie zur Gesammtbeschleunigung zu ergänzen. Dieselbe ist proportional dem Abstande des Punktes M von der Ebene (ch) und wechselt den Sinn beim Durchgange von M durch diese Ebene. Daher:

Zieht man durch den Systempunkt M eine Gerade parallel zur Momentanaxe c und legt durch sie und den Punkt G des Strales g, dessen Abstand GM die Axe c rechtwinklig kreuzt, eine Ebene und hierauf eine zweite, welche mit dieser den Winkel λ, dessen Tangente $\omega' : \omega^2$ ist, bildet, dem Sinne der Tangentialwinkelbeschleunigung ω' entsprechend, so enthält letztere Ebene die Beschleunigung des Punktes M.

Die Beschleunigungen der Punkte M einer zur Momentanaxe parallelen Geraden l bestimmen mit dieser die Ebenen eines Ebenenbüschels, welcher congruent ist dem Ebenenbüschel, dessen Ebenen die Gerade l mit den Punkten G des Strales g verbinden, deren Abstände MG senkrecht zu l sind.

Ziehen wir durch den Punkt G eine Axe c' parallel c, so hat sie für die Punkte M der Ebene E, welche durch G senkrecht zu c' geführt ist, in Bezug auf die Componenten $\omega^2 . MG$ und $\omega' . MG$, welche in E fallen, dieselbe Bedeutung, wie die Axe c für alle Punkte des Systems rücksichtlich der Componenten $\omega^2 r$ und $\omega' r$ (§. 2). Die Componente $\omega\psi . MQ$ rührt von der Normalwinkelbeschleunigungscomponente $\omega\psi$ um die Axe n' des Punktes H her. Ertheilen wir nun dem System um eine durch G gehende, zu n' parallele Axe n'' die Winkelbeschleunigung $\omega\psi$ in ihrem und zugleich im entgegengesetzten Sinne, so ergibt sich $\omega\psi . MQ$ als aequivalent einer zu E senkrechten von $\omega\psi$ um n'' herrührenden Componente $\omega\psi . MV$, wenn MV den Abstand des Punktes M von n'' bedeutet, deren Sinn durch $\omega\psi$ um n'' bestimmt ist in Verbindung mit der Beschleunigung des Paares $(\omega\psi, -\omega\psi)$, deren Werth $\omega\psi . QV$ dem Abstande des Punktes G von der Ebene (ch) proportional ist. Diese letztere Beschleunigung ist gleich der Beschleunigung des Punktes G. Indem man die Winkelbeschleunigung $\omega\psi$ um n'' mit der Tangentialbeschleunigung ω' um c' zusammensetzt, erhält man die Winkelbeschleunigung α um eine zur Axe h parallele, durch G hindurchgehende Axe. Hierin erkennt man den folgenden Satz:

Die Beschleunigung des Punktes M eines zur Momentanaxe c senkrecht geführten Schnittes, welcher den Stral g im Punkte G trifft, kann erhalten werden, indem man in Bezug auf zwei den Axen c und h der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung parallele Axen c', h' des Punktes G die centripetale und die der Winkelbeschleunigung entsprechende Beschleunigungscomponente $\omega^2 . MG$ und $\alpha . MK$ (wo MK den Abstand von h' bedeutet) bildet und ihnen die Beschleunigung des Punktes G als eine allen Punkten des Schnittes gemeinschaftliche Componente zufügt.

Ist z der Abstand des Schnittes vom Punkte O, so erhält man

$$CH = z \operatorname{tg} \gamma, \quad CJ = z \operatorname{tg} \gamma'$$

d. h.

$$CH = z\omega\psi : \omega', \quad CJ = z\psi : \omega$$

und wenn C' den Punkt bezeichnet, in welchem die auf c nächstfolgende Momentanaxe den Schnitt trifft, $CC' = zd\sigma$. Für die Bewegung des Schnittes in seiner Ebene würden C, C' zwei auf einanderfolgende Momentancentra und $CC' : dt = u$ die Wechselgeschwindigkeit des Momentancentrums sein. Daher wird $u = z\psi$ und hiemit $CH = \omega u : \omega'$, $CJ = u : \omega$, übereinstimmend mit Cap. XIII, § 4., wobei zu bemerken, dass ω' die Stelle des dortigen α vertritt. CH und CJ sind die Durchmesser des Tangentialkreises und des Wendekreises des ebenen Schnittes.

Aus den obigen Betrachtungen ergeben sich noch die leichten Folgerungen:

Die Beschleunigung der Punkte der Ebene (cg) ist parallel zur Ebene (ci). Denn die Ebene (cg) bildet mit (ci) einen Winkel ϑ_0', wofür $\operatorname{tg} \vartheta_0' = \operatorname{cotg} \vartheta_0 = \omega' : \omega^2 = \operatorname{tg} \lambda$, daher ist die Componente

$$MG \sqrt{\omega^4 + \omega'^2},$$

welche mit MG den Winkel λ bildet, parallel (ci); die Componente $\omega\psi \cdot MQ$ ist aber parallel zur Momentanaxe.

Die Beschleunigung der Punkte der Ebene (hi) ist parallel der Ebene (ch). Denn MG fällt in HG und HG bildet mit CH den Winkel λ u. s. w.

§. 10. Da die Beschleunigung eines Systempunktes M eine Componente $\omega\psi \, . \, MQ$ parallel der Momentanaxe c besitzt, während die zu dieser Axe senkrechte Componente $MG \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ ist, so hat man für den Winkel ξ, unter welchem die Richtung der Beschleunigung gegen die Momentanaxe geneigt ist, die Gleichung

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{MG}{MQ} \cdot \frac{\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}}{\omega\psi}.$$

Für die Punkte M einer zur Axe c senkrechten Ebene E, deren Beschleunigungsrichtung mit c denselben Winkel bildet, ist daher das Verhältniss ihrer Abstände vom Punkte G und der Ebene (ch) eine Constante. Diese Punkte liegen daher in einem Kegelschnitt, für welchen G ein Brennpunkt und die Schnittlinie von E mit der Ebene (ch) die diesem zugehörige Directrix ist. Die sämmtlichen, derselben Bedingung genügenden Kegelschnitte, welche den verschiedenen Parallelebenen E angehören, sind ähnlich und ähnlich liegend und ihre Scheitel liegen in zwei Stralen des Punktes O, welche der Ebene des Neigungswinkels des Strales g gegen die Ebene (ch) angehören. Hieraus folgt:

Der Ort aller Systempunkte, deren Beschleunigung mit der Momentanaxe denselben Winkel ξ bildet, ist eine Kegelfläche 2. Ordnung. Ihr Mittelpunkt ist der Punkt O; der Stral g ist der Ort der einen Brennpunkte aller Kegelschnitte, in welchen die Fläche von den zur Momentanaxe senkrechten Ebenen geschnitten wird, und die Ebene (ch) ist der Ort aller zugehörigen Directricen.

Für $\xi = 0$ zieht sich die Kegelfläche auf den Stral g zusammen, dessen Punkte blos Beschleunigung parallel der Momentanaxe haben. Für $\xi = \frac{1}{2}\pi$ reducirt sich dieselbe auf die Ebene (ch).

Mit Hülfe des entwickelten Satzes kann man leicht die Beschleunigung der sämmtlichen Punkte einer Ebene beurtheilen. Es gibt in derselben nur einen einzigen Punkt, dessen Beschleunigung parallel zur Momentanaxe ist, nämlich dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Ebene mit dem Strale g; es gibt in der Ebene eine Gerade, deren Punkte Beschleunigung senkrecht zur Momentanaxe besitzen, nämlich die Gerade, in welcher die Ebene von der Ebene (ch) geschnitten wird. Eine Kegelfläche, welche g zu einer Brennpunktslinie und (ch) zur zugehörigen Directorebene im obigen Sinne hat, schneidet die Ebene in einem Kegelschnitte, dessen Punkte Beschleunigungen von gleicher Neigung gegen die Momentanaxe besitzen. Da die Geraden, welche von O aus unter demselben Winkel ξ gegen c gezogen werden können, eine Kegelfläche 2. Grades bilden, so sind die Beschleunigungsrichtungen der Punkte jenes Kegelschnittes die Erzeugungslinien eines einfachen Hyperboloids.

§. 11. Um die Stralen von O zu finden, deren Beschleunigung eine gegebene Richtung hat, bedenke man, dass diese Richtung mit der Axe c eine Ebene ε bestimmt und mit dieser Axe einen gewissen Winkel ξ bildet. Man lege nun durch irgend einen Punkt G des Strales g eine Ebene senkrecht zu c und bestimme in ihr den Kegelschnitt aller Punkte, deren Beschleunigung mit der Axe c den Winkel ξ bilden. Man ziehe hierauf durch G die beiden Geraden dieser Ebene, welche mit der Ebene ε den Winkel λ bilden, dessen Tangente $\omega' : \omega^2$ ist. Nur die eine von ihnen kommt hier in Betracht, nämlich diejenige, für welche der Winkel λ so liegt, wie es mit dem Sinne von ω' harmonirt. Diese Gerade trifft den genannten Kegelschnitt in zwei Punkten M, deren Beschleunigung der gegebenen Richtung parallel ist, denn sowohl die Componente $MG\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$, als auch die Componente $MQ \, . \, \omega\psi$ ist parallel der Ebene ε; daher ist auch die Beschleunigung dieser Punkte selbst parallel zur Ebene ε und da sie mit der Axe c den Winkel ξ bildet, so genügt M der Forderung. Die beiden Punkte M besitzen Beschleunigung derselben Richtung, aber von entgegengesetztem Sinne. Denn da ihre Verbindungslinie durch G geht, so sind die Componenten $MG\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ ihrer Beschleunigung entgegengesetzten Sinnes und da G Brennpunkt des Kegelschnittes ist, so liegen beide Punkte M auf derselben Seite des Directrix, welche in der Ebene (ch) sich findet. Daher hat die Componente $MQ \, . \, \omega\psi$ für beide Punkte denselben Sinn. Hieraus folgt, dass die Gesammtbeschleunigung selbst für beide Punkte entgegengesetzt ausfällt. Zieht man von O nach den beiden Punkten M die Stralen OM, so sind sie der Ort aller Systempunkte, deren Beschleunigung die verlangte Richtung hat.

Es gibt also im System nur zwei Stralen des Punktes O, deren Beschleunigung einer gegebenen Richtung parallel ist. Sie liegen mit dem Strale g in einer Ebene und sind die Schnittlinien dieser Ebene mit dem Kegel aller Punkte, deren Beschleunigung mit der Momentanaxe denselben Winkel bildet in der gegebenen Richtung.

In einer Ebene des Systems gibt es also nur zwei Punkte von gegebener Beschleunigungsrichtung, nämlich die Schnittpunkte der Ebene mit den beiden Stralen, welche den Ort für die Punkte dieser Beschleunigungsrichtung bilden.

Insbesondere sind in jeder Ebene nur zwei Punkte vorhanden, deren Beschleunigung senkrecht zu der Ebene ist.

§. 12. Die Normalcomponente φ_n der Beschleunigung, welche wir früher aus φ_c und φ_c' zusammensetzten, kann auch in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine φ_s senkrecht zum Strale m ist, während die andere φ_s' die Richtung von m hat. Die Werthe derselben entnehmen wir aus Fig. 195 unmittelbar, so dass φ durch die drei rechtwinkligen Componenten φ_s, φ_s' und die Tangentialbeschleunigung φ_t repräsentirt werden kann, nämlich:

$$\varphi_s = \omega^2 r \cos\varrho - \alpha r' \sin\varepsilon\,, \quad \varphi_s' = \omega^2 r \sin\varrho\,, \quad \varphi_t = \alpha r' \cos\varepsilon$$

oder durch ϑ und ϱ ausgedrückt:

$$\varphi_s = (\omega^2 \sin\varrho \cos\varrho - \omega\psi \sin\vartheta) s\,, \quad \varphi_s' = \omega^2 \sin^2\varrho \,.\, s\,,$$
$$\varphi_t = (\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\vartheta \cos\varrho) s\,.$$

Für den Ort $\varphi_s = 0$, d. h. für die Punkte ohne Beschleunigung senkrecht zu m ist $\omega \sin\varrho \cos\varrho - \psi \sin\vartheta = 0$. Der Ort ist eine Kegelfläche dritten Grades. Mit Hülfe des Coordinatensystems §. 7, wo

$$\sin\varrho = r : s, \quad \cos\varrho = z : s, \quad \sin\vartheta = y : r$$

wird ihre Gleichung

$$(x^2 + y^2) z - \frac{\psi}{\omega} y (x^2 + y^2 + z^2) = 0\,.$$

Sie enthält die Axen c und n und schneidet die Fläche $\varphi_t = 0$ d. h.:

$$\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\vartheta \cos\varrho = 0$$

in drei Stralen, deren Punkte blos Beschleunigung in der Richtung MO besitzen. Da für die Stralen der Kegelfläche sich die Normalbeschleunigung φ_n auf φ_s' reducirt, so haben die Stralen m derselben die Richtung der Krümmungshalbmesser ihrer Punkte. Die Krümmungskreise sind für sie grösste Kreise der Kugeln, auf denen sie sich bewegen, die Krümmungshalbmesser sind ein Maximum.

Für den Winkel β, welchen die Ebene der Beschleunigungen eines Strales m mit der Normalebene bildet, hat man

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varphi_t}{\varphi_s} = \frac{\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\vartheta \cos\varrho}{\omega^2 \sin\varrho \cos\varrho - \omega\psi \sin\vartheta}\,.$$

Denn die Ebene von φ_t und φ_s enthält den Neigungswinkel β beider Ebenen.

Für die Neigung ζ der Beschleunigung gegen den Stral m ist

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{\sqrt{\varphi_t^2 + \varphi_s^2}}{\varphi_s'}\,.$$

Diese Formeln geben Aufschluss über mancherlei specielle Stralen des beweglichen Systems.

§. 13. Die Systempunkte, deren Beschleunigung denselben Werth $\varkappa$ hat, genügen nach §. 4 der Bedingung

$$\varphi^2 = [(\omega' \sin \varrho - \omega\psi \cos \varrho \cos \vartheta)^2 + (\omega^2 \sin \varrho - \omega\psi \cos \varrho \sin \vartheta)^2 + \omega^2\psi^2 \sin^2\varrho \sin^2\vartheta] \,.\, s^2 = \varkappa^2\,.$$

Wählt man die Momentanaxe c zur z-Axe, die Axe der Normalwinkelbeschleunigung zur Axe der x und die zu beiden senkrechte Gerade zur y-Axe, sodass der Uebergang von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe mit dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω harmonirt, so ist

$$r \sin \vartheta = -y\,,\ r \cos \vartheta = x\,,\ s \,.\, \sin \varrho = r\,,\ s \,.\, \cos \varrho = z\,,\ r^2 = x^2 + y^2\,.$$

Hiemit geht die Bedingungsgleichung $\varphi = \varkappa$ über in

$$(\omega^4 + \omega'^2)x^2 + (\omega^4 + \omega'^2 + \omega^2\psi^2)y^2 + \omega^2\psi^2 z^2 - 2\,\omega\,\omega'\psi x z + 2\,\omega^3\psi y z = \varkappa^2.$$

Der Ort aller Punkte des Systems von der Beschleunigung $\varphi = \varkappa$ ist daher eine Fläche zweiter Ordnung, welche den Punkt O zum Mittelpunkt hat. Man sieht leicht, dass dieselbe ein Ellipsoid ist. Denn sie kann keine unendlich fernen Punkte enthalten, weil deren Beschleunigung unendlich gross ist. Die cubische Gleichung, von deren Wurzeln R die Hauptaxen abhängen, kann auf die Form

$$R(\omega^4 + \omega'^2 + \omega^2\psi^2 - R)^2 = \omega^8\psi^4$$

gebracht werden. Ihre Wurzeln sind alle positiv und liegen zwischen 0 und $\omega^4 + \omega'^2$, zwischen $\omega^4 + \omega'^2$ und $\omega^4 + \omega'^2 + \omega^2\psi^2$ und zwischen $\omega^4 + \omega'^2 + \omega^2\psi^2$ und $+\infty$.

Der Stral g, für dessen Richtungscosinusse

$$\alpha = \sin \varrho_0 \cos \vartheta_0\,,\quad \beta = -\sin \varrho_0 \sin \vartheta_0\,,\quad \gamma = \cos \varrho_0$$

man mit Hülfe von §. 8 findet: $\alpha : \omega\omega'\psi = \beta : -\omega^3\psi = \gamma : (\omega^4 + \omega'^2)$, ist conjugirt zur Ebene (ch) und c und h sind conjugirte Diameter des Schnittes des Ellipsoids mit der Ebene (ch). Daher sind c, g, h drei conjugirte Diameter des Ellipsoids. Die Längen der in diese drei Stralen fallenden Semidiameter ergeben sich, wenn man bedenkt, dass die Punkte dieser Stralen resp. nur Beschleunigung haben, herrührend von der Winkelbeschleunigung, parallel zu c und centripetale Beschleunigung und die Grösse darstellen, welche proportional der Entfernung von O ist, einzeln gleich $\varkappa$ setzt.

Lässt man $\varkappa$ variiren, so erhält man eine Schaar concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide. Eine Ebene wird von einem Ellipsoide dieser Schaar berührt und von allen übrigen in einem System concentrischer ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen geschnitten. Für die Punkte jeder Ellipse ist die Beschleunigung dieselbe, für den Berührungspunkt ist sie ein Minimum. Wir stellen die Hauptresultate dieser Betrachtung in dem Satze zusammen:

Der Ort der Systempunkte gleicher Beschleunigung $\varphi = \varkappa$ ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt mit dem Rotationsmittelpunkte O zusammenfällt. Die sämmtlichen, den verschiedenen Werthen von $\varkappa$ entsprechenden Orte bilden eine Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide, für welche die Ebene (ch) der Axen der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung dem Strale g, dessen Punkte blos Beschleunigung parallel zur ersteren dieser beiden Axen besitzen, conjugirt ist und für welche die Axen c, g, h ein Tripel conjugirter Diameter bilden.*)

§. 14. Projicirt man das Dreieck OCC' (Fig. 192) auf irgend eine Axe, so folgt, dass die Projection von der Elementarbeschleunigung $d\varpi$ gleich dem Differentiale der Projection ω_x von ω ist, so dass, wenn λ die Neigung von $d\varpi$ gegen die Axe bezeichnet, $d\varpi \,.\, \cos\lambda = d\omega_x$ wird. Dividirt man mit dt, so wird

$$\alpha \cos\lambda = \frac{d\omega_x}{dt} \quad \text{oder} \quad \alpha_x = \frac{d\omega_x}{dt},$$

wenn α_x die Projection von α ist, d. h. die Projection der auf ihrer Axe h als Länge aufgetragenen Winkelbeschleunigung α auf eine Axe ist die Derivirte der Componente der Winkelgeschwindigkeit ω um diese Axe. Für die rechtwinkligen Coordinatenaxen der x, y, z des Punktes O hat man daher für die Winkelbeschleunigung α, ihre Componenten α_x, α_y, α_z und ihre Neigungen λ, μ, ν gegen die Axen

$$\alpha_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \alpha_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt}$$

$$\frac{\cos\lambda}{\alpha_x} = \frac{\cos\mu}{\alpha_y} = \frac{\cos\nu}{\alpha_z} = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 .$$

§. 15. Wir wollen jetzt die Componenten X, Y, Z der Beschleunigung eines Systempunktes in Bezug auf drei rechtwinklige, sich im Rotationscentrum O schneidende Axen darstellen. Sie setzen sich aus den Bestandtheilen zusammen, welche von der centripetalen Beschleunigungscomponente $\omega^2 r$ herrühren und anderen, welche die Winkelbeschleunigung α veranlasst. In Bezug auf die ersteren seien (Fig. 198) α, β, γ die Richtungswinkel der Momentanaxe, λ, μ, ν die für MP und x, y, z die Coordinaten des Systempunktes M. Man hat dann für die Componenten von $\omega^2 r$

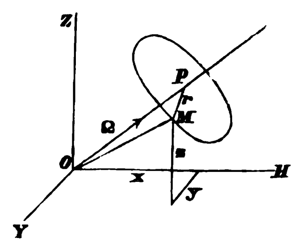

Fig. 198.

$$\omega^2 r \cos\lambda, \quad \omega^2 r \cos\mu, \quad \omega^2 r \cos\nu$$

und indem man den Linienzug $OMPO$ auf die Axen projicirt

---

*) Der Verfasser hat obigen Satz kurz nach Vollendung des Druckes der 1. Auflage dieses Buches (1870) für die sphärische Bewegung, wie für die Windungsbewegung gefunden und seit 1871 alljährlich in seinen Vorlesungen entwickelt.

$$x + r\cos\lambda - OP\cos\alpha = 0,$$
$$y + r\cos\mu - OP\cos\beta = 0,$$
$$z + r\cos\nu - OP\cos\gamma = 0.$$

Indem man mit Hülfe der Projection des Zuges der x, y, z, MP, PO auf die Richtung OP die Linie OP darstellt, nämlich

$$OP = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

ergeben sich weiter:

$$r\cos\lambda = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha - x,$$
$$r\cos\mu = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\beta - y,$$
$$r\cos\nu = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\gamma - z.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit ω^2 und ersetzt $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ durch ω_x, ω_y, ω_z, so stellen sich die gesuchten Bestandtheile von φ_x, φ_y, φ_z unter der Form dar

$$\omega^2 r\sin\lambda = \omega_x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x,$$
$$\omega^2 r\cos\mu = \omega_y(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y,$$
$$\omega^2 r\cos\nu = \omega_z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z.$$

Durch die Componenten der Winkelbeschleunigung α erlangt das System um die Axen die unendlich kleinen Winkelgeschwindigkeiten

$$\alpha_x dt = d\omega_x, \quad \alpha_y dt = d\omega_y, \quad \alpha_z dt = d\omega_z$$

(Componenten der Elementarwinkelbeschleunigung) und diese ertheilen dem Systempunkte (xyz) nach Cap. VI, §. 8 die Elementarbeschleunigungen parallel den Coordinatenaxen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_y & \alpha_z \\ y & z \end{vmatrix} dt, \quad \begin{vmatrix} \alpha_z & \alpha_x \\ z & x \end{vmatrix} dt, \quad \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ x & y \end{vmatrix} dt,$$

indem an die Stelle der dortigen p_x, q_y, r_z hier $\alpha_x dt$, $\alpha_y dt$, $\alpha_z dt$ treten. Durch Division mit dt erhält man die Componenten der Beschleunigung des Systempunktes, herrührend von der Winkelbschleunigung selbst, nämlich

$$\begin{vmatrix} \alpha_y & \alpha_z \\ y & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_z & \alpha_x \\ z & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ x & y \end{vmatrix}.$$

Die Gesammtbeschleunigung des Systempunktes hat also folgende Componenten:

$$X = \omega_x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 x + \begin{vmatrix} \alpha_y & \alpha_z \\ y & z \end{vmatrix},$$
$$Y = \omega_y(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 y + \begin{vmatrix} \alpha_z & \alpha_x \\ z & x \end{vmatrix},$$
$$Z = \omega_z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) - \omega^2 z + \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y \\ x & y \end{vmatrix}.$$

Wählt man insbesondere die Momentanaxe zur Axe der z und zwar so, dass der Sinn von ω mit dem positiven Sinne der z übereinstimmt; ferner zur xz-Ebene die gemeinsame Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) und zwar so, dass der positive Sinn der x-Axe mit dem Sinne der Normalbeschleunigung übereinstimmt, so sind

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega, \quad \alpha_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \omega\psi, \quad \alpha_y = \frac{d\omega_y}{dt} = 0, \quad \alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$$

und erhält man für die Componenten der Beschleunigung des Systempunktes xyz die einfacheren Ausdrücke:

$$X = -\omega^2 x - \omega' y, \quad Y = -\omega^2 y + \omega' x - \omega\psi z, \quad Z = \omega\psi y.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man zu den Resultaten der §§. 1—15 gelangen. So liegen die Systempunkte, deren Beschleunigung der gemeinsamen Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) parallel ist, in der Ebene $Y = 0$, d. h.

$$\omega' \cdot x - \omega^2 y - \omega\psi z = 0 \cdot$$

Für die Punkte, deren Beschleunigung senkrecht zur Momentanaxe ist, wird $Z = 0$, sie liegen daher in der Ebene $y = 0$, d. h. in der Tangentenebene der beiden Kegel. Alle Punkte, deren Beschleunigung parallel zur Momentanaxe ist, genügen den Bedingungen $X = 0$, $Y = 0$ zugleich. Sie liegen in der Geraden

$$\omega^2 x + \omega' y = 0, \quad \omega' x - \omega^2 y - \omega\psi z = 0.$$

Die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Beschleunigungsmittelpunktes genügen den drei Bedingungen:

$$0 = \omega^2 x_1 + \omega' y_1, \quad 0 = \omega' x_1 - \omega^2 y_1 - \omega\psi z_1, \quad 0 = \omega\psi y_1.$$

Da diesem Gleichungssystem im Allgemeinen durch $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ genügt wird, so folgt, dass das Beschleunigungscentrum immer existirt, aber mit dem Rotationscentrum des Systems zusammenfällt. In besonderen Fällen gibt es eine continuirliche geradlinige Folge solcher Beschleunigungscentra, oder eine Beschleunigungsaxe. Dies ist der Fall, wenn $\omega = 0$ ist; denn dann ist die dritte Gleichung von selbst erfüllt und liefern die beiden andern $x_1 = y_1 = 0$, d. h. die Beschleunigungsaxe fällt mit der Momentanaxe zusammen. Wenn $\psi = 0$ ist, d. h. wenn die Momentanaxe nicht wechselt, liefert das Gleichungssystem $x_1 = y_1 = 0$, d. h. gleichfalls die Momentanaxe als Beschleunigungsaxe.

Der Abstand des Systempunktes von der Momentanaxe sei r; die Richtung desselben in dem Sinne von dem Schnittpunkte mit der Momentanaxe nach dem Systempunkte hin genommen bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinusse $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, 0 sind. Daher liefern X, Y in dieser Richtung den Bestandtheil der Normalbeschleunigung φ_n

$$X \cdot \frac{x}{r} + Y \cdot \frac{y}{r} = -\omega^2 r - \omega\psi \frac{yz}{r}.$$

Hierzu tritt aber noch $Z = \omega\psi y$ als weiterer Bestandtheil von φ_n, da es rechtwinklig zur Geschwindigkeit ist. Daher ist

$$\varphi_n^2 = \frac{\omega^2}{r^2}(\omega r^2 + \psi y z)^2 + \omega^2\psi^2 y^2.$$

Die Tangentialbeschleunigung wird erhalten, indem man die Componenten von X und Y in der Richtung der Geschwindigkeit vereinigt. Die Richtungscosinusse der Geschwindigkeit des Systempunktes gegen die Coordinatenaxen sind $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0; daher wird

$$\varphi_t = -X\frac{y}{r} + Y\frac{x}{r} = \omega' r - \omega\psi \frac{xz}{r}.$$

Die Systempunkte, welche keine Beschleunigung in der Richtung von r, also nur Normalbeschleunigung parallel zur Momentanaxe besitzen, genügen der Bedingung $\omega^2 r + \omega\psi \frac{yz}{r} = 0$; sie liegen auf dem Kegel zweiten Grades

$$\omega(x^2 + y^2) + \varphi yz = 0 .$$

Er enthält die Momentanaxe und berührt die Kegel (C) und (Γ) längs ihr.

Die Systempunkte, deren Normalbeschleunigung senkrecht zur Momentanaxe ist, genügen der Bedingung

$$\omega\psi y = 0$$

und sind also, wenn nicht ω oder ψ verschwindet, die Punkte der gemeinsamen Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ).

Die Systempunkte, deren Normalbeschleunigung vollständig verschwindet, genügen den beiden Bedingungen

$$\omega(x^2 + y^2) + \psi yz = 0 , \quad \omega\psi y = 0$$

zugleich. Ist nun ω nicht Null, so sind sie die Punkte der Momentanaxe; ist aber $\omega = 0$, so sind beide Bedingungen für alle Systempunkte erfüllt und besitzen in demselben Momente alle Punkte des Systems nur Tangentialbeschleunigung.

Die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung verschwindet, welche also im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit besitzen, genügen der Bedingung $\omega' r - \omega\psi \frac{xz}{r} = 0$; sie liegen auf dem Kegel zweiten Grades

$$\omega'(x^2 + y^2) - \omega\psi xz = 0 .$$

Die gemeinsame Tangentenebene der Kegel (C) und (Γ) ist für ihn eine Hauptebene; er schneidet daher den vorigen Kegel rechtwinklig, für welchen die yz-Ebene eine Hauptebene ist.

§. 16. Die Ebene, welche den Systempunkt M mit der Momentanaxe c verbindet, ist die Normalebene der Bahn des Punktes M; sie enthält die Normalbeschleunigung φ_n, deren Richtung die Richtung der Hauptnormalen oder des Krümmungshalbmessers ist. Die Ebene, welche durch diese Richtung und die Tangente der Bahn bestimmt wird, ist die Schmiegungsebene. Da φ_n in die beiden Componenten

$$\varphi_c = (\omega^2 \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \sin\vartheta)s \quad \text{und} \quad \varphi_c' = \omega\psi \sin\vartheta \sin\varrho \,.\, s$$

zerfällt, von denen die erstere senkrecht, die letztere parallel zu c ist, so bildet die Richtung des Krümmungshalbmessers mit der Axe c den Winkel μ, für welchen

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varphi_c}{\varphi_c'} = \frac{\omega \sin\varrho - \psi \cos\varrho \sin\vartheta}{\psi \sin\vartheta \sin\varrho} = \frac{\omega}{\psi} \frac{1}{\sin\vartheta} - \operatorname{cotg}\varrho$$

ist. Der Punkt M beschreibt eine sphärische Curve, deren Krümmungskreis der Schnittkreis der Kugel, welcher die Bahn angehört, mit der Schmiegungsebene ist. Daher ist der Krümmungshalbmesser R die Projection des Kugelradius $OM = s$ auf die Richtung der Hauptnormalen, und mithin $R = s \cos(\mu - \varrho)$ (Fig. 199). Ebenso gut kann R erhalten werden mit

Hülfe der Formel $\varphi_n = \frac{v^2}{R} = \frac{{}^2 r^2}{R}$. Auf die eine, wie auf die andere Art erhält man:

$$R = \frac{s\omega \sin^2 \varrho}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \varrho - 2\omega\psi \sin \varrho \cos \varrho \sin \vartheta + \psi^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Die Gerade OK, welche den Punkt O mit dem Krümmungsmittelpunkte K verbindet, ist, weil sie in K senkrecht zur Schmiegungsebene ist, die Krümmungsaxe der Bahn. Sie bildet mit c den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \mu$.

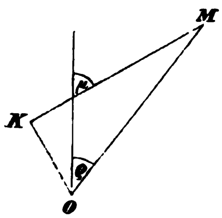

Fig. 199.

Aus der obigen Formel für tg μ folgt, dass die Punkte, deren Krümmungsaxe die Momentanaxe rechtwinklig schneidet, der Bedingung $\mu = 0$ genügen. Diese Gleichung ist, entwickelt tg $\varrho = \frac{\psi}{\omega} \sin \vartheta$, d. h. der Ort der Systempunkte, deren Krümmungshalbmesser der Momentanaxe c parallel sind, ist die Kegelfläche zweiten Grades ohne Normalbeschleunigungscomponente φ_c.

Für die Punkte, deren Krümmungsaxe in die Momentanaxe fällt, deren Schmiegungsebene und Krümmungshalbmesser diese Axe rechtwinklig schneiden; ist $\mu = \frac{1}{2}\pi$, d. h. $\vartheta = 0$. Der Ort der Punkte, deren Krümmungshalbmesser die Axe c rechtwinklig schneiden, ist daher die Ebene (ch) der Momentanaxe und der Winkelbeschleunigungsaxe.

Die Punkte, deren Schmiegungsebene durch O geht, welche also die Stelle ihrer Bahn passiren, an welcher der Krümungshalbmesser ein Maximum, nämlich gleich s ist, liegen auf der Kegelfläche $\mu = \varrho$, d. h.

$$(\text{tg}\,\varrho + \text{cotg}\,\varrho) \sin \vartheta = \frac{\omega}{\psi} \quad \text{oder} \quad \sin \varrho \cos \varrho = \frac{\psi}{\omega} \sin \vartheta.$$

Die Gleichung dieses Kegels in Bezug auf das Coordinatensystem des §. 13. wird $\psi(x^2 + y^2 + z^2)y + \omega(x^2 + y^2)z = 0$. Er ist vom dritten Grade und enthält die Momentanaxe.

§. 17. Die Kegelfläche $\varphi_c = 0$, deren Punkte keine Normalbeschleunigung senkrecht zur Momentanaxe haben, spielt in der Theorie der Krümmung der sphärischen Bahnen eine ähnliche Rolle, wie der Wendekreis für die ebenen Bahnen; doch kann von Wendepunkten hier nicht die Rede sein, da der Krümmungshalbmesser einer sphärischen Bahn nicht unendlich gross werden kann. Die Haupteigenschaft dieser Fläche, welche im vorigen Paragraphen sich ergab, nämlich, dass sie der Ort der Punkte ist, deren Bahnkrümmungsaxen die Momentanaxe c rechtwinklig schneiden, wollen wir zunächst direct ableiten.

Durch die Momentanaxe c (Fig. 200) legen wir eine Ebene ε und ziehen in ihr durch O einen Stral k senkrecht zu c. Durch ihn und die folgende Momentanaxe c' ist eine Ebene ε_1 bestimmt. Jede der beiden Ebenen ε, ε_1 ist Normalebene der Bahnen aller ihrer Punkte, ε für die Zeit t, ε_1 für die Zeit $t + dt$. Legen wir durch c eine weitere Ebene ε', welche mit ε den unendlich kleinen Winkel $d\vartheta$ bildet, gleich der Elementaramplitude der Rotation des Systems um c und zwar in dem Sinne, dass ε' die der Zeit $t + dt$ entsprechende Lage von ε darstellt. Die Ebene ε' schneidet ε_1 in einem Strale i_1' des Punktes O, dessen Lage zur Zeit t in der Ebene ε der Stral i_1 sei.

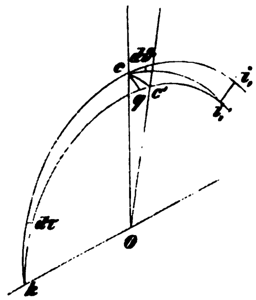

Fig. 200.

Für i_1, i_1' ist Winkel (ci_1) gleich Winkel (ci_1'). Für die Punkte des Strales i_1 ist die Schnittlinie k der Normalebenen ε, ε' die Krümmungsaxe, d. h. die Gerade, welche im Krümmungsmittelpunkte auf der Schmiegungsebene senkrecht steht. In jeder Ebene des Ebenenbüschels, dessen Axe c ist, liegt ein Stral i_1; die Krümmungsaxen k für alle solche Stralen liegen in der zu c senkrechten Ebene des Punktes O. Wir suchen den Ort aller Stralen i_1 oder, was genügt, den Ort aller Punkte i_1 auf einer um O mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche. Setzen wir $ci_1 = \varrho$, so ist das Bogenelement $i_1 i_1' = d\vartheta \,.\, \sin\varrho$. Bezeichnet ferner $d\tau$ den Contingenzwinkel der Curve i_1, d. h. den Winkel ckc_1' der Normalebenen in den Punkten i_1 und i_1', so ist wegen $(kc) = \frac{1}{2}\pi$ zugleich

$$i_1 i_1' = d\tau \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi + \varrho\right) = d\tau \cos\varrho .$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für $i_1 i_1'$ wird daher

$$d\vartheta \sin\varrho = d\tau \cos\varrho .$$

Bildet nun die Ebene ε mit der zu cc' senkrechten Ebene der Momentanaxe den Winkel λ und fällt man von c aus cq senkrecht auf kc', so wird

$$d\tau = cq = cc' \,.\, \cos\lambda = d\sigma \,.\, \cos\lambda$$

und hiemit geht die vorige Gleichung, wenn wieder $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, $\frac{d\sigma}{dt} = \psi$ gesetzt wird, über in

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\psi}{\omega}\cos\lambda .$$

Diese Gleichung drückt aber die Kegelfläche $\varphi_c = 0$ ohne Normalbeschleunigung senkrecht zu c aus (§. 7., wo ϑ' statt λ gesetzt ist). Der Stral i_1 ist die rechtwinklige Projection des Strales i (§. 7.) auf die Ebene ε.

§. 18. Um die Krümmungsaxe k der Bahn irgend eines Punktes m (es genügt, einen Punkt der Kugelfläche vom Radius 1 um O zu betrachten) zu finden (Fig. 201), sei m' dessen Lage zur Zeit $t + dt$ und $cm = \varrho$.

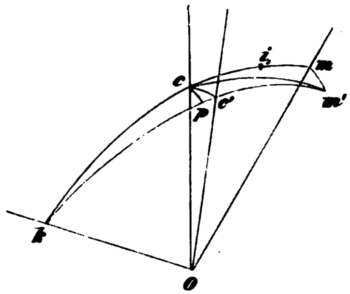

Fig. 201.

Die Normalebenen in m und m', welche diese Punkte mit den Axen c, c' verbinden, schneiden sich in der Krümmungsaxe k, welche aber im Allgemeinen nicht senkrecht zu c sein wird. Man hat daher, wenn $(ck) = \varrho'$ und λ der Winkel ist, den die Normalebene von m mit der zu cc' senkrechten Ebene bildet:

$$d\vartheta \,.\, \sin\varrho = \sin(\varrho + \varrho')\, d\tau,$$
$$d\tau \,.\, \sin\varrho' = d\sigma \,.\, \cos\lambda.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sin\varrho \sin\varrho'}{\sin(\varrho + \varrho')} = \frac{\psi}{\omega} \cos\lambda.$$

Setzen wir den sphärischen Radiusvector, welcher c mit dem Punkt i_1 des vor. §. verbindet, gleich ϱ_1, so ist $\frac{\psi}{\omega}\cos\lambda = \operatorname{tg}(ci_1) = \operatorname{tg}\varrho_1$ und daher gibt diese Gleichung

$$\operatorname{cotg}\varrho + \operatorname{cotg}\varrho' = \operatorname{cotg}\varrho_1$$

d. h. für alle Stralen Om des Punktes O in einer Ebene ε der Momentanaxe c ist die Summe der Cotangenten der Winkel ϱ, ϱ', weche Om und die Krümmungsaxen der Bahnen der Punkte des Strales m mit der Momentanaxe c bilden, eine Constante, nämlich gleich der Cotangente des Winkels ϱ_1, welchen der Stral der Kegelfläche $\varphi_c = 0$, der in die Ebene ε fällt, mit der Momentanaxe bildet.

Die Constante ϱ_1 wechselt von Stral zu Stral. Dieser Satz ist das Analogon zu dem Satze Cap. XIII, §. 15. (Vgl. auch S. 269.) Legen wir im Schnittpunkte c der Momentanaxe mit der Kugel um O vom Radius 1 eine Tangentenebene an die Kugel und sind M, K, J_1 die Schnittpunkte der Stralen m, k, i_1 mit ihr, wo J_1 auf dem Kreise liegt, in welchem der Kegel $\varphi_c = 0$ von der Tangentenebene geschnitten wird, so geht die vorstehende Gleichung über in

$$\frac{1}{CM} + \frac{1}{CK} = \frac{1}{CJ_1}$$

und gilt also in der Tangentenebene dieselbe Betrachtung wie Cap. XIII, §. 15, wofür der genannte Kreis die Stelle des dortigen Wendekreises spielt und insbesondere $\overline{MJ_1}^2 = MC \,.\, MK$ ist. Es können daher alle dortigen Constructionen mit Leichtigkeit auf die hier vorliegenden Probleme übertragen werden.

§. 19. Die Ebene der beiden aufeinanderfolgenden Momentanaxen c, c' ist die gemeinsame Tangentenebene der Kegel (C), (Γ), von denen der zweite, dem beweglichen System angehörige auf dem ersten während der Bewegung rollt. Ersetzt man sie, wie Cap. VI, §. 6 durch ihre Schmiegungskegel, deren halbe Oeffnungen λ, λ' seien, so ist, wie dort gezeigt wurde

$$\frac{\omega}{\psi} = \operatorname{cotg} \lambda + \operatorname{cotg} \lambda' = \operatorname{cotg} \varrho_1 .$$

Daher ist

$$\operatorname{cotg} \varrho + \operatorname{cotg} \varrho' = \operatorname{cotg} \lambda + \operatorname{cotg} \lambda'$$

welche Gleichung gleichfalls in der genannten Tangentenebene ihre Interpretation finden kann.

XV. Capitel.

Beschleunigung der Windungsbewegung des unveränderlichen Systems.

§. 1. Es seien c die Momentanaxe des Systems zur Zeit t und (ω, v_0) die Elemente des Geschwindigkeitszustandes zu derselben, nämlich die Winkelgeschwindigkeit um c und die Translationsgeschwindigkeit des Systems parallel zu c; es seien ebenso c' und $(\omega + d\omega,\ v_0 + dv_0)$ die Momentanaxe und die Elemente des Geschwindigkeitszustandes zur Zeit $t + dt$; endlich seien (u, ψ) die Elemente der Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe, nämlich die Orthogonalgeschwindigkeit $u = \frac{OO'}{dt} = \frac{de}{dt}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\psi = \frac{d\sigma}{dt}$, wo O, O' die Fusspunkte des kürzesten Abstandes der Axen c, c' und $d\sigma$ der unendlich kleine Winkel beider Axen ist (Fig. 202). Die Momentanaxe erleidet beim Uebergang aus der Lage c in die Lage c' die Elementarrotation $d\sigma$ um die Richtungslinie des kürzesten Abstandes OO' und die Elementartranslation $de = OO'$ parallel derselben. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$ um c' ist aequivalent $\omega + d\omega$ um die zu c' parallele Axe c'' des Punktes O in Verbindung mit einem Paare vom Momente $(\omega + d\omega) . OO'$, gebildet aus $\omega + d\omega$ um c' und $-(\omega + d\omega)$ um c. Dies Paar ist gleichbedeutend mit einer unendlich kleinen Translationsgeschwindigkeit $\omega u dt$, deren Richtung senkrecht zur Ebene der Momentanaxe c und des kürzesten Abstandes ist. Durch dt dividirt erhalten wir aus ihm die Beschleunigungscomponente ωu, welche allen Systempunkten ge-

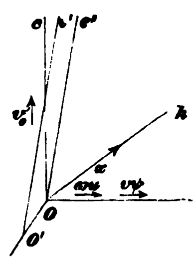

Fig. 202.

meinsam ist. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega + d\omega$ um c'' ist aequivalent (Cap. XIV, §. 1) ω um c und der Elementarwinkelbeschleunigung $d\varpi$ um die Axe h, deren Neigung γ gegen die Momentanaxe c durch die Gleichung $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega\psi}{\omega'}$ bestimmt ist. $d\varpi$ durch dt dividirt, gibt die Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d\varpi}{dt}$ um dieselbe Axe h. Diese Winkelbeschleunigung kann in ihre tangentielle Componente $\alpha_t = \omega'$ und ihre Normalcomponente $\omega\psi$ aufgelöst werden, erstere um c, letztere um die Axe n, senkrecht zu c in der Ebene (cc''). Von der Rotationsbewegung des Systems rühren demnach die Beschleunigungsbestandtheile her: 1. die centripetale Componente ω^2, die Axe c rechtwinklig schneidend, (wie Cap. XIV, §. 1), 2. die Winkelbeschleunigung α um h oder statt ihrer die Componenten $\alpha_t = \omega'$ und $\alpha_n = \omega\psi$ um die Axe c und n und 3. die allen Punkten gemeinsame Translationsbeschleunigung ωu parallel der Axe n. Um die von der Translationsbewegung des Systems herrührenden Beschleunigungsbestandtheile zu finden, seien (Fig. 203) von einem Punkte O aus die Translationsgeschwindigkeiten v_0, $v_0 + dv_0$ aufgetragen, ihre geometrische Differenz ist die Elementarbeschleunigung und gibt durch dt dividirt, die Beschleunigung k der Translationsgeschwindigkeit v_0. Sie zerfällt in die Componente $v_0' = \frac{dv_0}{dt}$ parallel der Momentanaxe c und die Componente $v_0 \frac{d\sigma}{dt}$ oder $v_0\psi$ senkrecht zu c und parallel der Ebene (cc'') d. h. parallel n. Demnach können wir für einen Systempunkt M im Abstande r von der Momentanaxe und r' von der Axe h den Satz aufstellen:

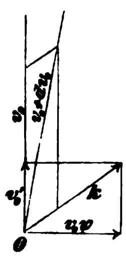

Fig. 203.

Die Beschleunigung eines Systempunktes hat folgende Componenten: 1. Die Centripetalbeschleunigung $\omega^2 r$, die Momentanaxe c senkrecht schneidend und dem Sinne nach ihr zugewandt; 2. die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Componente $\alpha r'$ senkrecht zu der Ebene durch die Winkelbeschleunigungsaxe h und den Systempunkt, welche in die Componenten $\omega' r$, senkrecht zur Ebene der Axe c durch den Systempunkt und $\omega\psi r''$ senkrecht zur Ebene der Axe der Normalwinkelbeschleunigung durch den Systempunkt zerfällt werden kann; 3. die beiden Componenten ωu und $v_0\psi$, welche allen Systempunkten gemeinschaftlich und beide der Axe n parallel sind, so dass sie nur in Summe $\omega u + v_0\psi$ auftreten und 4. die Componente v_0', gleichfalls allen Punkten gemeinsam und parallel zur Axe c.

Die Componenten $v_0\psi$ und v_0' unter Nr. 3. und 4. können in die Gesammtcomponente $[k] = [v_0'] + [v_0\psi]$ zusammengezogen werden, welche parallel zur Ebene (ch) ist und mit der Axe c einen Winkel bildet, dessen Tangente $\frac{v_0\psi}{v_0'}$ ist. — Die unter 1. und 2. aufgeführten Componenten sind die Componenten der Beschleunigung der sphärischen Bewegung um den Punkt O; die Componenten 3. und 4. rühren von dem Wechsel der Momentanaxe her.

§. 2. Wie in Cap. XIV, §. 2. werfen wir auch hier zunächst die Frage auf, ob es zur Zeit t im System Punkte gebe, deren Beschleunigung Null ist. Um sie zu beantworten, legen wir, wie dort, durch einen Systempunkt M eine Ebene E senkrecht zur Momentanaxe c und stellen die Beschleunigungscomponenten $\omega^2 r$, $\alpha r'$ welche von der sphärischen Bewegung des Systems herrühren, durch die Componenten $p\vartheta$ und $\omega\psi q$ dar. Die Ebene E schneidet nämlich die Axen c und h in den Punkten C, H und den Stral g, welcher in Folge der genannten Componenten blos Beschleunigung parallel zur Momentanaxe haben würde in G (Fig. 204). Der

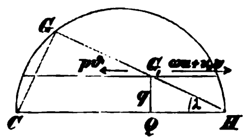

Fig. 204.

Punkt M besitzt dann, wenn seine Abstände von G und CH mit p und q bezeichnet werden, die Beschleunigungscomponenten $p\vartheta$ um G, geneigt gegen p unter dem Winkel λ, wofür $\operatorname{tg} \lambda = \omega' : \omega^2$ ist, in jener Ebene und die Beschleunigungscomponente $\omega\psi q$ senkrecht zu derselben, dem Sinne der Normalwinkelbeschleunigung $\omega\psi$ entsprechend. Zu diesen Componenten treten noch die allen Punkten gemeinsamen Componenten $\omega u + v_0\psi$ parallel CH und v_0' parallel zur Axe c hinzu. Die Componente $\omega\psi q$ ist constant auf einer Ebene Q parallel der Ebene (ch) und wechselt den Sinn beim Durchgang durch die Ebene (ch). Daher kann man den Abstand q diesseits oder jenseits von (ch) so bestimmen, dass sie die Componente v_0' tilgt, d. h. dass $\omega\psi q = v_0'$ wird, welcher Bedingung alle Punkte einer zu (ch) parallelen Ebene genügen, so dass sie blos Beschleunigung $\omega u + v_0\psi$ und $p\vartheta$ besitzen. Eine weitere Ebene, welche den Stral g mit der Axe h verbindet, schneidet Q in einer Geraden ξ, parallel zur Axe h, für deren Punkte die Beschleunigungscomponente $p\vartheta$ parallel CH ist und im Schnittpunkte von ξ mit g den Sinn wechselt. Daher kann man den Abstand z_1 der Ebene E von O so bestimmen, dass $p\vartheta = \omega u + v_0\psi$ wird. Die hiedurch bestimmte Ebene schneidet den Stral ξ in einem Punkte G_1 dessen Beschleunigung Null ist. Um z_1 zu finden, bedenke man, dass $z_1 : CH = \operatorname{cotg} \gamma$ werden muss und

$$CH = GH : \cos\lambda = \left(p + \frac{q}{\sin\lambda}\right) : \cos\lambda = (p \sin\lambda + q) : \sin\lambda \cos\lambda \text{ ist.}$$

Den Punkt G_1 ohne Beschleunigung nennt man den **Mittelpunkt der Beschleunigungen.** Da $G_1 G$ senkrecht zu CG und zur Axe c ist, so ist $G_1 G$ senkrecht zur Ebene (cg), mithin senkrecht zum Strale g; eine Ebene parallel zur Ebene (cg) im Abstande $(\omega u + v_0 \psi) : \vartheta$ von ihr, auf der Seite, nach welcher die Beschleunigungscomponente $\omega u + v_0 \psi$, welche die Richtung der Axe n hat, hinzeigt, enthält daher den Mittelpunkt G_1 der Beschleunigungen. Diese Ebene schneidet die Ebene Q, da beide der Axe c parallel sind, in einer zu c parallelen Geraden und da GG_1 senkrecht zu ihr ist, so ist diese Linie der kürzeste Abstand beider. Wir erhalten hiemit den Satz:

Im unveränderlichen, in Windungsbewegung begriffenen System existirt zu jeder Zeit t ein Punkt G_1 ohne alle Beschleunigung, der Mittelpunkt der Beschleunigungen. Eine Ebene parallel der Ebene (ch) der Axen c und h, der Geschwindigkeiten und der Winkelgeschwindigkeit im Abstande $q = v_0' : \omega\psi$ enthält denselben; eine andere Ebene, parallel zur Ebene (cg) der Axe c und des Strales g, dessen Punkte in Folge der sphärischen Componente, der Bewegung blos parallel der Axe c beschleunigt werden, im Abstande $(\omega u + v_0 \psi) : \vartheta$ von ihr auf der Seite von (cg) liegend, nach welcher die Beschleunigungscomponente $\omega u + v_0 \psi$ hinzeigt, enthält denselben gleichfalls. Beide Ebenen schneiden sich in einer zur Momentanaxe c parallelen Geraden; der Fusspunkt ihres kürzesten Abstandes vom Strale g ist der Mittelpunkt G_1 der Beschleunigungen.

Man erkennt hieraus, dass G_1 nur dann unbestimmt werden kann, wenn der Stral g parallel der Axe c wird und dass in diesem Falle eine Beschleunigungsaxe existirt, d. h. eine Gerade, deren Punkte sämmtlich Mittelpunkte der Beschleunigungen sind, parallel zur Axe c. Dies tritt z. B. bei der Bewegung des Systems parallel einer Ebene ein. Jeder Parallelschnitt zu dieser Ebene hat einen Beschleunigungsmittelpunkt und alle diese Mittelpunkte fallen in eine zur Ebene senkrechte Beschleunigungsaxe.

§. 3. Betrachtet man die Axe n der Normalwinkelbeschleunigung, die Linie des kürzesten Abstandes der aufeinanderfolgenden Momentanaxen c, c' und die Momentanaxe c als Axen der x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystems, positiv im Sinne der Normalwinkelbeschleunigung, der Orthogonalgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit, so erhält man die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Mittelpunktes der Beschleunigungen, wie folgt. Es ist (Fig. 204)

$$x_1 = CQ = p : \cos\lambda + q \operatorname{tg}\lambda, \quad y_1 = -q = -\frac{v_0'}{\omega\psi},$$

$$z_1 = OC = CH : \operatorname{tg}\gamma = (p \sin\lambda + q)\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sin\lambda\cos\lambda},$$

oder entwickelt

$$x_1 = \frac{u}{\omega} + \frac{v_0\psi}{\omega^2} + \frac{v_0'\omega'}{\psi\omega^3}, \quad -y_1 = \frac{v_0'}{\omega\psi},$$

$$z_1 = \frac{\omega'}{\omega^2}\left(\frac{u}{\psi} + \frac{\omega'}{\omega}\right) + \frac{v_0'}{\psi^2}\left(1 + \frac{\omega'^2}{\omega^2}\right).$$

§. 4. Wir wollen jetzt zeigen, wie die Beschleunigungen der Systempunkte um den Mittelpunkt G_1 der Beschleunigungen sich gruppiren. Ziehen wir durch G_1 eine Axe c_1 parallel zur Momentanaxe c und seien r und p die Abstände eines Systempunktes M von c und c_1, so können wir die Centripetalbeschleunigung $\omega^2 r$ zerlegen in zwei Componenten, von denen die eine, $\omega^2 p$ die Axe c_1 rechtwinklig und ihr zugewandt schneidet, während die andere, $\omega^2 r_1$, wo r_1 den Abstand der Axen c, c_1 bedeuten soll, geometrisch gleich der centripetalen Beschleunigung des Punktes G_1 ist, (vgl. Cap. XIV, §. 2). Ziehen wir ferner durch G_1 eine Axe h_1 parallel zur Winkelbeschleunigungsaxe h und bezeichnen die Abstände des Punktes M von h und h_1 mit r' und p', den Abstand der Axen h, h_1 aber mit r_1', so wird die Winkelbeschleunigung α um h aequivalent derselben Winkelbeschleunigung α um h_1 in Verbindung mit einer Translationsbeschleunigung gleich dem Momente $\alpha r_1'$ des Paares $(\alpha, -\alpha)$ und in Folge dessen die von der Winkelbeschleunigung herrührende Componente der Beschleunigung $\alpha r'$ des Punktes M aequivalent $\alpha p'$ in Verbindung mit der Translationsbeschleunigung $\alpha r_1'$, welche der Componente der Beschleunigung des Punktes G_1 geometrisch gleich ist, welche von α herrührt. Die Componente $\alpha p'$ ist senkrecht zu der Ebene, welche M mit h_1 verbindet; demnach zerfällt die Beschleunigung des Punktes M in $\omega^2 p$, $\alpha p'$, $\omega^2 r_1$, $\alpha r_1'$, wozu noch die allen Systempunkten gemeinsamen Componenten v_0' parallel c und $\omega u + v_0\psi$ parallel n sich gesellen. Da die vier Componenten $\omega^2 r_1'$ $\alpha r_1'$, v_0', $\omega u + v_0\psi$ geometrisch gleich den Componenten der Beschleunigung des Punktes G_1 sind, dessen Beschleunigung Null ist, so tilgen sie sich am Punkte M, ebenso, wie an G_1 und bleiben dem Punkte M blos $\omega^2 p$, $\alpha p'$. Wir erhalten daher den Satz:

Die Beschleunigung eines Systempunktes M kann durch zwei Componenten $\omega^2 p$ und $\alpha p'$ dargestellt werden. Die erste derselben schneidet die der Momentanaxe c parallele Axe c_1 des Beschleunigungsmittelpunktes G_1 rechtwinklig zugewandt und ist proportional dem Abstande des Punktes von dieser Axe; die letztere ist senkrecht zu der Ebene, welche die zur Winkelbeschleunigungsaxe h parallele Axe h_1 des Punktes G_1 mit dem Punkte M verbindet, ist proportional dessen Abstand p' von dieser Axe und harmonirt dem Sinne nach mit α. Behufs Bestimmung der Beschleunigung kann man also mit Unterdrückung der Componenten v_0' und $\omega u + v_0\psi$ den Satz Cap. XIV, §. 2. über die sphärische

Bewegung für den Punkt G_1 anwenden, d. h. sie so bestimmen, als ob c_1, h_1 Momentanaxe und Winkelbeschleunigungsaxe wären.

§. 5. Zerlegt man (Fig. 205) sowohl die Componente v_0', welche parallel c, als auch $\omega u + v_0 \psi$, welche parallel n ist, in zwei Componenten, parallel und senkrecht zur Axe h des Punktes O, so erhält man durch die Summe der ersteren, nämlich

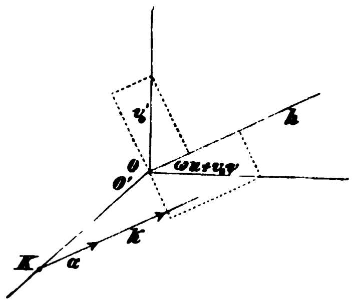

Fig. 205.

$$v_0' \cos\gamma + (\omega u + v_0\psi)\sin\gamma$$
$$= [v_0'\omega' + (\omega u + v_0\psi)\,\omega\psi] : \alpha$$

und die Differenz der letzteren

$$v_0' \sin\gamma - (\omega u + v_0\psi)\cos\gamma$$
$$= [v_0'\omega\psi - (\omega u + v_0\psi)\,\omega'] : \alpha$$

zwei allen Punkten des Systems gemeinsame Componenten, von denen die letztere, zu h senkrechte, zu einer Verlegung der Axe h dienen kann. Man sieht leicht, dass auf der Richtung OO' je nach dem Zeichen der letztgenannten Componenten diesseits oder jenseits von O ein Punkt K gefunden werden kann, so dass $[v_0'\omega\psi - (\omega u + v_0\psi)\,\omega'] : \alpha = OK \,.\, \alpha$ wird. Zieht man durch diesen Punkt eine Axe k parallel h und ertheilt dem System um sie die geometrisch entgegengesetzten Winkelbeschleunigungen α und $-\alpha$, so tilgt das Paar $(\alpha, -\alpha)$ die zu h senkrechte Componente und wird der Beschleunigungszustand dargestellt durch die Centripetalbeschleunigung ω^2, senkrecht zu c und die Winkelbeschleunigung α um k und die Translationsbeschleunigung $[v_0'\omega' + (\omega u + v_0\psi)\,\omega\psi] : \alpha$ parallel k. Wir wollen die aus α um k und der zur Axe k parallelen Beschleunigungscomponente entspringende Beschleunigung die Schraubenbeschleunigung des Systems und k deren Axe nennen. Daher können wir den Satz aufstellen:

Der Beschleunigungszustand der Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems kann repräsentirt werden: 1. durch die Centripetalbeschleunigung gegen die Momentanaxe c gleich ω^2 in der Einheit des Abstandes von c, 2. durch die Schraubenbeschleunigung um die Axe k, parallel der Axe h der Winkelbeschleunigung und im Abstande $OK = [v_0'\omega\psi - (\omega u + v_0\psi)\omega'] : \alpha^2$ von ihr, deren Rotationscomponente in der Einheit des Abstandes gleich α und deren Translationscomponente die allen Systempunkten gemeinsame Beschleunigung $[v_0'\omega' + (\omega u + v_0\psi)\,\omega\psi] : \alpha$ ist.

§. 6. Aus §. 4. folgern wir, dass die Sätze über die Beschleunigung der sphärischen Bewegung mit geringen Aenderungen auf die Beschleunigung der Windungsbewegung übertragen werden können; an die Stelle der dortigen Momentanaxe tritt hier die Axe c_1, die dortigen Tangential-und Normalcomponenten sind hier Componenten senkrecht zu den Ebenen der Axe c_1 und Componenten in diesen Ebenen etc. Insbesondere folgt aber: Der geometrische Ort der Punkte gleicher Beschleunigung k ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungsmittelpunkt ist und dessen Hauptaxen der Richtung und Grösse nach blos von ω, α und k nicht aber von u abhängen. Die sämmtlichen, den verschiedenen Werthen von k entsprechenden Ellipsoide sind ähnlich und ähnlich liegend.

In jeder Ebene des Systems gibt es einen Punkt, dessen Beschleunigung ein Minimum ist; er ist der Mittelpunkt einer Schaar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen, welche die Orte constanter Beschleunigung für die Ebene sind.

In jeder Geraden des Systems gibt es einen Punkt kleinster Beschleunigung. Nach beiden Seiten von ihm sind die Beschleunigungen in gleichen Abständen gleich gross. Der Punkt des Minimums ist der Berührungspunkt mit einem Ellipsoid der Schaar.

§. 7. Das Bogenelement, welches ein Systempunkt M (Fig. 206) im Abstande r von der Momentanaxe c in dem auf die Zeit t folgenden Zeitelemente beschreibt, ist gegen c unter dem Winkel a geneigt, dessen Tangente $\omega r : v_0$ ist. Die Normalebene ist daher unter dem Winkel $\frac{1}{2}\pi - a$ gegen c geneigt. Wir bestimmen jetzt die Tangential- und Normalcomponenten der Beschleunigung, indem wir die Projectionen aller Beschleunigungscomponenten auf die Tangente und die Normalebene sammeln.

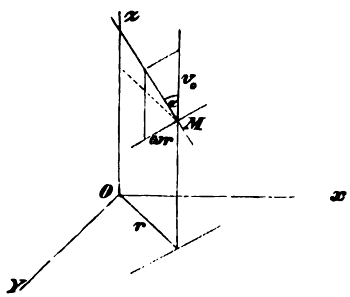

Fig. 206.

Der Punkt M hat die Beschleunigungscomponenten $\omega^2 r$, $\alpha r'$, v_0', $\omega u + v_0 \psi$. Die Componente $\alpha r'$ zerlegen wir wie Cap. XIV, §. 4. in die Componenten $(\omega' \sin \varrho - \omega \psi \cos \varrho \cos \vartheta)\, s$ senkrecht zur Ebene, welche c und M verbindet, $-\omega \psi \cos \varrho \sin \vartheta \,.\, s$ in der Richtung von r und $\omega \psi \sin \vartheta \sin \varrho \,.\, s$ parallel c. Die Componente $\omega u + v_0 \psi$ spalten wir in $(\omega u + v_0 \psi) \cos \vartheta$ in der Richtung von r und $-(\omega u + v_0 \psi) \sin \vartheta$ senkrecht zur Ebene (cM). Demnach hätten wir

1. $\omega^2 r - \omega \psi \cos \varrho \sin \vartheta \,.\, s + (\omega u + v_0 \psi) \cos \vartheta$ in den Richtungen r, positiv c zugewandt
2. $(\omega' \sin \varrho - \omega \psi \cos \varrho \cos \vartheta)\, s - (\omega u + v_0 \psi) \sin \vartheta$ in der Richtung senkrecht zur Ebene (c, M),
3. $v_0' + \omega \psi \sin \varrho \sin \vartheta \,.\, s$ parallel c.

Die Componente 1. gehört der Normalbeschleunigung an, die Componenten 2. und 3. aber spalten wir noch weiter in tangentielle und normale Bestandtheile. Die Componente 2. liefert durch Multiplication mit $\sin a$ eine tangentielle Componente und durch Multiplication mit $\cos(\pi - a)$ eine normale Componente senkrecht zu r, nämlich

$[(\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \cos\vartheta)\, s - (\omega u + v_0\psi) \sin\vartheta] \sin a$ tangentiell,

$-[(\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \cos\vartheta)\, s - (\omega u + v_0\psi) \sin\vartheta] \cos a$ normal und insbesondere senkrecht zu r.

Ebenso liefert die Componente 3. durch Multiplication mit $\cos a$ und $\sin a$ einen tangentiellen und einen normalen Bestandtheil, nämlich

$(v_0' + \omega\psi \sin\varrho \sin\vartheta \,.\, s) \cos a$ tangentiell,

$(v_0' + \omega\psi \sin\varrho \sin\vartheta \,.\, s) \sin a$ normal und senkrecht zu r.

Daher erhalten wir für die Tangentialbeschleunigung φ_t, wenn wir $\cos a = v_0 : \sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2}$, $\sin a = \omega r : \sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2}$ einfügen:

$$\sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2} \,.\, \varphi_t = [(\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \cos\vartheta)\, s - (\omega u + v_0\psi)\sin\vartheta]\, \omega r + [v_0' + \omega\psi \sin\varrho \sin\vartheta \,.\, s]\, v_0 .$$

In Bezug auf die Normalbeschleunigung vereinigen wir zunächst die Componenten senkrecht zu r zu einer Componenten N_1, wofür

$$\sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2} \,.\, N_1 = [v_0' + \omega\psi \sin\varrho \sin\vartheta \,.\, s]\, \omega r - [(\omega' \sin\varrho - \omega\psi \cos\varrho \cos\vartheta)\, s - (\omega u + v_0\psi)\sin\vartheta]\, v_0$$

und fügen hinzu die Componente N_2 welche, hiezu senkrecht, in die Richtung von r fällt, nämlich

$$N_2 = \omega^2 r - \omega\psi \cos\varrho \sin\vartheta \,.\, s + (\omega u + v_0\psi)\cos\vartheta .$$

Wegen der Rechtwinkligkeit von N_1 und N_2 erhalten wir dann für die gesammte Normalbeschleunigung

$$\varphi_n^2 = N_1^2 + N_2^2 .$$

Unter Zugrundelegung des §. 3 gebrauchten Coordinatensystems, d. h. indem wir $s \,.\, \sin\varrho = r$, $s \,.\, \cos\varrho = z$, $r \sin\vartheta = y$, $r\cos\vartheta = x$, $r^2 = x^2 + y^2$ setzen, nehmen diese Beschleunigungscomponenten die Form an:

$$\begin{aligned}\sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2} \,.\, \varphi_t &= \omega\omega' r^2 - \omega^2\psi xz - \omega^2 uy + vv_0' \\ &= \omega\omega'(x^2 + y^2) - \omega^2\psi xz - \omega^2 uy + v_0 v_0' .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r\sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2} \,.\, N_1 &= (\omega v_0' - \omega' v_0 + \omega^2\psi y)\, r^2 + \omega\psi v_0 xz + (\omega u + v_0\psi)\, v_0 y \\ &= (\omega v_0' - \omega' v_0 + \omega^2\psi y)(x^2 + y^2) + \omega\psi v_0 xz \\ &\quad + (\omega u + v_0\psi)\, v_0 y\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}r \,.\, N_2 &= \omega^2 r^2 - \omega\psi yz + (\omega u + v_0\psi)\, x \\ &= \omega^2(x^2 + y^2) - \omega\psi \,.\, yz + (\omega u + v_0\psi)\, x .\end{aligned}$$

§. 8. Für die geometrischen Orte aller Punkte, deren Tangentialbeschleunigung verschwindet, die also zur Zeit t eine stationäre Geschwindigkeit (Maximum oder Minimum derselben) besitzen, ist daher $\varphi_t = 0$, d. h.

$$(x^2 + y^2) - \frac{\omega\psi}{\omega'} xz - \frac{\omega u}{\omega'} y + \frac{v_0 v_0'}{\omega\omega'} = 0$$

oder

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\frac{\omega u}{\omega'}\right)^2 - \frac{\omega\psi}{\omega'} xz + \frac{v_0 v_0'}{\omega\omega'} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\omega u}{\omega'}\right)^2 = 0,$$

oder

$$x^2 + y^2 - \frac{\omega\psi}{\omega'} xz + \frac{v_0 v_0'}{\omega\omega'} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\omega u}{\omega'}\right)^2 = 0,$$

wenn der Ort auf den Mittetpunkt ($x = 0$, $y = \frac{1}{2}\frac{\omega u}{\omega'}$, $z = 0$) als Ursprung bezogen wird.

Der geometrische Ort aller Systempunkte ohne Tangentialbeschleunigung ist eine Fläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der Richtungslinie der Orthogonalgeschwindigkeit im Abstande $-\frac{1}{2}\frac{\omega\psi}{\omega'}$ von O liegt. Die Fläche wird von Ebenen senkrecht zur Momentanaxe in Kreisen geschnitten; die Ebene (ch) ist parallel einer Hauptebene und die Richtung der Orthogonalgeschwindigkeit die einer Hauptaxe. Die Fläche ist ein einfaches oder doppeltes Hyperboloid, je nach dem Vorzeichen von $\frac{v_0 v_0'}{\omega\omega'} - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega u}{\omega'}\right)^2$; sie kann in ein Paraboloid und in einen Kegel degeneriren.

Auf die Hauptaxen bezogen, ist die Gleichung der Fläche

$$(\omega' + \sqrt{\omega'^2 + \omega^2\psi^2})\, x^2 + \omega' y^2 + (\omega' - \sqrt{\omega'^2 + \omega^2\psi^2})\, z^2 + 2\frac{v_0 v_0'}{\omega} - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2 u^2}{\omega'} = 0.$$

Von den Hauptaxen, welche in die xz-Ebene fallen, bildet die eine mit den Axen der x und z Winkel, deren Cosinusse das Verhältniss haben

$$\omega\psi\,(\omega' + \sqrt{\omega'^2 + \omega^2\psi^2}) : \omega'^2.$$

Für $\omega' = 0$ rückt der Mittelpunkt ins Unendliche und wird die Fläche ein hyberbolisches Paraboloid, für $\frac{v_0 v_0'}{\omega\omega'} - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega u}{\omega'}\right)^2 = 0$ wird sie ein Kegel.

Die Systempunkte, für welche $N_2 = 0$ ist, welche also keine Normalbeschleunigung senkrecht gegen die Momentanaxe c besitzen, genügen der Bedingung

$$x^2 + y^2 - \frac{\psi}{\omega} yz + \left(\frac{u}{\omega} + \frac{v_0\psi}{\omega^2}\right) x = 0;$$

sie liegen also auf einer Fläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der Richtung der durch den Punkt O gezogenen Winkelbeschleunigungsaxe im Abstande $\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}+\frac{v_0\psi}{\omega^2}\right)$ von O liegt. In Bezug auf diesen Mittelpunkt bei denselben Axenrichtungen, wie bisher wird, die Gleichung

$$x^2+y^2-\frac{\psi}{\omega}yz=\frac{1}{4}\left(\frac{u}{\omega}+\frac{v_0\psi}{\omega^2}\right)^2.$$

Senkrecht zur Momentanaxe wird die Fläche in Kreisen geschnitten. Die x-Axe ist eine Hauptaxe; von den beiden andern Hauptaxen, welche parallel zur Ebene (cu) sind, bildet die eine mit der y- und z-Axe Winkel, deren Richtungscosinusse das Verhältniss $\psi\sqrt{\omega^2+\psi^2}:\omega^2$ haben. Auf die Hauptaxen bezogen ist die Gleichung der Fläche

$$x^2+(\omega+\sqrt{\omega^2+\psi^2})\,y^2+(\omega-\sqrt{\omega^2+\psi^2})\,z^2=\frac{1}{2}\left(u+\frac{v_0\psi}{\omega}\right)^2.$$

Sie stellt ein einfaches Hyperboloid dar.

Der geometrische Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung senkrecht zur Momentanaxe ist ein einfaches Hyperboloid, dessen Mittelpunkt auf der Axe n des Punktes O liegt. Dasselbe wird von Ebenen senkrecht zur Momentanaxe in Kreisen geschnitten und ist die Axe n eine Hauptaxe desselben. Die Schmiegungsebenen der Bahnen der Punkte des Ortes sind parallel der Momentanaxe.

Der Ort aller Punkte, für welche die Normalbeschleunigungscomponente $N_1=0$ wird, ist eine Fläche dritten Grades

$$(\omega v_0'-\omega' v_0+\omega^2\psi y)\,(x^2+y^2)+\omega\psi v_0 xz+(\omega u+v_0\psi)\,v_0 y=0.$$

Der Ort aller Punkte ohne alle Normalbeschleunigung ist wegen der Rechtwinkligkeit von N_1 und N_2, in Folge deren dieselben einzeln verschwinden müssen, eine Curve 6. Grades, nämlich die Durchschnittslinie der ebengenannten Fläche dritten Grades mit dem Hyperboloide $N_2=0$.

§. 9. Unter Beibehaltung desselben Coordinatensystems kann man leicht die Componenten X, Y, Z der Beschleunigung eines Systempunktes parallel den Coordinatenaxen bestimmen. Die Componenten der centripetalen Beschleunigung $\omega^2 r$ sind nämlich $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$, 0. Die von der Winkelbeschleunigung α herrührenden ergeben sich aus den Formeln Cap. XIV, §. 15. wenn man $\alpha_x=\omega\psi$, $\alpha_y=0$, $\alpha_z=\omega'$ setzt, nämlich

$$\begin{vmatrix}\alpha_y & \alpha_z\\ y & z\end{vmatrix}=-\omega' y,\quad \begin{vmatrix}\alpha_z & \alpha_x\\ z & x\end{vmatrix}=\omega' x-\omega\psi z,\quad \begin{vmatrix}\alpha_x & \alpha_y\\ x & y\end{vmatrix}=\omega\psi y.$$

Die Componente v_0' hat die Richtung der z-Axe, die $\omega u+v_0\psi$ die der x-Axe. Demnach sind

$$X=-\omega^2 x-\omega' y+\omega u+v_0\psi,\quad Y=\omega' x-\omega^2 y-\omega\psi z,\quad Z=\omega\psi y+v_0'$$

Setzt man diese Grössen sämmtlich gleich Null, so hat man für die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Beschleunigungsmittelpunktes G_0

$-\omega^2 x_0 - \omega' y_0 + \omega u + v_0 \psi = 0, \quad \omega' x_0 - \omega^2 y_0 - \omega\psi z_0 = 0, \quad \omega\psi y_0 + v_0' = 0,$
woraus die Formeln des §. 3. folgen. Der Beschleunigungsmittelpunkt erscheint hier als der Durchschnittspunkt dreier Ebenen, deren Bedeutung, wie man leicht sieht, mit der Construction des §. 2. für den Punkt G_0 harmonirt. Die erste ist parallel zur Momentanaxe im Abstande $(\omega u - v_0 \psi) : \vartheta$, die zweite zu ihr senkrecht durch den Ursprung geführt, die dritte ist die Ebene parallel (ch) im Abstande $-v_0' : \omega\psi$.

Subtrahirt man die Gleichungen für G_0 von denen für X, Y, Z und setzt $x - x_0 = \xi$, $y - y_0 = \eta$, $z - z_0 = \zeta$, so dass ξ, η, ζ Coordinaten des Systempunktes werden für ein dem ursprünglichen paralleles Coordinatensystemes mit dem Ursprunge in G_0, so erhält man

$$X = -\omega^2 \xi - \omega' \eta, \quad Y = \omega' \xi - \omega^2 \eta - \omega\psi\zeta, \quad Z = \omega\psi\eta.$$

Hierin erkennt man die Darstellung der Beschleunigung durch die Componenten $\omega^2 p$, $\alpha' p$ des §. 4.

Quadrirt und addirt man die Ausdrücke für X, Y, Z in der einen oder der andern Form, so erhält man, indem man die Quadratsumme gleich einer Constanten setzt, die Gleichung des Ellipsoids §. 6, bezogen auf O oder G_0 als Ursprung.

Um X, Y, Z auf die Richtung von r zu projiciren, hat man sie mit $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, 0 zu multipliciren, wenn als positiv der Sinn von der Axe c abgewandt gilt; dies liefert

$$S = X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r}.$$

Auf die Richtung von ωr senkrecht zur Ebene (cr) werden X, Y, Z projicirt durch die Multiplication mit $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0; dies liefert

$$T = Y\frac{x}{r} - X\frac{y}{r};$$

endlich in der Richtung parallel zur Momentanaxe hat man blos Z. Um die Tangentialbeschleunigung φ_t zu bilden, hat man, wenn a der Winkel ist, den die Tangente der Bahn mit der Axe c bildet,

$$\varphi_t = Z \cos a - T \sin a.$$

Um die Normalbeschleunigung zu erhalten, hat man

$$\varphi_n^2 = (Z \sin a - T \cos a)^2 + S^2.$$

Die Substitution der Werthe für

$$S,\ T,\ X,\ Y,\ Z,\ \cos a = v_0 : \sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2},\ \sin a = \omega r : \sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2}$$

führt zu den Ausdrücken in §. 7.

§. 10. Man kann die bisher geführten Untersuchungen auch rein analytisch in grösster Allgemeinheit behandeln. Es sei hierfür ein festes Coordinatensystem der x, y, z und ein bewegliches der x', y', z', welches mit dem System, um dessen Bewegung es sich handelt, fest verbunden ist. Man hat dann, wie früher die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ax' + a'y' + a''z' \\ y &= y_0 + bx' + b'y' + b''z' \\ z &= z_0 + cx' + c'y' + c''z', \end{aligned}$$

worin x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs, den wir auf der Momentanaxe im Fusspunkte ihres kürzesten Abstandes von der folgenden Momentanaxe annehmen wollen, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' aber die Richtungscosinusse der Axen x', y', z' gegen die festen Axen bedeuten. Differentiirt man diese Gleichung zweimal und bedenkt, dass x', y', z' von der Zeit nicht abhängen, sondern die unveränderliche Lage des Systempunktes im System bestimmen, so erhält man für die Componenten $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ der Beschleunigung φ des Systempunktes parallel den festen Axen die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2a'}{dt^2} + z'\frac{d^2a''}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + x'\frac{d^2b}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2} + z'\frac{d^2b''}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} + x'\frac{d^2c}{dt^2} + y'\frac{d^2c'}{dt^2} + z'\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

Die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Beschleunigungsmittelpunktes genügen den Bedingungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0,$$

seine Lage im System wird daher durch die Gleichungen

$$0 = \frac{d^2x_0}{dt^2} + x'_1\frac{d^2a}{dt^2} + y'_1\frac{d^2a'}{dt^2} + z'_1\frac{d^2a''}{dt^2}$$

$$0 = \frac{d^2y_0}{dt^2} + x'_1\frac{d^2b}{dt^2} + y'_1\frac{d^2b'}{dt^2} + z'_1\frac{d^2b''}{dt^2}$$

$$0 = \frac{d^2z_0}{dt^2} + x'_1\frac{d^2c}{dt^2} + y'_1\frac{d^2c'}{dt^2} + z'_1\frac{d^2c''}{dt^2}$$

bestimmt. Subtrahirt man diese Gleichungen von den vorigen, für die Componenten der Beschleunigung aufgestellten, so erhält man diese Componenten etwas einfacher dargestellt, falls man den Beschleunigungsmittelpunkt zum Ursprunge der Coordinaten $\xi = x' - x'_1$, $\eta = y' - y'_1$, $\zeta = z' - z'_1$ wählt, nämlich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \xi\frac{d^2a}{dt^2} + \eta\frac{d^2a'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2a''}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \xi\frac{d^2b}{dt^2} + \eta\frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2b''}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \xi\frac{d^2c}{dt^2} + \eta\frac{d^2c'}{dt^2} + \zeta\frac{d^2c''}{dt^2}.$$

Nachdem man die Coordinaten x'_1, y'_1, z'_1 des Beschleunigungsmittelpunktes im System gefunden, ergeben sich mit Hülfe der zu Anfang des Paragraphen aufgestellten Gleichungen auch dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 im absoluten Raume.

Die Normal- und Tangentialbeschleunigung φ_n, φ_t eines Systempunktes ergeben sich auf folgende Weise. Der Contingenzwinkel $d\varepsilon$ der Bahn eines Punktes (wenn wir die Differentiationen alle auf die Zeit t als unabhängige Variabele beziehen und $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, $\frac{dz}{dt} = z'$, $\frac{ds}{dt} = s'$ setzen, woraus $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ und wenn zwei Accente eine zweimalige Differentiation nach t bedeuten,

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z''$$

folgen) ist gegeben durch die Gleichung

$$d\varepsilon^2 = \left(d \cdot \frac{x'}{s'}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{y'}{s'}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{z'}{s'}\right)^2 \text{ *)}$$

und folglich ist nach Ausführung der Differentiationen:

$$\begin{aligned} s'^4 \cdot \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 &= (s'x'' - s''x')^2 + (s'y'' - s''y')^2 + (s'z'' - s''z')^2 \\ &= s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) + s''^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2s's''(x'x'' + y'y'' + z'z'') \\ &= (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \\ &= (x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - x'z'')^2. \end{aligned}$$

Da der Krümmungshalbmesser ϱ durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{s'}{\dfrac{d\varepsilon}{dt}}$$

bestimmt wird, so hat man zufolge der vorstehenden Relationen und mit Rücksicht auf die Bedeutung der zur Abkürzung gebrauchten Schreibweise

$$\frac{s'^6}{\varrho^2} = \left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2.$$

Da aber $\frac{ds}{dt} = v$, so stellt dieser Ausdruck das Quadrat von

$$\frac{v^2}{\varrho} \cdot v = \varphi_n \cdot v$$

dar, wodurch φ_n als gefunden zu betrachten ist. Ferner ergibt sich durch Differentiation von

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

die weitere Gleichung

$$v\frac{dv}{dt} = v\varphi_t = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Hiermit erhält man für die geometrischen Orte der Systempunkte ohne Normalbeschleunigung und ohne Tangentialbeschleunigung:

---

*) Sind nämlich a, b, c die Richtungscosinusse einer Geraden in einer ersten Lage, so sind $a + da$, $b + db$, $c + dc$ die Richtungscosinusse für ihre nächstfolgende Lage und wenn wir mit dieser Geraden in beiden Lagen durch den Ursprung Parallele legen und auf ihnen vom Ursprunge aus Strecken gleich der Längeneinheit auftragen, so stellen jene sechs Grössen die Coordinaten der Endpunkte dar. Daher ist die Länge $d\varepsilon$ der Verbindungslinie der Endpunkte

$$d\varepsilon = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

Ist die in beiden Lagen betrachtete Linie die Tangente, so wird

$$a = dx : ds = x' : s', \quad b = y' : s', \quad c = z' : s'$$

und daher der Contingenzwinkel

$$d\varepsilon = \sqrt{\left[\left(d \cdot \frac{x'}{s'}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{y'}{s'}\right)^2 + \left(d \cdot \frac{z'}{s'}\right)^2\right]}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{dy}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2};$$

der erste Ort ist stets eine Curve, der zweite eine Fläche.

In den Ausdrücken für die Componenten der Beschleunigung kommen die ersten und zweiten Derivirten der Cosinusse $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$ vor. Um dieselben zu entwickeln, bedenken wir, dass

$$a = \cos(XX'),\quad a' = \cos(XY'),\quad a'' = \cos(XZ')$$

die Coordinaten eines Punktes P sind in der Einheit der Entfernung von dem beweglichen Ursprunge O, dessen Radiusvector OP parallel der x-Axe ist, in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem x', y', z'. Daher sind $\frac{da}{dt}, \frac{da'}{dt}, \frac{da''}{dt}$ die Componenten der relativen Geschwindigkeit des Punktes P bezüglich dieser Axen. Zerlegt man nun die Winkelgeschwindigkeit ω um die Momentanaxe in ihre Componenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ parallel den Axen der x', y', z', so sind

$$a'\omega_{z'} - a''\omega_{y'},\quad a''\omega_{x'} - a\omega_{z'},\quad a\omega_{y'} - a'\omega_{x'}$$

die Componenten jener relativen Geschwindigkeit, also

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= a'\omega_{z'} - a''\omega_{y'}, \\ \frac{da'}{dt} &= a''\omega_{x'} - a\omega_{z'} \\ \frac{da''}{dt} &= a\omega_{y'} - a'\omega_{x'}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{d^2a}{dt^2} = a'\,\frac{d\omega_{z'}}{dt} - a''\,\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \omega_{z'}\,\frac{da'}{dt} - \omega_{y'}\,\frac{da''}{dt}$$

und in ähnlicher Weise $\frac{d^2a'}{dt^2}, \frac{d^2a''}{dt^2}$.

In jenen Ausdrücken kommen auch die Grössen $\frac{d^2x_0}{dt^2}, \frac{d^2y_0}{dt^2}, \frac{d^2z_0}{dt^2}$ vor, welche die Componenten der Beschleunigung des beweglichen Coordinatenursprungs darstellen. Wir wollen auch diese zweckmässig umformen. Der Punkt x_0, y_0, z_0 besitzt die Componenten der Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = v_0\,\frac{\omega_{x'}}{\omega},\quad \frac{dy_0}{dt} = v_0\,\frac{\omega_{y'}}{\omega},\quad \frac{dz_0}{dt} = v_0\,\frac{\omega_{z'}}{\omega}$$

parallel der Momentanaxe und erlangt von Seiten der Translationsgeschwindigkeit des Systems die Elementarbeschleunigungscomponenten

$$d\left(v_0\,\frac{\omega_{x'}}{\omega}\right),\quad d\left(v_0\,\frac{\omega_{y'}}{\omega}\right),\quad d\left(v_0\,\frac{\omega_{z'}}{\omega}\right).$$

Durch die Rotation um die folgende Momentanaxe, deren kürzester Abstand von der ersteren de sei, erlangt er aber weitere Elementarbeschleunigungscomponenten, nämlich wenn λ, μ, ν die Cosinusse der Richtungswinkel von de gegen die beweglichen Axen sind

$$(\mu\,.\,\omega_{z'} - \nu\,.\,\omega_{y'})\,de,\quad (\nu\cdot\omega_{x'} - \lambda\,.\,\omega_{z'})\,de,\quad (\lambda\,.\,\omega_{y'} - \mu\,.\,\omega_{x'})\,de.$$

Daher sind seine Beschleunigungscomponenten überhaupt:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \frac{\omega_{x'}}{\omega}\right) + (\mu \cdot \omega_{z'} - \nu \cdot \omega_{y'}) \frac{de}{dt}$$

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \frac{\omega_{y'}}{\omega}\right) + (\nu \cdot \omega_{x'} - \lambda \cdot \omega_{z'}) \frac{de}{dt}$$

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(v_0 \frac{\omega_{z'}}{\omega}\right) + (\lambda \cdot \omega_{y'} - \mu \cdot \omega_{x'}) \frac{de}{dt}.$$

Bisher liessen wir die Wahl der Coordinatenaxen ganz frei; nehmen wir aber jetzt an, dass die Axe der z' mit der Momentanaxe und die Axe der x' mit der Richtung des kürzesten Abstandes de zusammenfalle, sowie dass zu Anfang des Zeitelementes dt die Richtungen der beweglichen Axen in den Richtungen der correspondirenden festen Axe liegen, durch die Bewegung des Systems aber aus dieser Lage herausgehoben werden. Dann erhält man folgendes System von Werthen für

$$x_0 y_0 z_0, \quad \lambda\mu\nu, \quad aa'a'', \quad bb'b'', \quad cc'c''$$

und ihre Derivirten der ersten und zweiten Ordnung:

$$\omega_{x'} = 0, \quad \omega_{y'} = 0, \quad \omega_{z'} = \omega, \quad \lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0,$$

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0, \quad \frac{dz_0}{dt} = v_0,$$

$$\begin{array}{lll} a = 1 & a' = 0 & a'' = 0 \\ b = 0 & b' = 1 & b'' = 0 \\ c = 0 & c' = 0 & c'' = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \dfrac{da}{dt} = 0 & \dfrac{da'}{dt} = -\omega & \dfrac{da''}{dt} = 0 \\ \dfrac{db}{dt} = \omega & \dfrac{db'}{dt} = 0 & \dfrac{db''}{dt} = 0 \\ \dfrac{dc}{dt} = 0 & \dfrac{dc'}{dt} = 0 & \dfrac{dc''}{dt} = 0 \end{array}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\omega^2, \quad \frac{d^2a'}{dt^2} = -\frac{d\omega_z}{dt}, \quad \frac{d^2a''}{dt^2} = \frac{d\omega_y}{dt}$$

$$\frac{d^2b}{dt^2} = -\omega^2, \quad \frac{d^2b'}{dt^2} = -\frac{d\omega_x}{dt}, \quad \frac{d^2b''}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt}$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2c'}{dt^2} = -\frac{d\omega_y}{dt}, \quad \frac{d^2c''}{dt^2} = \frac{d\omega_x}{dt}$$

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{v_0}{\omega}\frac{d\omega_x}{dt}, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{v_0}{\omega}\frac{d\omega_y}{dt} - \omega\frac{de}{dt}, \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} = \frac{dv_0}{dt}$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy'}{dt} = \omega x', \quad \frac{dz'}{dt} = v_0$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \omega^2 x' - \frac{d\omega_z}{dt} y' + \frac{d\omega_y}{dt} z'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} - \omega^2 y' - \frac{d\omega_x}{dt} z' + \frac{d\omega_z}{dt} x'$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} - \frac{d\omega_y}{dt} x' + \frac{d\omega_x}{dt} y',$$

welche Ausdrücke für die weitere Verfolgung eines Problems in die obigen Gleichungen einzuführen sind.

§. 11. An die bisherigen Untersuchungen über die Beschleunigungen der Windungsbewegung lassen sich weitere über die Krümmungsverhältnisse der Bahnen der Systempunkte, der Systemgeraden und sonstigen Systemcurven anschliessen, in ähnlicher Weise, wie wir für die Beschleunigung der ebenen Bewegung Cap. XIII, §. 12 und ffg. und der sphärischen Bewegung Cap. XIV, §. 16 und ffg., gethan haben. Dieses umfangreiche Gebiet der Geometrie der Bewegung hat noch verhältnissmässig wenige Bearbeiter gefunden. Für weniger allgemeine Fragen dieser Theorie, wie z. B. die Krümmungsverhältnisse der Bahnen gewisser Punktgruppen sind ausgezeichnete Forschungen vorhanden, insbesondere von Mannheim. Wir wollen einige der hieher gehörigen Sätze entwickeln.

Wir haben früher bewiesen, dass wenn eine Gerade g in der Ebene sich bewegt, die Tangenten der Bahnen aller ihrer Punkte, entsprechend irgend einer bestimmten Lage derselben, eine Parabel berühren (Cap. IV, §. 3) und dass die Krümmungsmittelpunkte derselben auf einem Kegelschnitt liegen (Cap. XIII, §. 14, Nr. 4). Ebenso, dass die Tangenten der Bahnen der Punkte einer sich im Raume bewegenden Geraden ein hyperbolisches Paraboloid erfüllen (Cap. VII, §. 4, Nr. 1). Wir knüpfen hieran an und beweisen folgende Sätze:

Die Krümmungsaxen der Bahnen der Punkte einer Geraden g, welche eine Windungsbewegung besitzt, erfüllen ein einfaches Hyperboloid. Die Krümmungsaxe einer Curve doppelter Krümmung ist die Gerade, welche im Krümmungsmittelpunkte auf der Schmiegungsebene senkrecht steht. Die Normalebenen der Bahnen der Punkte A von g schneiden sich alle in der zu g conjugirten Geraden g_0 des durch die Elementarschraubenbewegung bestimmten Complexes. Sie bilden also um g_0 als Axe einen Ebenenbüschel, dessen Ebenen durch die Punkte A gehen. Ebenso schneiden sich die Normalebenen der zu den Punkten A homologen Punkte A' der folgenden Lage g' der Geraden g in der zu g' conjugirten Geraden g_1 und bilden um g_1 einen Ebenenbüschel, dessen Ebenen durch die Punkte A' auf g' gehen. Da die Punktreihe (A) congruent der Punktreihe (A') ist, so sind die Büschel projectivisch. Daher schneiden sich die entsprechenden durch A und A' gehenden Paare von Normalebenen in den Erzeugungslinien eines Hyperboloids, welches g_0 und g_1 enthält und also den Ort aller conjugirten Graden berührt.

Auf der Geraden g gibt es nicht nothwendig Punkte A, welche eben Wendepunkte ihrer Bahnen passiren. Denn das genannte einfache Hyperboloid hat keine unendlich fernen Geraden und kann mithin der Krümmungsmittelpunkt, welcher der Schnittpunkt der Krümmungsaxe mit der Schmiegungsebene ist, im Allgemeinen nicht ins Unendliche rücken. Damit dies eintrete, muss das Hyperboloid in ein hyperbolisches Paraboloid degeneriren, d. h. es müssen alle Krümmungsaxen einer Ebene parallel und mithin alle Schmiegungsebenen zu dieser Ebene senkrecht sein. Die Schmiegungsebenen müssen also einen Cylinder berühren oder zusammenfallen. Da das hyperbolische Paraboloid nur zwei unendlich ferne Geraden besitzt, so kann es auf einer Geraden höchstens zwei Wendepunkte geben.

Die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln der Bahnen der Punkte einer Geraden g liegen auf einer Curve dritter Ordnung. Denn der Mittelpunkt der Schmiegungskugel einer Curve ist der Schnittpunkt zweier aufeinanderfolgender Krümmungsaxen. Nun ist der Ort aller ersten Krümmungsaxen ein erstes Hyperboloid, der aller folgenden Krümmungsaxen das folgende Hyperboloid. Beide Hyperboloide enthalten daher den Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln. Sie haben aber die Gerade g_1 gemein, da das erste durch g_0, g_1, das zweite durch g_1 und die folgende conjugirte Gerade g_2 hindurchgeht. g_1 ist aber nicht Krümmungsaxe, weil sonst die Bewegung nicht Windungsbewegung sein könnte. Daher ist der übrige Theil des Schnittes beider Flächen, d. h. eine Raumcurve dritten Grades der gesuchte Ort der Mittelpunkte.

Auf der Geraden g gibt es höchstens drei Punkte, deren Schmiegungsebenen stationär sind. Denn soll die Schmiegungsebene für zwei Lagen ihres Berührungspunktes mit der Curve dieselbe sein, so müssen die Krümmungsaxen beider Lagen parallel sein, es muss also der Mittelpunkt der Schmiegungskugel ins Unendliche rücken. Die Curve dritter Ordnung hat aber höchstens drei unendlich ferne Punkte. Daher etc.

Die Systempunkte, für welche die Schmiegungsebene stationär ist, erfüllen eine Fläche dritter Ordnung: Denn auf einer Geraden liegen höchstens drei Punkte stationärer Schmiegungsebene. Da eine Fläche dritter Ordnung höchstens 27 Gerade enthält, so erhellt, dass es in jedem Moment höchstens 27 Gerade im System gibt, deren Punkte stationäre Schmiegungsebene besitzen.

Einige Literatur über die Beschleunigung der Windungsbewegung.

Resal, Mémoire sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général d'un corps solide. Journ. de l'Ecole polytechn. T. XXI (37^me^ cah.), p. 227—271 und Traité de cinématique pure, p. 197 et sqq. Auf ein Versehen in der Theorie Resal's machte aufmerksam: Sabinine, sur l'accélération normale à la trajectoire d'un point d'un système invariable mobile dans son mouvement le plus général. Nouv. Annales de Mathém. II^me^. Série, T. 12, p. 257 (1873).

Jordan, sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace. Bulletin de la société mathém. de France, T. 1, p. 144 (1873). In dieser Abhandlung, welche in grosser Allgemeinheit der Analyse alle Ordnungen der Beschleunigungen umfasst, sind das Ellipsoid constanter Beschleunigung und die übrigen Orte ausgezeichneter Beschleunigung behandelt. Das Ellipsoid wurde bereits 1870 von dem Verfasser dieses Buches sehr bald nach vollendetem Drucke der 1. Auflage desselben gefunden und alljährlich in seinen Vorlesungen über theoretische Mechanik entwickelt. Die Mittheilung von Liguine, Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes (Bullet. de la société mathém. de France T. 1, p. 152) ist identisch mit einem Theile dessen, was der Verfasser vorliegenden Buches über diesen Gegenstand vorzutragen pflegte.

Somoff, Theoretische Mechanik, a. d. Russischen übers. v. Ziwet, Cap. XV, §. 165, p. 347 u. ffg.

Besonders wichtige Abhandlungen von Mannheim: 1. Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions (Compt. rend. de l'Acad. des sc. T. 70, p. 1215 (1870). 2. Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions (Cpt. r. T. 70, p. 1259). 3. Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace (Cpt. r. T. 76, pp. 551 et 635 (1873). 4. Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions (Mém. des savants étr. T. XXII, Nr. 12. et Rapport des MM. Bertrand, Bonnet, Chasles; Cpts. r. T. 76, p. 752 (1873)).

XVI. Capitel.

Die Beschleunigung der relativen Bewegung eines Punktes im unveränderlichen System.

§. 1. Bereits im III. Cap., §. 15. wurde gezeigt, dass die absolute Geschwindigkeit eines Punktes die Resultante seiner relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Systempunktes ist, welcher eben mit ihm zusammenfällt. Hier soll nun untersucht werden, in welcher Weise die Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit von den Beschleunigungen der relativen Geschwindigkeit und der Beschleunigung der Geschwindigkeit des Systempunktes abhängt. Es wird sich zeigen, dass die erstere nicht blos aus den beiden letzteren allein sich bildet, sondern dass zu diesen noch eine dritte Componente hinzutritt, die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung.

Es sei v die absolute Geschwindigkeit des beweglichen Punktes M zur Zeit t; sie ist die Resultante seiner relativen Geschwindigkeit v_r im System und der Geschwindigkeit v_s des Systempunktes m, der zur Zeit t mit ihm zusammenfällt. Ebenso seien v', v'_r, v'_s die absolute und relative Geschwindigkeit des beweglichen Punktes zur Zeit $t + dt$, zu welcher er die absolute Lage M' hat, sowie die Geschwindigkeit des Systempunktes m', der zur Zeit $t + dt$ mit ihm zusammentrifft. Auch hier ist v' die

Resultante von v_r', v_s'. Ziehen wir nun durch irgend einen Punkt O des Raumes (Fig. 207) zwei Gerade $O\,V$, $O\,V'$ geometrisch gleich den absoluten Geschwindigkeiten v, v', so stellt $V\,V'$ die Elementarbeschleunigung du der absoluten Bewegung zur Zeit t dar.

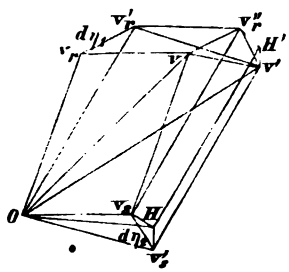

Fig. 207.

Ziehen wir ebenso durch O zwei andere Gerade $O\,V_r$, $O\,V_r'$ gleich parallel und von gleichem Sinne mit den Geschwindigkeiten v_r, v_r' der relativen Bewegung, so würde $V_r\,V_r' = d\eta_1$ die Elementarbeschleunigung du_r der relativen Bewegung sein, wenn die relative Bahn ruhte und nicht selbst in Folge der Elementarschraubenbewegung des Systems eine Lagenänderung erlitte und dadurch eine Richtungsänderung der relativen Geschwindigkeit herbeigeführt würde. So aber zerfällt $d\eta_1$ in zwei Componenten, von denen nur eine die relative Elementarbeschleunigung ist, während die zweite eine ganz andere Bedeutung hat. Zwei Gerade endlich durch O, geometrisch gleich den Geschwindigkeiten v_s, v_s' der Systempunkte m und m' zu den Zeiten t und $t + dt$, nämlich $O\,V_s$, $O\,V_s'$ liefern eine dritte unendlich kleine Beschleunigung $V_s\,V_s' = d\eta_2$, welche zwar nicht unmittelbar die Elementarbeschleunigung du_s des Systempunktes m zur Zeit t darstellt, wohl aber durch diese und die Elemente der Bewegung des Systems zu dieser Zeit ausdrückbar ist. Durch parallele Uebertragung der Linienelemente $d\eta_1$, $d\eta_2$ an $V\,V'$ zeigt sich, dass

$$[V\,V'] = [V_r\,V_r'] + [V_s\,V_s'] \text{ d. h. } [du] = [d\eta_1] + [d\eta_2]$$

ist.

Die Componente $d\eta_1$ ist das geometrische Differential der relativen Geschwindigkeit v_r, d. h. die unendlich kleine Aenderung der Linie $O\,V_r$ nach Grösse und Lage im Raume und zerfällt in zwei Componenten, von denen die eine von der Bewegung auf der relativen Bahn und die andere von der Bewegung der relativen Bahn selbst herrührt. Die erste ist die relative Elementarbeschleunigung du_r, wie sie sich ergeben würde, wenn die relative Bahn nicht an der Bewegung des Systems Theil nehmen würde und welche v_r nach Grösse und Richtung so abändert, dass die Richtung in die folgende Tangente der relativen Bahn in der Lage dieser Bahn zur Zeit t übergeht. Die zweite Componente ist die Aenderung der Lage von v_r im Raum, welche durch die Elementarschraubenbewegung des Systems um die Momentanaxe herbeigeführt wird.

Durch die Translationsgeschwindigkeit tritt zu v_r keine Elementarbeschleunigung hinzu, da ihre Grösse überhaupt nicht durch die Schraubenbewegung des Systems, ihre Richtung aber blos durch die Rotationscomponente dieser geändert wird. Die Rotation um die Momentanaxe ist aber äquivalent derselben Rotation um eine durch m gehende, ihr parallele Axe und einer Translation. Letztere übt auf die relative Geschwindigkeit ebenso wenig, wie die eben erwähnte, einen verändernden Einfluss aus. Die gesuchte Beschleunigungscomponente hängt also blos von der Winkelgeschwindigkeit ω um die durch m gehende Axe ab. Nun beschreibt aber der Endpunkt von v_r in Folge dieser einen unendlich kleinen zur Ebene, welche durch v_r und die Momentanaxe geführt werden kann, senkrechten Kreisbogen im Sinne von ω, dessen Grösse gleich ωdt multiplicirt mit dem Abstande dieses Endpunktes von der Rotationsaxe ist. Dieser Abstand ist $v_r \sin \alpha$, wenn α den Winkel zwischen v_r und der Axe bedeutet und gleich der Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene. Die gesuchte Beschleunigungscomponente ist daher

$$\omega v_r \sin \alpha \, dt$$

und senkrecht zu der durch die relative Geschwindigkeit parallel zur Momentanaxe geführten Ebene, dem Sinne nach harmonirend mit ω. Demnach bildet sich $d\eta_1$ aus du_r und $\omega v_r \sin \alpha \, dt$, so dass

$$[d\eta_1] = [du_r] + [\omega v_r \sin \alpha \, . \, dt]$$

wird.

Um die Componente $d\eta_2$ zu bestimmen, legen wir durch O eine Gerade OH geometrisch gleich der Geschwindigkeit des Punktes m' zur Zeit t, nämlich des Systempunktes, welcher zur Zeit $t + dt$ mit dem Punkte M zusammenfällt. Dann ist HV'_s die Elementarbeschleunigung der Bewegung des Systempunktes m' zur Zeit t, die wir du'_s nennen wollen; $V_s H$ aber wird eine unendlich kleine Beschleunigungscomponente darstellen, welche zur Geschwindigkeit des Punktes m, welcher zur Zeit t mit M zusammenfällt, hinzutreten muss, um aus derselben in die Geschwindigkeit des folgenden Systempunktes m' für dieselbe Zeit t zu bilden, welcher zur Zeit $t + dt$ mit M zusammentrifft. Diese Componente, welche in die Untersuchung dadurch eintritt, dass der Punkt M im System vom Punkte m zum Punkte m' wandert, ist also das geometrische Differential zwischen den Geschwindigkeiten der Punkte m und m' zu ein und derselben Zeit t. Nun haben beide Punkte eine Geschwindigkeitscomponente parallel der Momentanaxe gemein; in ihre Richtung fällt mithin kein Bestandtheil unserer gesuchten Componente. Sie haben aber beide auch Geschwindigkeitscomponenten $r\omega$, $r'\omega$ senkrecht zu den Ebenen, welche man durch sie und die Momentanaxe legen kann, unter r, r' ihre Abstände von dieser Axe verstanden. Stellt daher die Ebene der Fig. 208 die Projectionen von m, m', r, r' auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene dar und zieht man zu $m_1 V = r\omega$ noch die Linie $m_1 V'$ geometrisch gleich $m'_1 V' = r'\omega$, so bedeutet VV' die gesuchte unendlich kleine Grösse. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $m_1 VV'$ und $Om_1 m'_1$ ergibt sich aber sofort

$$VV' : r\omega = m_1 m_1' : r,$$

d. h. $VV' = m_1 m_1' \, . \, \omega$. Nun wandert der Punkt M im System von m nach m' und ist $m_1 m_1'$ die Projection seines Elementarweges in demselben auf die Ebene senkrecht zur Momentanaxe. Daher stellt $\frac{m_1 m_1'}{dt}$ die Projection $v_r \sin \alpha$ seiner relativen Geschwindigkeit auf dieselbe Ebene dar und wird folglich

$$VV' = \omega v_r \sin \alpha \, . \, dt \, .$$

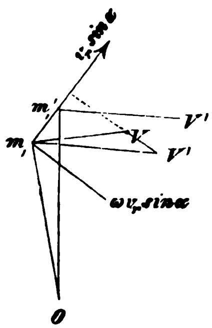

Fig. 208.

Diese Componente ist senkrecht zu der Ebene, welche durch die relative Geschwindigkeit parallel zur Momentanaxe gelegt werden kann und ihr Sinn stimmt überein mit dem Sinne von ω. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $m_1 V V'$ und $O m_1 m_1'$, von denen zwei Seitenpaare zu einander rechtwinklig sind, folgt nämlich, dass VV' senkrecht ist zu $m_1 m_1'$.

Demnach wird

$$[d\eta_2] = [du_s'] + [\omega v_r \sin \alpha \, . \, dt] \, .$$

Indem wir die für $d\eta_1$ und $d\eta_2$ gefundenen Ausdrücke in die Formel $[du] = [d\eta_1] + [d\eta_2]$ einsetzen, die ganze Gleichung mit dt dividiren,

$$\frac{du}{dt} = \varphi, \quad \frac{du_r}{dt} = \varphi_r, \quad \omega v_r \sin \alpha = \varphi_\omega$$

setzen und bedenken, dass $\frac{du_s'}{dt}$ in der Grenze in die Beschleunigung $\varphi_s = \frac{du_s}{dt}$ des Systempunktes m übergeht, erhalten wir

$$[\varphi] = [\varphi_r] + [\varphi_s] + [\varphi_\omega] \, .$$

Diese Gleichung spricht den folgenden, zuerst von Coriolis, wenn auch in etwas anderer Form, auf analytischem Wege gefundenen Satz aus:

Die Beschleunigung φ der absoluten Geschwindigkeit eines Punktes M hat drei Componenten: 1. die Beschleunigung φ_r der relativen Geschwindigkeit, 2. die Beschleunigung φ_s des Systempunktes m, mit welchem eben M zusammentrifft und 3. eine Beschleunigung $\varphi\omega = 2\omega v_r \sin \alpha$, an Grösse gleich dem doppelten Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe und der Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur Momentanaxe rechtwinklige Ebene, der Richtung nach senkrecht zu der Ebene, welche durch die relative Geschwindigkeit zur Momentanaxe parallel geführt werden kann und dem Sinne nach mit ω übereinstimmend.

Die Componente φ_ω heisst, freilich wenig passend, die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung des Punktes M und wenn sie in umgekehrtem Sinne genommen auftritt, die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung, von der wir bald reden werden. Sie ist aus zwei gleichen Bestandtheilen gebildet, von denen der eine aus dem Fortschreiten des Punktes im System, der andere von der Rotation der relativen Bahn um die Momentanaxe entspringt.

§. 2. Besitzt das System blos eine Translationsgeschwindigkeit d. h. ist $\omega = 0$, so ist die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung $\varphi_\omega = 0$. Dasselbe findet statt, wenn der bewegliche Punkt sich in relativer Ruhe befindet, d. h. wenn $v_r = 0$, oder wenn v_r der Momentanaxe parallel läuft, d. h. $\alpha = 0$ ist.

Ist die relative Bewegung eines Punktes in einem unveränderlichen System aus zwei anderen relativen Bewegungen in demselben Systeme zusammengesetzt, so ist die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung derselben die Resultante aus den zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen jener in Beziehung auf dasselbe System. Sind nämlich v_r', v_r'' die beiden Componenten der relativen Geschwindigkeit v_r des beweglichen Punktes M (Fig. 209), so ziehe man durch M eine Gerade parallel der Momentanaxe des Systems und lege durch sie und die Richtungen der drei Geschwindigkeiten drei Ebenen. Diese liefern die Projectionen $v_r' \sin\alpha'$, $v_r'' \sin\alpha''$, $v_r \sin\alpha$ derselben auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene und es sind die letzteren drei Linien die Seiten und die Diagonale eines Parallelogramms, welches die Projection des Parallelogramms der drei ersteren auf dieselbe Ebene darstellt. Zu diesen drei Ebenen senkrecht sind die drei zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen $\varphi_\omega' = 2\omega v_r' \sin\alpha'$, $\varphi_\omega'' = 2\omega v_r'' \sin\alpha''$, $\varphi_\omega = 2\omega v_r \sin\alpha$; sie bilden untereinander dieselben Winkel, wie die drei Ebenen, auf denen sie senkrecht stehen und also auch dieselben Winkel, welche $v_r' \sin\alpha'$, $v_r'' \sin\alpha''$, $v_r \sin\alpha$ unter einander bilden. Da sie nun zugleich diesen drei Grössen proportional sind, so ist φ_ω die Diagonale eines über φ_ω' und φ_ω'' construirten Parallelogramms, mithin die Resultante dieser beiden. Der Satz lässt sich auf beliebig viele Componenten erweitern.

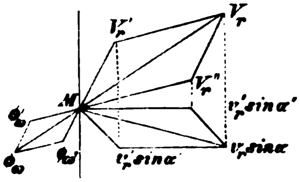

Fig. 209.

Zerfällt die Winkelgeschwindigkeit ω des Systems um die Momentanaxe in zwei Componenten ω', ω'' um zwei andere Axen, so ist die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung der Bewegung eines Punktes M in Bezug auf die Winkelgeschwindigkeit ω des Systems die Resultante der beiden zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen, entsprechend den Winkelgeschwindigkeiten ω', ω''. Zerlegt man nämlich (Fig. 210) die relative Geschwindigkeit v_r des Punktes M in zwei Componenten u_r, u'_r, von denen die erstere senkrecht zur Ebene des Axenparallelogramms der ω ist, während die letztere in diese Ebene hineinfällt, bezeichnet man ferner die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung, welche irgend einer relativen Geschwindigkeit v in Bezug auf die Bewegung des Systems um eine Axe von der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht, mit $\varphi_\omega^{(v)}$ so ist nach dem vorigen Satze:

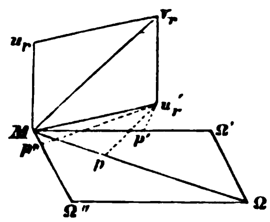

Fig. 210.

$$[\varphi_\omega^{(v_r)}] = [\varphi_\omega^{(u_r)}] + [\varphi_{\omega}^{(u'_r)}], \quad [\varphi_{\omega'}^{(v_r)}] = [\varphi_{\omega'}^{(u_r)}] + [\varphi_{\omega'}^{(u'_r)}],$$
$$[\varphi_{\omega''}^{(v_r)}] = [\varphi_{\omega''}^{(u_r)}] + [\varphi_{\omega''}^{(u'_r)}].$$

Da u_r auf der Ebene der drei Axen senkrecht steht, so fällt es mit seinen Projectionen auf drei durch M gehende zu diesen Axen senkrechte Ebenen zusammen. Daher fallen die drei zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen

$$\varphi_\omega^{(u_r)} = 2\omega u_r, \quad \varphi_{\omega'}^{(u_r)} = 2\omega' u_r, \quad \varphi_{\omega''}^{(u_r)} = \omega'' u_r,$$

in die Ebene der drei Axen, stehen senkrecht auf diesen und bilden, da sie ω, ω', ω'' proportional sind, die Diagonale und Seiten eines Parallelogramms, aus welchem folgt:

$$[\varphi_\omega^{(u_r)}] = [\varphi_{\omega'}^{(u_r)}] + [\varphi_{\omega''}^{(u_r)}].$$

Da ferner u'_r in die Ebene der Axen ω, ω', ω'' fällt, so sind seine Projectionen auf drei zu diesen Axen senkrechte Ebenen den drei Perpendikeln p, p', p'' gleich, welche von dem Endpunkte von u'_r auf diese Axen gefällt werden können und fallen die drei zusammengesetzten Centripetalbeschleunigungen

$$\varphi_\omega^{(u'_r)} = 2\omega p, \quad \varphi_{\omega'}^{(u'_r)} = 2\omega' p', \quad \varphi_{\omega''}^{(u'_r)} = 2\omega'' p''$$

sämmtlich in die Richtung von u_r. Die Grössen ωp, $\omega' p'$, $\omega'' p''$ stellen aber die Momente der Seiten ω, ω', ω'' des Axenparallelogramms in Bezug auf den Endpunkt von u'_r dar und ist daher

$$\omega p = \omega' p' + \omega'' p''.$$

Daher wird

$$[\varphi_\omega^{(u'_r)}] = [\varphi_{\omega'}^{(u'_r)}] + [\varphi_{\omega''}^{(u'_r)}] = \varphi_{\omega'}^{(u'_r)} + \varphi_{\omega''}^{(u'_r)}.$$

Durch Substitution der Ausdrücke für $\varphi_\omega^{(u_r)}$ und $\varphi_\omega^{(u'_r)}$ in die erste der Aequivalenzen ergibt sich

$$[\varphi_{\omega}^{(v_r)}] = [\varphi_{\omega'}^{(u_r)}] + [\varphi_{\omega'}^{(u'_r)}] + [\varphi_{\omega''}^{(u_r)}] + [\varphi_{\omega''}^{(u'_r)}] = [\varphi_{\omega'}^{(v_r)}] + [\varphi_{\omega''}^{(v_r)}]$$

w. z. b. w.

§. 3. Nach Cap. V, §. 2 und Cap. VII, §. 15. kann man die relative Bewegung eines Punktes M auf eine absolute reduciren, indem man dem System jeden Augenblick die entgegengesetzte Elementarbewegung von derjenigen ertheilt, die es besitzt und den beweglichen Punkt an dieser Bewegung Theil nehmen lässt. Zu der absoluten Geschwindigkeit $[v]$ tritt dann die entgegengesetzte Geschwindigkeit $-[v_s]$ des Systempunktes hinzu, welcher eben mit M zusammenfällt und aus beiden geht die relative Geschwindigkeit $[v_r]$ als Resultante hervor; zu der absoluten Beschleunigung φ aber gesellt sich ausser der entgegengesetzten Beschleunigung $-[\varphi_s]$ des Systempunktes noch die der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung $[\varphi_\omega]$ entgegengesetzte zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $-[\varphi_\omega]$, um mit jenen beiden zusammen die relative Beschleunigung $[\varphi_r]$ als ihre Resultante zu bilden. Man erkennt dies insbesondere deutlich, wenn man (Fig. 211) zu dem Parallelepipede aus $[\varphi_r]$, $[\varphi_s]$, $[\varphi_\omega]$ als Eckkanten, dessen Diagonale $[\varphi]$ ist, dies Parallelepiped aus $[\varphi]$, $-[\varphi_s]$, $-[\varphi_\omega]$ als Kanten construirt, als dessen Diagonale die relative Beschleunigung $[\varphi_r]$ auftritt. Man hat daher den wichtigen, von Coriolis (*Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. Journ. de l'école polytechn. T. XV. Cah. XXIV, p. 142*) aufgestellten Satz:

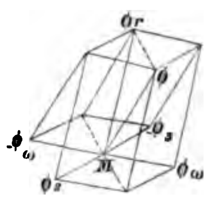

Fig. 211.

Die relative Beschleunigung eines Punktes M in Bezug auf ein bewegliches System Σ hat drei Componenten: 1. die absolute Beschleunigung des Punktes, 2. die entgegengesetzt genommene Beschleunigung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes und 3. die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung, welche letztere der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung geometrisch entgegengesetzt gleich ist.

In Folge dieses Satzes kann die relative Beschleunigung, wie eine absolute Beschleunigung behandelt werden. Alle Lehren, welche in vorhergehenden Capiteln über die absolute Bewegung eines Punktes aufgestellt worden sind, gelten auch für die relative Bewegung, sobald der Beschleunigung der absoluten Bewegung des Punktes die beiden Beschleunigungen $-[\varphi_s]$ und $-[\varphi_\omega]$ zugefügt werden.

Ein beobachtender Punkt, welcher dem Systeme angehört und die Bewegung des Systems nicht bemerkt, sieht die relative Bewegung als eine absolute an; für ihn sind $-[\varphi_s]$, $-[\varphi_\omega]$ Beschleunigungen, welche ihm der bewegliche Punkt wirklich zu besitzen scheint. Sie heissen deshalb auch „scheinbare Beschleunigungen“.

Der bewegliche Punkt befindet sich in relativer Ruhe, sobald $v_r = 0$ und $\varphi_r = 0$ ist; da $-[\varphi_\omega]$ in diesem Falle verschwindet, so tritt dies ein, sobald die absolute Beschleunigung $[\varphi]$ der Beschleunigung $[\varphi_s]$ des Systempunktes geometrisch entgegengesetzt gleich wird.

Die Elementararbeit der relativen Beschleunigung längs des Elementes ds der relativen Bahn heisst die relative Elementararbeit; sie ist zufolge Cap. VIII, §. 11 die Summe der Elementararbeiten der absoluten Beschleunigung φ, der Beschleunigungen $-[\varphi_s]$ und $-[\varphi_\omega]$ längs dieses Elementes. Da $-[\varphi_\omega]$ senkrecht ist zur Richtung der relativen Geschwindigkeit, so ist die Elementararbeit der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung Null. Bezeichnen also α und β die Winkel, welche die absolute Beschleunigung φ und die Beschleunigung φ_s des Systempunktes mit der Tangente der relativen Bahn bilden, sodass $\pi - \beta$ der Winkel ist, den $-[\varphi_s]$ mit ihr einschliesst, so ist

$$\varphi \cos \alpha ds - \varphi_s \cos \beta \, ds$$

die Elementararbeit der relativen Beschleunigung φ_r und folglich nach dem Principe der lebendigen Kraft, welches nach der obigen Bemerkung jetzt auch für die relative Bewegung Gültigkeit hat,

$$d \,.\, \tfrac{1}{2} v_r^2 = \varphi \cos \alpha \, ds - \varphi_s \cos \beta \, ds,$$

und weiter unter Anwendung bekannter Bezeichnungen:

$$\tfrac{1}{2} v_r^2 - \tfrac{1}{2} (v_r)_0^2 = \int_{s=s_0}^{s=s} \varphi \cos \alpha \, ds - \int_{s=s_0}^{s=s} \varphi_s \cos \beta \, ds.$$

Besitzt das System blos eine Rotation von constanter Winkelgeschwindigkeit ω, so ist $\varphi_s = \omega^2 r$, $-[\varphi_s]$ reducirt sich auf die blose Centrifugalbeschleunigung und man hat

$$-\int_{s=s_0}^{s=s} \varphi_s \cos \beta \, ds = \int_{r_0}^{r} \omega^2 r \, dr = \tfrac{1}{2} \omega^2 (r^2 - r_0^2),$$

da $ds \cos \beta = dr$ wird, wenn r den Abstand des beweglichen Punktes von der Momentanaxe des Systems angibt. Daher wird in diesem Falle

$$\tfrac{1}{2} v_r^2 - \tfrac{1}{2} (v_r)_0^2 = \int_{s=s_0}^{s=s} \varphi \cos \alpha \, ds + \tfrac{1}{2} \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Die Erde ist ein System der Art; für einen fallenden Punkt hat man daher, wegen der ausserordentlich kleinen Differenz zwischen r und r_0 und mit Rücksicht darauf, dass die Beschleunigung $\varphi = G$ der Schwere für die ruhend gedachte Erde vertikal und constant ist,

$$\tfrac{1}{2} v_r^2 - \tfrac{1}{2} (v_r)_0^2 = Gh,$$

wenn h die Fallhöhe bezeichnet.

§. 4. Wir wollen jetzt die Componenten der relativen Beschleunigung parallel dreien mit dem System beweglichen Coordinatenaxen, deren Ursprung O' heissen mag, darstellen. Die relativen Coordinaten des Punktes M in Bezug auf dieses Coordinatensystem seien x', y', z', die Componenten der absoluten Beschleunigung von M parallel denselben Axen seien X', Y', Z', die der Beschleunigung des mit ihm zur Zeit t zusammenfallenden Systempunktes X'_s, Y'_s, Z'_s und $X'_\omega, Y'_\omega, Z'_\omega$ die der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung. Die Componenten der entgegengesetzten Beschleunigung des Systempunktes und der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung ergeben sich aus diesen durch Vorsetzung des Zeichens (—) und da die zweiten Derivirten der relativen Coordinaten x', y', z' die Componenten der relativen Beschleunigung gleichfalls darstellen, so erhalten wir zunächst folgende Gleichungen für die relative Bewegung des Punktes M, wenn auch noch in unentwickelter Form:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' - X'_s - X'_\omega$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' - Y'_s - Y'_\omega$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z' - Z'_s - Z'_\omega.$$

Was die Componenten X', Y', Z' betrifft, so erhält man sie durch Projection der entsprechenden Componenten X, Y, Z der absoluten Beschleunigung parallel dreien festen Axen auf die beweglichen. Sind nämlich wie früher abc, $a'b'c'$, $a''\,b''\,c''$ die Richtungscosinusse der beweglichen Axen gegen die festen, so ergibt sich:

$$X' = a\,X + b\,Y + c\,Z,$$
$$Y' = a'\,X + b'\,Y + c'\,Z,$$
$$Z' = a''X + b''Y + c''Z.$$

Da die absolute Bewegung des Punktes M und die Bewegung des Systems bekannt sind, so sind in diesen Formeln $X, Y, Z, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ gegebene Functionen der Zeit und können insbesondere die neun Cosinusse durch die drei Euler'schen Winkel (s. S. 278) ausgedrückt werden.

Die Beschleunigungscomponenten des Systempunktes in Bezug auf die festen Axen seien X_s, Y_s, Z_s; sie werden durch zweimalige Differentiation der Transformationsformeln

$$x = x_1 + ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = y_1 + bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = z_1 + cx' + c'y' + c''z'$$

erhalten, wenn darin x', y', z' als nicht von der Zeit abhängig angesehen werden, unter welcher Voraussetzung sie und x, y, z die Coordinaten des Systempunktes für das bewegliche und für das feste Coordinatensystem darstellen, während x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des beweglichen Ursprungs als gegebene Functionen der Zeit anzusehen sind. Man erhält:

$$X_s = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2a'}{dt^2} + z'\frac{d^2a''}{dt^2},$$

$$Y_s = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + x' \frac{d^2 b}{dt^2} + y' \frac{d^2 b'}{dt^2} + z' \frac{d^2 b''}{dt^2},$$

$$Z_s = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 z_1}{dt^2} + x' \frac{d^2 c}{dt^2} + y' \frac{d^2 c'}{dt^2} + z' \frac{d^2 c''}{dt^2}$$

und hiermit in ähnlicher Weise, wie bei den Componenten X', Y', Z':

$$\begin{aligned} X'_s &= a\ X_s + b\ Y_s + c\ Z_s \\ Y'_s &= a'\ X_s + b'\ Y_s + c'\ Z_s \\ Z'_s &= a''\ X_s + c''\ Y_s + c''\ Z_s . \end{aligned}$$

Will man übrigens die als bekannt anzusehende Lage der Momentanaxe benutzen, so kann man X'_s, Y'_s, Z'_s auch unmittelbar darstellen. Man löst dann die Bewegung des Systems in die Translation des Ursprungs O' und die Rotation um die zur Momentanaxe parallele durch O' geführte Axe auf. Sind $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die Axen der x', y', z', so erhält man, wie Cap. XIV, §. 15:

$$\begin{aligned} X'_s &= \psi_{x'} + z' \frac{d\omega_{y'}}{dt} - y' \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z')\,\omega_{x'} - \omega^2 x' \\ Y'_s &= \psi_{y'} + x' \frac{d\omega_{z'}}{dt} - z' \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z')\,\omega_{y'} - \omega^2 y' \\ Z'_s &= \psi_{z'} + y' \frac{d\omega_{x'}}{dt} - x' \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z')\,\omega_{z'} - \omega^2 z', \end{aligned}$$

worin $\psi_{x'}$, $\psi_{y'}$, $\psi_{z'}$ die Componenten der Beschleunigung des Punktes O' parallel den beweglichen Axen bedeuten.

Um die Componenten der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung $\varphi_\omega = 2\Omega U_r$ parallel den beweglichen Axen zu finden, zerlegen wir v_r in ihre drei Componenten $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ und 2ω in die ihrigen: $2\omega_{x'}$, $2\omega_{y'}$, $2\omega_{z'}$ und bestimmen die Beschleunigungsbestandtheile, welche diese sechs Componenten für den Punkt M veranlassen. Die Componente $\frac{dx'}{dt}$ liefert mit $\omega_{x'}$ keinen Beschleunigungsbestandtheil, weil ihre Projection auf die zur Axe von $\omega_{x'}$ senkrechte $y'z'$-Ebene Null ist, mit $\omega_{y'}$ und $\omega_{z'}$ aber liefern sie $-2\omega_{y'}\frac{dx'}{dt}$, $2\omega_{z'}\frac{dx'}{dt}$ in den Richtungen der z'- und y'-Axe. Ebenso liefert $\frac{dy'}{dt}$ mit $\omega_{z'}$ und $\omega_{x'}$ die Bestandtheile $-2\omega_{z'}\frac{dy'}{dt}$, $2\omega_{x'}\frac{dy'}{dt}$ in den Richtungen der x'- und z'-Axe, endlich $\frac{dz'}{dt}$ mit $\omega_{x'}$ und $\omega_{y'}$ die Bestandtheile $-2\omega_{x'}\frac{dz'}{dt}$, $2\omega_{y'}\frac{dz'}{dt}$ in den Richtungen der y'- und x'-Axe. Sammelt man die denselben Axen entsprechenden Bestandtheile, so findet man:

$$\begin{aligned} X'_\omega &= 2\left(\omega_{y'} \frac{dz'}{dt} - \omega_{z'} \frac{dy'}{dt}\right) \\ Y'_\omega &= 2\left(\omega_{z'} \frac{dx'}{dt} - \omega_{x'} \frac{dz'}{dt}\right) \\ Z'_\omega &= 2\left(\omega_{x'} \frac{dy'}{dt} - \omega_{y'} \frac{dx'}{dt}\right). \end{aligned}$$

Auch kann man diese Componenten auf folgende Art finden. Es seien λ, μ, ν die Richtungswinkel von φ_ω gegen die beweglichen Axen; dann bestehen vermöge des Senkrechtstehens von φ_ω auf der Richtung der Momentanaxe und der relativen Geschwindigkeit die Gleichungen:

$$\omega_{x'} \cdot \lambda + \omega_{y'} \cdot \mu + \omega_{z'} \cdot \nu = 0,$$
$$\frac{dx'}{dt} \cdot \lambda + \frac{dy'}{dt} \cdot \mu + \frac{dz'}{dt} \cdot \nu = 0,$$

woraus

$$\frac{\lambda}{\omega_{y'} \frac{dz'}{dt} - \omega_{z'} \frac{dy'}{dt}} = \frac{\mu}{\omega_{z'} \frac{dx'}{dt} - \omega_{x'} \frac{dz'}{dt}} = \frac{\nu}{\omega_{x'} \frac{dy'}{dt} - \omega_{y'} \frac{dx'}{dt}} = \frac{1}{L},$$

wo

$$L^2 = \left(\omega_{y'} \frac{dz'}{dt} - \omega_{z'} \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\omega_{z'} \frac{dx'}{dt} - \omega_{x'} \frac{dz'}{dt}\right)^2 + \left(\omega_{x'} \frac{dy'}{dt} - \omega_{y'} \frac{dx'}{dt}\right)^2$$
$$= (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2) \left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$
$$- \left(\omega_{x'} \frac{dx'}{dt} + \omega_{y'} \frac{dy'}{dt} + \omega_{z'} \frac{dz'}{dt}\right)^2$$
$$= \omega^2 v_r^2 - \omega^2 v_r^2 \cos^2(\omega, v_r) = [\omega v_r \sin(\omega, v_r)]^2 = \omega^2 u_r^2 = \tfrac{1}{4} \varphi_\omega^2.$$

Daher hat man

$$\varphi_{\omega'} \cdot \lambda = X_{\omega'} = 2\left(\omega_{y'} \frac{dz'}{dt} - \omega_{z'} \frac{dy'}{dt}\right),$$
$$\varphi_{\omega'} \cdot \mu = Y_{\omega'} = 2\left(\omega_{z'} \frac{dx'}{dt} - \omega_{x'} \frac{dz'}{dt}\right),$$
$$\varphi_{\omega} \cdot \nu = Z_{\omega'} = 2\left(\omega_{x'} \frac{dy'}{dt} - \omega_{y'} \frac{dx'}{dt}\right),$$

wie oben.

Mit Hülfe der entwickelten Ausdrücke für X', Y', Z'; X'_s, Y'_s, Z'_s; X'_ω, Y'_ω, Z'_ω können die zu Anfang des Paragraphen gegebenen Gleichungen der relativen Bewegung ausgeführt werden. Ist der Punkt M nicht frei, sondern auf eine dem Systeme angehörige Fläche der Curve gezwungen, so treten auf den rechten Seiten dieser Gleichungen noch die Componenten der Widerstandsbeschleunigung dieser Fläche oder Curve hinzu.

Soll der bewegliche Punkt sich in relativer Ruhe befinden, so müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$v_r = 0, \quad X' - X'_s - X'_\omega = 0, \quad Y' - Y'_s - Y'_\omega = 0, \quad Z - Z'_s - Z'_\omega =$$

oder, da φ_ω mit v_r verschwindet,

$$v_r = 0, \quad X' = X'_s, \quad Y' = Y'_s, \quad Z' = Z'_s.$$

Beispiele und Anwendungen.

§. 5. **Ein sphärisches Pendel beschreibt einen Kreis; man soll seine Bewegung bestimmen, indem man dasselbe als in relativer Ruhe befindlich ansieht in Bezug auf ein um die Verticale rotirendes System.**

Es sei M (Fig. 212) der Pendelpunkt, welcher den Kreis um die Verticale OZ beschreibt. Die Winkelgeschwindigkeit des um OZ rotirenden Systems, in Bezug auf welches M in relativer Ruhe ist, ist constant, da die absolute Geschwindigkeit v des Punktes M constant sein muss (die Horizontalebenen sind Niveauflächen für die Schwere). Die Beschleunigung des mit M zusammenfallenden Systempunktes ist blos Normalbeschleunigung $v^2 : r$, wenn r den Radius des Kreises bedeutet. Die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung ist Null, weil die relative Geschwindigkeit Null ist. Daher tritt zu der absoluten Beschleunigung des Punktes M und der Spannungsbeschleunigung N desselben, nach O gerichtet als scheinbare Beschleunigung blos hinzu die Centrifugalbeschleunigung $v^2 : r$ in der Richtung des Radius r und vom Mittelpunkte abgewandt. N, g, $v^2 : r$ müssen sich tilgen, da die relative Geschwindigkeit Null ist. Daher ist N geometrisch entgegengesetzt der Resultanten von g und $v^2 : r$ und zugleich liefert die Aehnlichkeit der Dreiecke eine weitere Relation, so dass

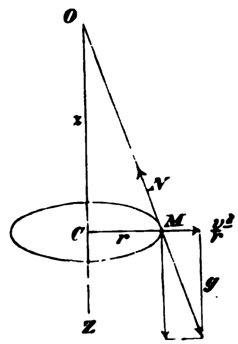

Fig. 212.

$$N^2 = g^2 + \frac{v^4}{r^2}, \quad \frac{v^2}{r} : g = \frac{r}{z},$$

wenn z der Abstand des Kreises von O ist. Hieraus folgt $v = r\sqrt{\frac{g}{z}}$, wie bereits früher sich ergab.

§. 6. Relative Bewegung eines schweren Punktes in der Nähe der Erdoberfläche in Bezug auf das bewegliche System der Erde. Dies Problem zerfällt in mehrere einzelne, welche Gegenstand des Studiums ausgezeichneter Mathematiker geworden sind. Die betreffenden Gleichungen für die Behandlungen derselben wurden zuerst von Gauss, später von Poisson (*Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air. Journ. de l'école polytechn. XV, 1r. Cah., p. 21*) gegeben.

Das relative Pendelproblem, welches gleichfalls hierher gerechnet werden kann, werden wir zweckmässiger erst in der Kinetik behandeln.

Die Erde ist ein System, dessen Elementarbewegung eine Schraubenbewegung ist um eine Axe, welche sich nahezu parallel bleibt und unter einem Winkel von 66½ Grad gegen die Ebene der Bahn ihres Mittelpunktes geneigt ist. Die Winkelgeschwindigkeit ω dieser Bewegung ist constant und wird erhalten, wenn man 2π durch die Länge des Sterntages, in Secunden mittlerer Zeit ausgedrückt, dividirt. Letzterer beträgt 86164,1 Secunden, daher ist

$$\omega = \frac{2\pi}{86164{,}1} = 0^{\mathrm{m}}{,}000073,$$

eine sehr kleine Grösse. Die Translationsgeschwindigkeit v parallel der Axe ist veränderlich und wird erhalten, wenn man die Geschwindigkeit des Erdmittelpunktes in der elliptischen Bahn auf die Axe projicirt. Sie tritt in den folgenden Untersuchungen ebenso wenig, als die Translationsbeschleunigung auf, denn dieselben Ursachen, welche allen Punkten der Erde Translationsgeschwindigkeit und Translationsbeschleunigungen ertheilen, ertheilen sie auch in gleicher Weise dem Punkte, dessen relative Bewegung in Bezug auf das System der Erde untersucht wird und da sie als Bewegungselemente des mit dem beweglichen Punkte zusammenfallenden Systempunktes jenem in umgekehrtem Sinne zugefügt werden müssen, so tilgen sie die ihm eigenthümlichen, sodass die Erde für Untersuchungen der relativen Bewegung als ein blos rotirendes System von constanter Winkelgeschwindigkeit anzusehen ist.

Um die relative Bewegung eines Punktes M als eine absolute behandeln zu können, müssen zu der absoluten Beschleunigung desselben noch hinzutreten die entgegengesetzte Beschleunigung des Systempunktes m, der mit M zusammenfällt und die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung. Ausser der Translationsbeschleunigung, welche wir bereits eliminirt haben, besitzt nun m noch die Centripetalbeschleunigung $\omega^2 r$, wenn r seinen Abstand von der Erdaxe angibt, senkrecht zu der letzteren und ihr zugewandt, ferner die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Beschleunigung αp und die Beschleunigung ωu senkrecht zur Ebene durch die Momentanaxe und ihren kürzesten Abstand von ihrer folgenden Lage. Auch sie fällt aus, weil die Ursachen, welche sie allen Punkten des Systems ertheilen, sie auch dem Punkte M ertheilen. Die entgegengesetzte Centripetalbeschleunigung ist die Centrifugalbeschleunigung und verbindet sich mit der absoluten Beschleunigung des Punktes M. Die von der Winkelbeschleunigung α herrührende Beschleunigung αp des Systempunktes zerfällt in zwei Componenten, die Tangentialbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$, welche Null ist, weil ω constant ist, und die Normalbeschleunigung $\omega\psi r_1$, welche aus doppeltem Grunde ausserordentlich klein ist, erstens vermöge der Kleinheit von ω und zweitens vermöge der Kleinheit der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Erdaxe neigt. Diese Grösse kann daher vernachlässigt werden.

Es bleibt nun noch übrig, die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $-\varphi_\omega$ zu bestimmen. Ihr Werth ist das Doppelte des Produktes aus der Projection u_r der relativen Geschwindigkeit v_r des Punktes M auf die zur Erdaxe senkrechte Ebene des Aequators und der Winkelgeschwindigkeit ω. Ihr Sinn wird leicht erkannt, wenn man durch den Punkt M eine Parallele zur Erdaxe zieht und durch diese und v_r eine Ebene legt; sie ist nach derjenigen Seite dieser Ebene gewandt, nach welcher die Rotation nicht erfolgt und ist senkrecht zu ihr.

Als scheinbare Beschleunigungen treten demnach zu der absoluten Beschleunigung φ des Punktes M, um dessen relative Beschleunigung zu bilden, blos hinzu: 1. die Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 r$ senkrecht die Richtung der Erdaxe schneidend und von dieser abgewandt und 2. die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $2\omega u_r$ senkrecht zu der Richtung der Ebene, welche zugleich parallel läuft mit der Erdaxe und der relativen Geschwindigkeit von M und zwar nach der Seite hin gerichtet, welche dem Drehungssinne von ω abgewandt ist. Für die relative Ruhe des Punktes M verschwindet auch noch die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung und ist die relative Beschleunigung blos die Resultante aus der absoluten und der Centrifugalbeschleunigung.

Die Beschleunigung g der Schwere, welche wir beobachten, ist die Resultante der absoluten Beschleunigung der Schwere G, wie sie bei ruhender Erde stattfinden würde und der Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 r$. G bildet sich als Resultante aus den sämmtlichen Beschleunigungen, welche der bewegliche Punkt M durch die Einwirkung der Punkte der Erde erleidet. Für die Erde als homogene oder auch als aus homogenen Schichten gebildete Kugel ist G nach dem Mittelpunkte gerichtet und variirt mit dem reciproken Quadrate des Abstandes des Punktes von diesem Mittelpunkte. Da aber der mittlere Abstand der Erdoberfläche vom

Mittelpunkt 859,5 Meilen oder 6 376 000 Meter beträgt, so ist für geringe Erhebungen über die Erdoberfläche G als constant anzusehen. Die Centrifugalbeschleunigung variirt mit dem Abstande r des Punktes von der Erdaxe; für mittlere Breiten ist dieser gleichfalls sehr gross (gegen 4 780 000 Meter) und bringen geringere Ortsveränderungen in der Grösse der Centrifugalbeschleunigung nur sehr schwache Differenzen hervor. Daher kann in den folgenden Untersuchungen, wenn für dieselben nur geringe Ortsunterschiede in Anspruch genommen werden, die relative Beschleunigung g der Schwere als constant nach Intensität und Richtung angesehen werden. Da aber in g bereits die Centrifugalbeschleunigung mit aufgenommen ist, so kommt, wenn es sich um die Bewegung eines blos schweren Punktes handelt, für denselben blos noch die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung in Frage. Indessen gilt dies nur unter der Voraussetzung, dass in der Grösse $\omega^2 r$ der Abstand r sich nur wenig mit der Lagenänderung des beweglichen Punktes ändere. In der Nähe des Poles sind solche Aenderungen aber bedeutend, daher wird für die Nähe des beweglichen Punktes am Pole eine besondere Untersuchung geführt werden müssen.

§. 7. **Relative Ruhe eines schweren Punktes.** Derselbe befinde sich zunächst unter dem Aequator. Dort sind sich die absolute Schwere und die Centrifugalbeschleunigung direct entgegengesetzt; man hat also, wenn R den Radius des Aequators bedeutet,

$$g = G - \omega^2 R .$$

Mit Rücksicht darauf, dass der Umfang des Aequators $2\pi R = 40\,000\,000$ Meter und wenn $T = 86164{,}1$ Sec. die Umdrehungszeit der Erde, also $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und für $g = 9{,}808\,896$, erhält man für das Verhältniss der Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 R$ am Aequator zur beobachteten Beschleunigung g der Schwere nahezu

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g} = \frac{1}{289} = \frac{1}{17^2},$$

d. h. für die Centrifugalbeschleunigung am Aequator $\frac{g}{17^2}$, sodass $g = G - \frac{g}{17^2}$, also $g = G\left(1 + \frac{1}{17^2}\right)^{-1} = G - \frac{G}{17^2}$ wird. Es tilgt also die Centrifugalbeschleunigung $\frac{1}{17^2}$ der absoluten Schwere. Würde die Winkelgeschwindigkeit der Erde plötzlich das 17fache werden, so würde die Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 R$ auf das 17^2fache steigen, also gleich G werden; in Folge dessen verschwände g und würde am Aequator gar keine Beschleunigung der Schwere mehr beobachtet werden; die Körper würden nicht mehr zur Erde fallen.

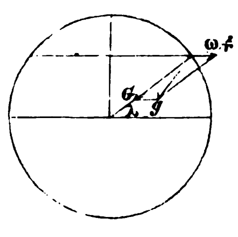

Fig. 213.

Um die Rechnung für die Breite λ durchzuführen, hat man für die kugelförmige Erde (Fig. 213)

$$g^2 = G^2 + \omega^4 r^2 - 2G\omega^2 r \cos\lambda ,$$

woraus mit Rücksicht auf $r = R\cos\lambda$ und darauf, dass $\omega^2 R = \frac{G}{17^2}$, nämlich gleich der Centrifugalbeschleunigung am Aequator ist, folgt:

$$g = G\left(1 - \frac{2}{17^2}\cos^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = G - \frac{G}{17^2}\cos^2\lambda .$$

Es wird demnach die absolute Schwere durch die Centrifugalbeschleunigung um ein Glied vermindert, welches dem Quadrate des Cosinus der geographischen Breite proportional ist. Hierbei ist auf die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt keine Rücksicht genommen; würde auch diese in Rechnung gezogen, so würde sich eine weitere, gleichfalls dem Quadrate des Cosinus der Breite proportionale Verminderung ergeben.

§. 8. **Relative Bewegung eines schweren Punktes auf der Horizontalebene unter der Breite λ.** Wir wählen mit Tilgung der Accente an den Coordinaten zur xy-Ebene die Horizontalebene, auf welcher der bewegliche Punkt bleiben soll und und zwar zur Axe der x die Tangente des Parallelkreises (Fig. 214), positiv nach Osten gerechnet, zur y-Axe die Tangente des Meridians oder die Mittagslinie, positiv nach Süden gerichtet und zur z-Axe die Vertikale, positiv nach oben. Da die Erde sich von Westen nach Osten dreht, so ist die Linie, welche ω darstellt, auf der Erdaxe nach Süden gerichtet aufzutragen und bildet mit den positiven Axen der x, y, z die Winkel $\frac{1}{2}\pi$, λ, $\frac{1}{2}\pi + \lambda$; daher werden $\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos\lambda$, $\omega_z = -\omega \sin\lambda$. Die Componenten der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung sind daher mit Rücksicht auf $z = 0$ und folglich $\frac{dz}{dt} = 0$ für alle Werthe von t, weil der bewegliche Punkt auf der Horizontalen bleibt:

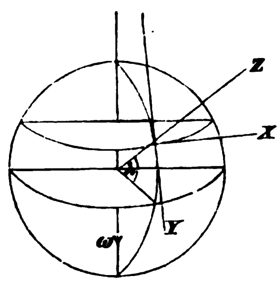

Fig. 214.

$$-X_\omega = -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \quad -Y_\omega = \omega \sin\lambda \frac{dx}{dt}, \quad -Z_\omega = 2\omega \cos\lambda \frac{dx}{dt}$$

und hiermit werden die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\lambda \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \sin\lambda \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega \cos\lambda \cdot \frac{dx}{dt} + g - N,$$

wo N die Widerstandsbeschleunigung der Horizontalebene bedeutet.

Bildet man mit ihrer Hülfe die Grösse $\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$, so verschwindet diese und erhält man, wenn v_0 die relative Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2,$$

d. h. es bleibt die Geschwindigkeit der Grösse nach constant. Dies ist auch von vornherein einleuchtend, denn die relative Beschleunigung der Schwere ist als constant nach Grösse und Richtung angenommen und da sie senkrecht zur Bahn des Punktes ist, so ist ihre Elementararbeit Null; die Elementararbeit der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung ist aber ohnehin immer Null; es ist also alle Elementararbeit zu jeder Zeit Null und daher auch $d \,.\, \frac{1}{2} v^2 = 0$.

Integrirt man die beiden ersten Gleichungen einzeln, so erhält man, wenn die Anfangslage des Punktes der Coordinatenursprung und α der Winkel ist, den v_0 mit der x-Axe bildet, für die Componenten die Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha - 2\,\omega \sin\lambda\,.\,y\,, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha + 2\,\omega \sin\lambda\,.\,x$$

und weil $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2$ ist, ergibt sich als relative Bahn des Punktes der Kreis

$$\left(y - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}\right)^2 + \left(x + \frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\omega\sin\lambda}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda}\right)^2$$

vom Radius $\frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda}$ und den Mittelpunktscoordinaten

$$x_1 = -\frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}, \quad y_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}.$$

Dividirt man v_0 durch den Radius des Kreises, so drückt der Quotient $\varpi = 2\,\omega \sin\lambda$ die Winkelgeschwindigkeit aus, mit welcher der Radius der Bewegung des Punktes folgt; dieselbe ist unabhängig von v_0, also für alle Bewegungen dieselbe. Für die Breite von 30° ist der Radius des Kreises $\frac{v_0}{0{,}000073} = 13698\,.\,v_0$. Die Zeit t, nach welcher der Punkt an seinen Ausgangsort zurückzukehren strebt, ist $t_1 = \frac{\pi}{\omega \sin\lambda}$.

Nach der Zeit t_1 hat der bewegliche Punkt auf dem Kreise einen Weg zurückgelegt, dessen Projection auf die Richtung von v_0 den Werth $e = \frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda} \cdot \sin\varpi t$ hat und seine Abweichung von dieser Richtung beträgt $d = \frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda}\,(1 - \cos\varpi t)$. Entwickelt man $\sin\varpi t$ und $\cos\varpi t$ in Reihen und nimmt für kleine t deren Anfangsglieder, so erhält man vermöge der Bedeutung von ϖ die Ausdrücke $e = v_0 t$; $d = v_0\,\omega \sin\lambda \cdot t^2 = \frac{\omega \sin\lambda}{v_0} \cdot e^2$.

Die dritte der obigen Gleichungen: $0 = -2\,\omega \cos\lambda \frac{dx}{dt} + g - N$ liefert die Widerstandsbeschleunigung, welche die Horizontalebene leisten muss. Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ bewegt sich der Punkt anfangs in der Richtung des Meridians und ist $\frac{dx}{dt} = 0$, also $N = g$; für $\alpha = 0$ geht er von Westen nach Osten und ist $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$, also $N = g - 2\,\omega\, v_0 \cos\lambda$; für $\alpha = \pi$ wird $N = g + 2\,\omega\, v_0 \cos\lambda$.

Unter dem Aequator ist $\lambda = 0$, also der Radius der Bahn unendlich gross; dort beschreibt der Punkt eine Gerade und weicht also nicht von der Richtung von v_0 ab, indessen ist der Widerstand $N = g - 2\,\omega \frac{dx}{dt}$.

Für den Pol muss die ganze Untersuchung etwas anders geführt werden, da dort die Voraussetzung nicht mehr zulässig ist, dass der Abstand des beweglichen Punktes von der Erdaxe sich nur wenig im Laufe der Bewegung ändere. Am Pole ist die relative Geschwindigkeit senkrecht zur Erdaxe; es fällt mithin die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung in die Horizontalebene. Man erhält dort die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2 y, \quad 0 = g - N,$$

worin die Glieder $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ von der Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 r$ herrühren. Behufs der Integration ist

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \omega^2(x^2+y^2), \quad \text{oder} \quad v^2 = v_0^2 + \omega^2 r^2,$$

sowie

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{d. h.} \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \omega(x^2+y^2).$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch mit

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \omega^2 r^2 \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

und aus ihnen folgt $\vartheta = \omega t$, $r = v_0 t$, oder also

$$r = \frac{v_0}{\omega}\vartheta,$$

d. h. der Punkt beschreibt eine archimedische Spirale um den Pol.

§. 9. **Relative Bewegung eines freien schweren Punktes.** Wählen wir den Ursprung des Coordinatensystems in der Anfangslage des Punktes, die z-Axe in der Meridianebene parallel der Erdaxe und positiv nach Norden, die y-Axe in der Richtung des Radius des Parallelkreises, positiv nach aussen, zur x-Axe die Tangente des Parallelkreises, positiv nach Osten gerichtet, so sind unter der Breite λ die Componenten der Beschleunigung der relativen Schwere:

$$0, \quad -g\cos\lambda, \quad -g\sin\lambda$$

und die der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung $-2\omega\frac{dy}{dt}$, $2\omega\frac{dx}{dt}$, 0 und hiermit die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} - g\cos\lambda, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\lambda;$$

dieselben liefern, wenn a, b, c die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit v_0 bezeichnen für die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$\frac{dx}{dt} = a - 2\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = b + 2\omega x - g\cos\lambda \,.\, t, \quad \frac{dz}{dt} = c - g\sin\lambda \,.\, t.$$

Dies Gleichungssystem ist lineär und also nach bekannten Methoden leicht integrirbar. Die dritte Gleichung gibt unmittelbar $z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda \,.\, t^2$; die Combination der beiden ersten der ursprünglichen Gleichungen zweiter Ordnung behufs Bildung der lebendigen Kraft liefert

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -g\cos\lambda \cdot \frac{dy}{dt}$$

und folglich

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - \frac{1}{2}(a^2+b^2) = -g\cos\lambda \,.\, y.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth $\frac{dx}{dt} = a - 2\omega y$ ein, so folgt die Anfangslage des Punktes der Coordinatenursprung und α der Winkel ist, den v_0 mit der x-Axe bildet, für die Componenten die Geschwindigkeit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha - 2\,\omega \sin\lambda \,.\, y\,, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha + 2\,\omega \sin\lambda \,.\, x$$

und weil $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2$ ist, ergibt sich als relative Bahn des Punktes der Kreis

$$\left(y - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}\right)^2 + \left(x + \frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda}\right)^2$$

vom Radius $\frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda}$ und den Mittelpunktscoordinaten

$$x_1 = -\frac{v_0 \sin\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}, \quad y_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{2\,\omega \sin\lambda}.$$

Dividirt man v_0 durch den Radius des Kreises, so drückt der Quotient $\varpi = 2\,\omega \sin\lambda$ die Winkelgeschwindigkeit aus, mit welcher der Radius der Bewegung des Punktes folgt; dieselbe ist unabhängig von v_0, also für alle Bewegungen dieselbe. Für die Breite von 30° ist der Radius des Kreises $\frac{v_0}{0{,}000073} = 13698 \,.\, v_0$. Die Zeit t, nach welcher der Punkt an seinen Ausgangsort zurückzukehren strebt, ist $t_1 = \frac{\pi}{\omega \sin\lambda}$.

Nach der Zeit t_1 hat der bewegliche Punkt auf dem Kreise einen Weg zurückgelegt, dessen Projection auf die Richtung von v_0 den Werth $e = \frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda} \cdot \sin \varpi t$ hat und seine Abweichung von dieser Richtung beträgt $d = \frac{v_0}{2\,\omega \sin\lambda}(1 - \cos\varpi t)$. Entwickelt man $\sin\varpi t$ und $\cos\varpi t$ in Reihen und nimmt für kleine t deren Anfangsglieder, so erhält man vermöge der Bedeutung von ϖ die Ausdrücke $e = v_0 t$; $d = v_0\, \omega \sin\lambda \cdot t^2 = \frac{\omega \sin\lambda}{v_0} \cdot e^2$.

Die dritte der obigen Gleichungen: $0 = -2\,\omega \cos\lambda \frac{dx}{dt} + g - N$ liefert die Widerstandsbeschleunigung, welche die Horizontalebene leisten muss. Für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ bewegt sich der Punkt anfangs in der Richtung des Meridians und ist $\frac{dx}{dt} = 0$, also $N = g$; für $\alpha = 0$ geht er von Westen nach Osten und ist $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$, also $N = g - 2\,\omega\, v_0 \cos\lambda$; für $\alpha = \pi$ wird $N = g + 2\,\omega\, v_0 \cos\lambda$.

Unter dem Aequator ist $\lambda = 0$, also der Radius der Bahn unendlich gross; dort beschreibt der Punkt eine Gerade und weicht also nicht von der Richtung von v_0 ab, indessen ist der Widerstand $N = g - 2\,\omega \frac{dx}{dt}$.

Für den Pol muss die ganze Untersuchung etwas anders geführt werden, da dort die Voraussetzung nicht mehr zulässig ist, dass der Abstand des beweglichen Punktes von der Erdaxe sich nur wenig im Laufe der Bewegung ändere. Am Pole ist die relative Geschwindigkeit senkrecht zur Erdaxe; es fällt mithin die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung in die Horizontalebene. Man erhält dort die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2 y, \quad 0 = g - N,$$

worin die Glieder $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ von der Centrifugalbeschleunigung $\omega^2 r$ herrühren. Behufs der Integration ist

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \omega^2(x^2 + y^2), \quad \text{oder} \quad v^2 = v_0^2 + \omega^2 r^2,$$

sowie

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{d. h.} \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \omega(x^2 + y^2).$$

Diese beiden Gleichungen sind identisch mit

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = v_0^2 + \omega^2 r^2 \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

und aus ihnen folgt $\vartheta = \omega t$, $r = v_0 t$, oder also

$$r = \frac{v_0}{\omega}\vartheta,$$

d. h. der Punkt beschreibt eine archimedische Spirale um den Pol.

§. 9. Relative Bewegung eines freien schweren Punktes. Wählen wir den Ursprung des Coordinatensystems in der Anfangslage des Punktes, die z-Axe in der Meridianebene parallel der Erdaxe und positiv nach Norden, die y-Axe in der Richtung des Radius des Parallelkreises, positiv nach aussen, zur x-Axe die Tangente des Parallelkreises, positiv nach Osten gerichtet, so sind unter der Breite λ die Componenten der Beschleunigung der relativen Schwere:

$$0, \quad -g\cos\lambda, \quad -g\sin\lambda$$

und die der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung $-2\omega\frac{dy}{dt}$, $2\omega\frac{dx}{dt}$, 0 und hiermit die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} - g\cos\lambda, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\lambda;$$

dieselben liefern, wenn a, b, c die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit v_0 bezeichnen für die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$\frac{dx}{dt} = a - 2\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = b + 2\omega x - g\cos\lambda \, . \, t, \quad \frac{dz}{dt} = c - g\sin\lambda \, . \, t.$$

Dies Gleichungssystem ist linear und also nach bekannten Methoden leicht integrirbar. Die dritte Gleichung gibt unmittelbar $z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda \, . \, t^2$; die Combination der beiden ersten der ursprünglichen Gleichungen zweiter Ordnung behufs Bildung der lebendigen Kraft liefert

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -g\cos\lambda \cdot \frac{dy}{dt}$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = -g\cos\lambda \, . \, y.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth $\frac{dx}{dt} = a - 2\omega y$ ein, so folgt

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{b^2 + 2(2a\omega - g\cos\lambda)y - 4\omega^2 y^2}}.$$

Hieraus ergibt sich, indem man abkürzend $\frac{b}{2\omega} = \beta$, $\frac{2a\omega - g\cos\lambda}{4\omega^2} = \alpha$ setzt, nach leichter Transformation

$$2\omega t - \operatorname{Arc\,sin}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \operatorname{Arc\,sin}\frac{y-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

und hieraus, indem man rechts und links Sinusse nimmt nach Wiedereinführung der Werthe für α und β:

$$4\omega^2 y = (2\omega a - g\cos\lambda)(1 - \cos 2\omega t) + 2\omega b \sin 2\omega t.$$

Hierzu liefert die Gleichung $\frac{dx}{dt} = a - 2\omega y$:

$$x = at - \frac{2\omega a - g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t) - \frac{b}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t).$$

Demnach ist die Lösung des Problems in folgendem Gleichungssysteme enthalten:

$$x = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t) + \tfrac{1}{2}\frac{a}{\omega}\sin 2\omega t - \tfrac{1}{2}\frac{b}{\omega}(1 - \cos 2\omega t),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{b}{\omega}\sin 2\omega t + \left(\tfrac{1}{2}\frac{a}{\omega} - \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}\right)(1 - \cos 2\omega t),$$

$$z = ct - \tfrac{1}{2} g \sin\lambda \,.\, t^2;$$

$$v_x = a - 2\omega y, \quad v_y = b + 2\omega x - g\cos\lambda \,.\, t, \quad v_z = c - g\sin\lambda \,.\, t.$$

Wir leiten hieraus in den folgenden Paragraphen die Behandlung einiger specieller Fälle ab.

§. 10. Relative Bewegung eines frei fallenden schweren Punktes. Für dieselbe ist zu setzen $a = b = c = v_0 = 0$. Dann sind die Gleichungen für die Lage und Geschwindigkeit des Punktes

$$\begin{aligned} x &= \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t), & v_x &= -2\omega y \\ y &= -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t), & v_y &= 2\omega x - g\cos\lambda \,.\, t \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = -g(y\cos\lambda + z\sin\lambda) \\ z &= -\tfrac{1}{2} g\sin\lambda \,.\, t^2, & v_z &= -g\sin\lambda \,.\, t. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Gleichungen zeigen, dass die Projection der Bahn des Punktes auf die Ebene des Parallelkreises der Anfangslage ein Cycloïdenbogen ist; die Cycloïde hat die Linie von Osten nach Westen zur Basis und liegt dem Mittelpunkte des Parallelkreises zugewandt; der Radius des Wälzungskreises ist $\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}$ und der Wälzungswinkel zur Zeit t gleich $2\omega t$. Der Wälzungskreis dreht sich daher mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde um. Die übrigen Combinationen der drei ersten Gleichungen zu zweien geben die Projectionen der Bahn auf den Meridian und die zur Erdaxe parallele Ebene der xz. Da y und z negativ sind, so folgt, dass die Projectionen des fallenden Punktes dem Mittelpunkte des Parallelkreises und der Ebene des Aequators zufallen.

Die vorliegende Untersuchung gilt übrigens nur für mittlere Breiten. Um die Grenze der Präcision der Formeln zu bestimmen, muss daran erinnert werden, dass die Intensität g' der Beschleunigung der Schwere in der Höhe h über der Erdoberfläche (s. S. 345) durch die Formel $\frac{g'}{g} = \frac{1}{(R+h)^2} : \frac{1}{R^2}$ gegeben wird, aus welcher man für die Differenz $\Delta g' = g - g'$ die Näherungsformel $\Delta g' = \frac{2gh}{R}$ construirt. Der Erdradius ist im Mittel $R = 6376000$ Meter, daher würde für $h = 3000$ Meter g um 0,008 variiren. Für mittlere Breiten, wie z. B. für Paris, beträgt der Radius des Wälzungskreises der Cycloïde $\frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} = 303743650$ Meter und da derselbe mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω sich umdreht, so würde er zu einer vollen Umdrehung 43082 Secunden, zu $\frac{1}{4}$ Grad also 29,918 Secunden gebrauchen. In dieser Zeit fällt der Punkt aber von der Höhe von 4380 Meter, einer Höhe, für welche die Variation von g bereits grösser als 0,008 ist. Man wird also die obigen Formeln nicht über $t = 29{,}918$ oder 30 Secunden ausdehnen dürfen. Dafür bleibt $2\omega t$ unter 0,00438 und wenn man x, y, z in Reihen nach t entwickelt, so wird $\frac{1}{5!}(2\omega t)^5$ erst an der 21. Stelle eine Ziffer liefern und werden für x, y, z folgende Formeln bis zur 16. Decimale exact sein:

$$x = \tfrac{1}{3} g\omega \cos \lambda \,.\, t^3, \quad y = -\tfrac{1}{2} g \cos \lambda \,.\, t^2 + \tfrac{1}{6} g\omega^2 \cos \lambda \,.\, t^4, \quad z = -\tfrac{1}{2} g \sin \lambda \,.\, t^2.$$

Transformirt man die Coordinatenaxen so (Fig. 215), dass die z-Axe die Vertikale der Anfangslage positiv aufwärts und die y-Axe die Tangente des Meridians, positiv von Norden nach Süden gerechnet wird, während die x-Axe bleibt, so werden die neuen Coordinaten x', y', z'

$$x' = x, \quad y' = y \sin \lambda - z \cos \lambda, \quad z' = y \cos \lambda + z \sin \lambda$$ und folglich

$$x' = \tfrac{1}{3} g\omega \cos \lambda \,.\, t^3,$$
$$y' = \tfrac{1}{6} g\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \,.\, t^4,$$
$$z' = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \tfrac{1}{6} g\omega^2 \cos^2 \lambda \,.\, t^4.$$

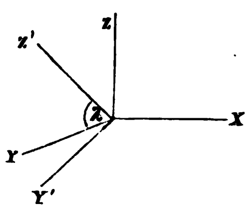

Fig. 215.

Man sieht hieraus, dass die Abweichung des Punktes nach Osten vorwiegt, dass eine sehr kleine Abweichung nach Süden stattfindet und dass die Fallhöhe um ein Unbedeutendes verringert wird durch die Rotation der Erde. Vernachlässigt man die mit dem Quadrate von ω behafteten Glieder, so wird $x' = \frac{1}{3} g\omega \cos \lambda \,.\, t^3$, $y' = 0$, $z' = -\frac{1}{2} g t^2$. Die Bahn stellt sich dann approximativ unter der Form der Neil'schen Parabel $x' = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{g}}\, \omega \cos \lambda \,.\, (-z')^{\frac{3}{2}}$ in der Vertikalebene von Westen nach Osten dar.

§. 11. Relative Bewegung eines vertikal in die Höhe geschleuderten Punktes. Für denselben ist $a = 0$, $b = v_0 \cos \lambda$, $c = v_0 \sin \lambda$, mithin nach §. 9:

$$x = \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t) - \frac{1}{2}\frac{v_0 \cos \lambda}{\omega}(1 - \cos 2\omega t), \qquad v_x = -2\omega y$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{v_0 \cos \lambda}{\omega} \sin 2\omega t - \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t), \qquad v_y = v_0 \cos \lambda + 2\omega x - g \cos \lambda \,.\, t$$

$$z = v_0 \sin \lambda \,.\, t - \tfrac{1}{2} g \sin \lambda \,.\, t^2, \qquad v_z = v_0 \sin \lambda - g \sin \lambda \,.\, t.$$

Man kann sehr leicht die Bahn der Projection des Punktes auf die Ebene des Parallelkreises ermitteln. Zu dem Ende schreiben wir die beiden ersten Gleichungen so:

$$x + \tfrac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\omega}(1 - \cos 2\omega t) = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t)$$
$$y - \tfrac{1}{2}\frac{v_0 \cos\lambda}{\omega}\sin 2\omega t = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t)$$

und setzen

$$-\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\omega}(1 - \cos 2\omega t) = \xi, \quad \tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\omega}\sin 2\omega t = \eta,$$

wodurch wir erhalten

$$x - \xi = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t), \quad y - \eta = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t),$$

welches in Bezug auf ein in Translation begriffenes, in der Ebene des Parallelkreises bewegliches System, dessen Punkte sämmtlich Bahnen, congruent mit der Bahn des Punktes ξ, η beschreiben, die Gleichungen einer Cycloïde von derselben Beschaffenheit, wie die des §. 10 sind. Der Punkt ξ, η beschreibt aber einen Kreis $\left(\xi + \tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\omega}\right)^2 + \eta^2 = \left(\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\omega}\right)^2$ vom Radius $\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\omega}$, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $\xi = -\tfrac{1}{2}\frac{v_0\cos\lambda}{\omega}$, $\eta = 0$ hat. Der Radius dieses Kreises, welcher nach dem Projectionspunkte x, y führt, dreht sich in der Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω in entgegengesetztem Sinne, wie die Erde. Die Projection des beweglichen Punktes ist also ein Punkt auf dem Umfange eines Kreises vom Radius $\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}$, welcher auf einer zur Linie von Westen nach Osten parallel fortrückenden Geraden mit der Winkelgeschwindigkeit 2ω rollt, deren Punkte sämmtlich Kreise beschreiben, parallel und gleich dem vom Punkte (ξ, η) beschriebenen. Anfangs findet eine Abweichung nach Westen statt, später nach Osten. Das Maximum der westlichen Abweichung wird zur Zeit erreicht, welche $\frac{dx}{dt} = 0$ macht. Diese Bedingung liefert $\frac{\operatorname{tg}\omega t}{\omega t}\cdot t = \frac{2v_0}{g}$; da ωt sehr klein bleibt, so folgt hieraus approximativ $t = \frac{2v_0}{g}$, also doppelt so gross, wie die Steigzeit eines Punktes von der Geschwindigkeit v_0 bei ruhender Erde.

Entwickelt man in Reihen, so erhält man

$$x = -v_0\omega\cos\lambda\,.\,t^2 + \tfrac{1}{3}g\omega\cos\lambda\,.\,t^3,$$
$$y = v_0\cos\lambda\,.\,t - \tfrac{1}{2}g\cos\lambda\,.\,t^2 - \tfrac{2}{3}v_0\omega^2\cos\lambda\,.\,t^3 + \tfrac{1}{6}g\omega^2\cos\lambda\,.\,t^4,$$
$$z = v_0\sin\lambda\,.\,t - \tfrac{1}{2}g\sin\lambda\,.\,t^2.$$

Transformirt man das Coordinatensystem, sodass die y-Axe horizontal, die z-Axe vertikal wird, d. h. substituirt man in die Gleichungen $y' = y\sin\lambda - z\cos\lambda$, $z' = y\cos\lambda + z\sin\lambda$, wie §. 10, so ergibt sich:

$$y' = \tfrac{1}{6}\omega^2\sin\lambda\cos\lambda(gt^4 - 4v_0t^3),$$
$$z' = v_0t - \tfrac{1}{2}gt^2 - \tfrac{2}{3}v_0\omega^2\cos^2\lambda\,.\,t^3 + \tfrac{1}{6}\omega^2 g\cos^2\lambda\,.\,t^4.$$

während $x' = x$ bleibt. Weiter:

$$\frac{dy'}{dt} = \tfrac{2}{3}\omega^2\sin\lambda\cos\lambda(gt^3 - 3v_0t^2), \quad \frac{dz'}{dt} = v_0 - gt + \tfrac{2}{3}\omega^2\cos^2\lambda(gt^3 - 3v_0t^2).$$

Die Steigzeit ergibt sich aus der Bedingung $\frac{dz'}{dt} = 0$. Sie ist nur sehr wenig verschieden von der Steigzeit bei ruhender Erde. Nimmt man für sie also $t = \frac{v_0}{g}$, so ergibt sich hierzu die Steighöhe h aus der Formel für z':

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \omega^2 \cos^2\lambda \cdot \frac{v_0^2}{g}\right).$$

Die Gleichung für y' zeigt, dass im Meridian eine Abweichung nach Norden stattfindet; für die höchste Lage ist dieselbe $\frac{1}{3}\,\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \cdot \frac{h^2}{g}$; sie ist sehr gering. Die Abweichung nach Westen, welche die Formel für x ergibt, ist für die höchste Höhe $-\frac{4}{3}\,\omega \cos\lambda\, h \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Diese Abweichung ist doppelt so gross, als die östliche Abweichung, welche der Punkt bei freiem Falle von der Höhe h erleiden würde.

§. 12. **Relative Bewegung eines schweren Punktes von beliebig gerichteter Anfangsgeschwindigkeit.** In diesem Falle sind alle drei Componenten a, b, c der Anfangsgeschwindigkeit von Null verschieden; daher hat man die allgemeinen Gleichungen des §. 9 zu discutiren. Wir schreiben dieselben behufs ihrer Interpretation so:

$$x - \left[\frac{1}{2}\frac{a}{\omega}\sin 2\omega t - \frac{1}{2}\frac{b}{\omega}(1 - \cos 2\omega t)\right] = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t)$$
$$y - \left[\frac{1}{2}\frac{b}{\omega}\sin 2\omega t - \frac{1}{2}\frac{a}{\omega}(1 - \cos 2\omega t)\right] = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t)$$
$$z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda\,.\,t^2.$$

Setzt man wieder

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{a}{\omega}\sin 2\omega t - \frac{1}{2}\frac{b}{\omega}(1 - \cos 2\omega t),\quad \eta = \frac{1}{2}\frac{b}{\omega}\sin 2\omega t - \frac{1}{2}\frac{a}{\omega}(1 - \cos 2\omega t),$$

so erkennt man, dass die Gleichungen

$$x - \xi = \frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(2\omega t - \sin 2\omega t),\quad y - \eta = -\frac{g\cos\lambda}{4\omega^2}(1 - \cos 2\omega t)$$

auf einer im Parallelkreise in Translation begriffenen Ebene eine Cycloïde bestimmen. Die Basis derselben bleibt der Tangente des Parallelkreises parallel; der Wälzungskreis hat, wie früher, die Winkelgeschwindigkeit 2ω, die Translationsbahn ist auch hier ein Kreis, dessen Mittelpunkt aber nicht mehr in der Tangente des Parallelkreises liegt. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$\left(\xi + \frac{1}{2}\frac{b}{\omega}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\frac{a}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{a}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{b}{\omega}\right)^2;$$

der Mittelpunkt hat die Coordinaten $\xi = -\frac{1}{2}\frac{b}{\omega}$, $\eta = \frac{1}{2}\frac{a}{\omega}$ und der Radius beträgt $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\omega}$.

Um alle übrigen Umstände der Bewegung mit genügender Genauigkeit zu erörtern, wollen wir x, y, z in Reihen entwickeln, aber die Glieder, welche ω^2 enthalten, unterdrücken. Wir erhalten dadurch

$$x = at - b\omega t^2 + \frac{1}{3}\omega g\cos\lambda\,.\,t^3$$
$$y = bt + (a\omega - \frac{1}{2}g\cos\lambda)\,.\,t^2$$
$$z = ct - \frac{1}{2}g\sin\lambda\,.\,t^2.$$

Grösserer Bequemlichkeit wegen wollen wir aber als $x'y'$-Ebene den Horizont, als

z'-Axe die Vertikale, positiv nach oben gerechnet, annehmen und dabei die y'-Axe in die Richtung der Projection der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf den Horizont legen, positiv im Sinne dieser Projection gerechnet, während die x'-Axe senkrecht auf der durch v_0 gehenden Vertikalebene stehen soll, positiv nach links genommen für einen im Sinne der Projection von v_0 sehenden Punkt. Die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit sei bestimmt durch den Winkel α ihrer Vertikalebene mit dem Meridian (positiv nach links) und den Winkel φ, den sie mit dem Horizonte bildet. Aus den sphärischen Dreiecken, welche auf einer um den Ursprung beschriebenen Kugel die Richtungen von x, y, z, x', y', z'; v_0 und seine Projection auf den Horizont bestimmen, ergeben sich dann

$$a = v_0 \cos\varphi \sin\alpha\,, \quad b = v_0(\sin\varphi\cos\lambda + \cos\varphi\cos\alpha\sin\lambda)\,,$$
$$c = v_0(\sin\varphi\sin\lambda - \cos\varphi\cos\alpha\cos\lambda)$$
$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha\sin\lambda + z\sin\alpha\cos\lambda\,, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha\sin\lambda - z\cos\alpha\cos\lambda\,, \\ z' &= y\cos\lambda + z\sin\lambda \end{aligned}$$

und hiermit also

$$\begin{aligned} x' &= -\omega v_0(\cos\varphi\sin\lambda + \cos\alpha\sin\varphi\cos\lambda)t^2 + \tfrac{1}{3}\omega g\cos\alpha\cos\lambda\,.\,t^3\,, \\ y' &= \quad v_0\cos\varphi\,.\,t - v_0\omega\sin\alpha\sin\varphi\cos\lambda\,.\,t^2 + \tfrac{1}{3}\omega g\sin\alpha\cos\lambda\,.\,t^3\,, \\ z' &= \quad v_0\sin\varphi\,.\,t + (v_0\omega\sin\alpha\cos\varphi\cos\lambda - \tfrac{1}{2}g)t^2\,. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln zieht man nachstehende Folgerungen:

1. Für $z' = 0$ erhält man die Flugzeit t_1:

$$t_1 = \frac{2v_0\sin\varphi}{g - 2\omega v_0\sin\alpha\cos\varphi\cos\lambda}\,.$$

Fällt v_0 in den Meridian, so ist $\alpha = 0$, also $t_1 = \frac{2v_0\sin\varphi}{g}$, dieselbe Dauer, wie nach S. 362 bei stillstehender Erde. Ist α positiv, liegt also v_0 auf der Ostseite des Meridians, so ist t_1 etwas grösser, für die Westseite des Meridians ist t_1 etwas kleiner, als dieser Werth, doch sind die Unterschiede sehr gering, sodass man $t_1 = \frac{2v_0\sin\varphi}{g}$ als Mittelwerth annehmen kann.

2. Die Formel für y' liefert die Wurfweite w, wenn man den Werth für t_1 in sie einführt. Mit Hülfe des eben gegebenen Näherungswerthes für t_1 erhält man w etwas grösser oder kleiner, als für die ruhende Erde, je nachdem v_0 westlich oder östlich gegen den Meridian geneigt ist; für den Meridian selbst ist w genau ebenso gross, wie bei ruhender Erde.

3. Die Formel für x' liefert, indem man t_1 in sie einsetzt, die Abweichung δ nach rechts oder links von der vertikalen Zielebene. Man findet

$$\delta = -\tfrac{4}{3}\omega\cos\lambda\cdot\frac{v_0^3\sin^3\varphi}{g^2}\left(\cos\alpha + 3\,\frac{\operatorname{tg}\lambda}{\operatorname{tg}\varphi}\right).$$

Die Abweichung ist nach rechts gerichtet, so lange die Parenthese positiv, welches immer stattfindet, so lange $\operatorname{tg}\varphi < 3\operatorname{tg}\lambda$ ist; sie ist in diesem Sinne bei gleichen Werthen φ ein Maximum für $\alpha = 0$, d. h. für das Zielen im Meridian von Norden nach Süden; sie wird ein Minimum für das Zielen von Süden nach Norden. Wird $\operatorname{tg}\varphi > 3\operatorname{tg}\lambda$, so wird bei einem gewissen Werthe von α die Parenthese negativ dann fällt die Abweichung nach links von der Zielebene. Für den Aequator ist $\delta = -\tfrac{4}{3}\omega\frac{v_0^3\sin^3\varphi}{g^2}\cos\alpha$. Die Abweichung zeigt nach links beim Schuss von

Süden nach Norden, nach rechts im umgekehrten Falle; sie ist Null für den Schuss von Westen nach Osten oder von Osten nach Westen.

Vgl. über die Probleme der §§. 8—12:

Page, Mouvements relatifs à la surface de la terre (Nouv. Ann. de Mathém. 2me Série, T. VI (1867), pp. 97, 387, 481).

Resal, Méthode directe pour déterminer l'influence de la rotation de la terre sur la chute des graves (Nouv. Annales de Math. 2me Sér. T. XI, p. 348) und Interprétation geométrique de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide (T. XI, p. 433).

§. 13. Einige Uebungsbeispiele.

Nr. 1. Ein Punkt wird nach einem beweglichen Centrum hin proportional seiner Entfernung von ihm beschleunigt; das Centrum beschreibt eine Gerade mit constanter Geschwindigkeit; die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes fällt mit der Geraden, welche das Centrum beschreibt, in eine Ebene. Man soll die relative und die absolute Bewegung des Punktes bestimmen.

Die Gerade, welche das Centrum durchläuft, sei die x-Axe eines rechtwinkligen Systems der xy; α, β die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Centrums, a, b die der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes, m, n die Coordinaten seiner Anfangslage, μ die Stärke der Beschleunigung in der Einheit der Entfernung vom Centrum.

Nr. 2. Ein schwerer Punkt fällt auf einer schiefen Ebene. Diese Ebene besitzt eine gleichförmige Translationsbewegung von geradliniger Beschaffenheit, so zwar, dass die Linie des steilsten Abfalles immer in derselben Vertikalebene bleibt. Man soll die absolute Bewegung des Punktes bestimmen. — Dieselbe Aufgabe für den Fall, dass die Translation der Ebene gleichförmig beschleunigt ist.

Nr. 3. Ein Punkt, der Schwere unterworfen, bewegt sich auf einer geneigten Geraden (befindet sich z. B. in einer engen Röhre); die Gerade beschreibt um die Vertikale eine Kegelfläche mit kreisförmigem Schnitt senkrecht zur Vertikalen mit constanter Winkelgeschwindigkeit, welches ist die Projection der absoluten Bewegung des Punktes auf die Horizontalebene?

Nr. 4. Ein schwerer Punkt wird längs einer Ebene geworfen, welche sich um eine horizontale Axe mit gleichförmiger Geschwindigkeit umdreht. Welches ist die Bewegung des Punktes, wo und wann verlässt er die Ebene?

Nr. 5. Ein schwerer Punkt bewegt sich in einer Vertikalebene, welche sich um eine vertikale Axe gleichförmig umdreht. Welches ist die Bewegung des Punktes?

Nr. 6. Eine horizontale Platte sinkt mit der Beschleunigung α vertikal abwärts, ein schwerer Punkt liegt auf ihr; welches ist die relative Druckbeschleunigung des Punktes gegen die Platte?

Nr. 7. Eine Hohlschaale (Rotationsfläche) dreht sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit um ihre vertikal stehende Rotationsaxe; in ihr liegt ein schwerer Punkt; in welchen Lagen kann der Punkt sich in relativer Ruhe gegen die Schaale befinden?

§. 14. Wir wollen in diesem Capitel in Kürze noch Einiges über die relative Beschleunigung eines unveränderlichen Systems in einem anderen entwickeln.

Es seien Σ', Σ'' zwei unveränderliche Systeme, welche sich ineinander bewegen. Die Elementarbewegung eines jeden ist eine Schraubenbewegung von bestimmter Translation und Rotation um eine bestimmte Axe. Die Elementarbewegung von Σ'' zur Zeit t lässt sich in zwei Componenten auflösen, nämlich in die relative Elementarbewegung von Σ'' im System Σ' und die Elementarbewegung des mit Σ'' zusammenfallenden, dem System Σ' angehörigen Systems σ'', welche letztere Bewegung unmittelbar durch die Bewegung von Σ' gegeben ist. Jede dieser Bewegungen zerfällt in eine Rotation und Translation. Nun seien ω', v'; ω'', v'' die Winkelgeschwindigkeiten und Translationsgeschwindigkeiten der absoluten Bewegungen von Σ', Σ'' zur Zeit t, ebenso ω''_r, v''_r die entsprechenden Grössen der relativen Bewegung von Σ'' in Σ' zu derselben Zeit und mögen dieselben auf den betreffenden Schraubenaxen als Längen aufgetragen werden. Die analoge Bedeutung für die Zeit $t + dt$ mögen ω'_1, v'_1, ω''_1, v''_1; ω''_{1r}, v''_{1r} haben. Dann wird jede dieser drei Bewegungen zur Zeit t einen bestimmten Beschleunigungszustand besitzen, welcher durch Centripetal- und Winkelbeschleunigung in Bezug auf den betreffenden Beschleunigungsmittelpunkt dargestellt werden kann und es fragt sich, in welchem Zusammenhange diese Beschleunigungen unter einander stehen.

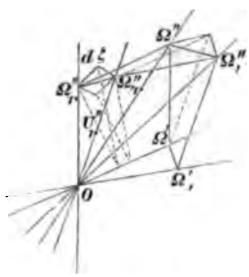

Fig. 216.

Wir begnügen uns damit, die Abhängigkeit der Winkelbeschleunigungen zu entwickeln. Durch irgend einen Punkt O ziehen wir $O\Omega'$ (Fig. 216) geometrisch gleich der Winkelgeschwindigkeit ω' der absoluten Bewegung des Systems Σ'; ebenso $O\Omega''_r$ geometrisch gleich der relativen Winkelgeschwindigkeit ω''_r des Systems Σ'' im System Σ' zur Zeit t. Das Parallelogramm beider Linien liefert durch seine Diagonale $O\Omega''$ Grösse, Axenrichtung und Sinn der absoluten Winkelgeschwindigkeit ω'' von Σ''. Ziehen wir durch O weiter $O\Omega'_1 = \omega'_1$ und $O\Omega''_{1r}$, so liefert die Diagonale $O\Omega''$ des Parallelogramms aus ihnen die absolute Winkelgeschwindigkeit von Σ'' zur Zeit $t + dt$. Die unendlichkleine Linie $\Omega''\Omega''_1$ ist daher die Elementarwinkelbeschleunigung der absoluten Bewegung von Σ'' und also $\Omega''\Omega''_1 : dt$ ihre Winkelbeschleunigung selbst. Eine parallele Uebertragung genügt, um zu zeigen, dass $\Omega''\Omega''_1$ die geometrische Summe der Elementarbeschleunigungen $\Omega''_r\Omega''_{1r}$ und $\Omega'\Omega'_1$ ist. Von diesen beiden Grössen ist die letztere die Elementarwinkelbeschleunigung von Σ' oder also auch von σ'', die erstere aber hängt mit der relativen Elementarbeschleunigung von Σ'' in Σ' folgendermassen zusammen. Sie wäre die relative Elementarwinkelbeschleunigung selbst, wenn die relative Momentanaxe nicht durch die Rotation um die absolute Momentanaxe von Σ' eine unendlichkleine Drehung erlitte, in Folge deren $\Omega''_r\Omega''_{1r}$ die geometrische Summe der relativen Elementarwinkelbeschleunigung von Σ'' in Σ' und einer weiteren unendlichkleinen Elementarwinkelbeschleunigung $d\zeta$ wird, welche durch die Rotation um $O\Omega'$ hervorgerufen wird. Vermöge dieser beschreibt nämlich der Endpunkt der relativen Winkelbeschleunigung $O\Omega''_r$ um die Axe $O\Omega'$ einen unendlichkleinen Kreisbogen, dessen Radius die Projection u''_r von ω''_r auf eine zur Momentanaxe $O\Omega'$ senkrechte Ebene ist. Die Länge desselben ist daher $u''_r \omega'_r dt$ und tritt als Componente der Elementarwinkelbeschleunigung $\Omega''_r \Omega''_1$ auf. Dividirt man die erhaltenen unendlichkleinen Componenten mit dt, so ergibt sich für die entsprechenden endlichen Winkelbeschleunigungscomponenten der Satz:

Die Winkelbeschleunigung α'' der absoluten Bewegung des Systems Σ'' ist die Resultante von drei Winkelbeschleunigungen: 1. der relativen Winkelbeschleunigung α''_r des Systems Σ'' in einem andern System Σ', 2. der absoluten Winkelbeschleunigung α' von Σ' oder, was dasselbe ist, der Winkelbeschleunigung des mit Σ'' zusammenfallenden Bestandtheils σ'' von Σ' und 3. einer Winkelbeschleunigung, welche erhalten wird, indem man die Projection u''_r der relativen Winkelgeschwindigkeit ω''_r des Systems Σ'' auf eine zur Momentanaxe von Σ' senkrechte Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω' dieses Systems multiplicirt. Die Axe dieser Winkelbeschleunigung ist senkrecht zur Ebene parallel der Momentanaxe und der Axe der relativen Winkelbeschleunigung und ihr Sinn harmonirt mit dem Drehungssinne der letzteren.

Aus der Natur des Parallelogramms $O\Omega''_r \Omega'' \Omega'$ erkennt man, dass der Endpunkt Ω'' der absoluten Winkelgeschwindigkeit ω'' einen Kreisbogen von derselben Grösse, wie der von ω''_r beschreibt, sodass die Projectionen u'' von ω'' und u''_r von ω''_r gleich sind und im Ausdruck des Satzes also auch für einander gebraucht werden können.

Die dritte Componente entspricht der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung eines Punktes; nur hat jene den Factor 2, weil sie aus einer doppelten Quelle entsprang, der Rotation um die Momentanaxe und dem Fortschreiten des Punktes im System, von welchem die letztere hier nicht mitwirkt, weil für die Winkelgeschwindigkeiten nur Rotationen von Einfluss sind. Die dritte Componente verschwindet, sobald Σ' blos Translationsgeschwindigkeit besitzt oder ω''_r der Momentanaxe $O\Omega'$ parallel ist, oder Σ'' sich blos in relativer Translation oder in relativer Ruhe befindet.

Fügt man Σ'' die entgegengesetzte Bewegung von Σ' noch zu seiner absoluten Bewegung hinzu, so erhält man aus vorstehendem Satze sofort einen entsprechenden für die relative Winkelbeschleunigung von Σ'' in Σ' nämlich:

Die Winkelbeschleunigung der relativen Bewegung eines

Systems Σ'' in einem anderen Systeme Σ' besteht 1. aus der absoluten Winkelbeschleunigung von Σ'', 2. aus der in entgegengesetztem Sinne genommmenen Winkelbeschleunigung des Systems Σ'' und 3. aus einer Winkelbeschleunigung gleich dem Produkte aus der Projection der relativen oder absoluten Winkelgeschwindigkeit von Σ'' auf eine zur Momentanaxe von Σ' senkrechte Ebene in die Winkelgeschwindigkeit um diese Momentanaxe; die Axe derselben ist senkrecht zur Ebene der Momentanaxe und der Axe der relativen Winkelbeschleunigung und nach derjenigen Seite dieser Ebene gerichtet, nach welcher die Rotation um die Momentanaxe nicht hinzeigt.

Wird die relative Winkelgeschwindigkeit ω''_r in mehrere Componenten zerlegt, oder geschieht dies mit der Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ', oder auch mit beiden Grössen zugleich, so ist die dritte Componente der Winkelbeschleunigung stets äquivalent den dritten Componenten, welche aus den einzelnen Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten entspringen, zusammengenommen. Denn wird zunächst ω''_r in zwei Componenten $\omega_r^{(1)}$, $\omega_r^{(2)}$ vermöge des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten zerlegt und projicirt man dies Parallelogramm auf eine zur Momentanaxe von Σ' senkrechte Ebene, so bilden die Projectionen $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$ von $\omega_r^{(1)}$, $\omega_r^{(2)}$ wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonale u''_r die Projection von ω''_r ist. Errichtet man in dieser Ebene auf den Seiten und der Diagonale dieses Parallelogramms Normalen, so geben sie die Richtungen der drei fraglichen dritten Componenten der relativen Winkelbeschleunigung an und da diese Componenten $u_r^{(1)}\omega'$, $u_r^{(2)}\omega'$, $u''_r\omega'$ den Grössen $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$, u''_r proportional sind, so bilden sie wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonale $u''_r\omega'$ ist. Daher ist $u''_r\omega'$ die Resultante von $u_r^{(1)}\omega'$ und $u_r^{(2)}\omega'$. In bekannter Weise dehnt man diesen Satz auf mehr als zwei Componenten aus.

Wird ferner ω' in zwei Componenten $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ gespalten, so lege man durch ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ und ω''_r drei Ebenen. Diese projiciren das Zerlegungsparallelogramm auf die zu ω''_r senkrechte Ebene wieder als ein Parallelogramm, dessen Diagonale und Seiten u', $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ resp. die Projectionen von ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ sind. Fällen wir vom Endpunkte von ω''_r die Perpendikel u''_r, u''_1, u''_2 auf ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, so sind $u''_r\omega'$, $u''_1\omega^{(1)}$, $u''_2\omega^{(2)}$ die drei dritten Winkelbeschleunigungscomponenten, welche ω', $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ entsprechen. Denkt man sich nun in jenen drei projicirenden Ebenen über ω''_r und ω', ω''_r und $\omega^{(1)}$, ω''_r und $\omega^{(2)}$ Parallelogramme, so werden deren Inhalte sowohl durch $u''_r\omega'$, $u''_1\omega^{(1)}$, $u''_2\omega^{(2)}$, als auch durch $\omega'u'$, $\omega'u^{(1)}$, $\omega'u^{(2)}$ ausgedrückt. Letztere drei Grössen sind daher gleich jenen drei dritten Winkelgeschwindigkeitscomponenten. Sie sind aber senkrecht zu den Ebenen der drei Parallelogramme am Punkte O anzutragen und da diese drei Ebenen sich in ω''_r schneiden, so fallen sie alle in die zu ω''_r senkrechte Ebene und sind senkrecht zu u', $u^{(1)}$, $u^{(2)}$. Da sie nun unter einander dieselben Winkel bilden, wie diese Linien und ihnen proportional sind, so bilden sie ein Parallelogramm, in welchem

$$[\omega' u'] = [\omega' u^{(1)}] + [\omega' u^{(2)}] \quad \text{d. h.} \quad [u''_r \omega'] = [u''_1 \omega^{(1)}] + [u''_2 \omega^{(2)}].$$

Die beiden hier entwickelten Fälle des Satzes gestatten offenbar eine unmittelbare Combination zu dem allgemeinen Falle, dass sowohl ω' als auch ω''_r zerlegt werde.

§. 15. Um den analytischen Ausdruck für die Projectionen der absoluten Winkelbeschleunigung von Σ'' auf drei rechtwinklige, mit dem System Σ' verbundene Axen der x', y', z' zu finden, projiciren wir den Linienzug der Winkelbeschleunigung des Systems Σ', der relativen Winkelbeschleunigung und der dritten Beschleunigungscomponente auf diese Axen. Nun sind

$$\frac{d\omega''_{x'}}{dt}, \quad \frac{d\omega''_{y'}}{dt}, \quad \frac{d\omega''_{z'}}{dt}$$

die Projectionen der absoluten Winkelbeschleunigung von Σ'',

$$\frac{d\omega''_{rx'}}{dt}, \quad \frac{d\omega''_{ry}}{dt}, \quad \frac{d\omega''_{rz'}}{dt}$$

die der relativen Winkelbeschleunigung von Σ'' in Σ'; ferner seien $\alpha_{x'}$, $\alpha_{y'}$, $\alpha_{z'}$ die Projectionen der Winkelbeschleunigung von Σ'; endlich ergeben sich die Projectionen der dritten Beschleunigungscomponente $u''_r \omega'$ leicht mit Hülfe des vorigen Satzes, indem man sowohl ω' in $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$, als auch u''_r in drei Componenten auflöst. Indem man die jeder Axe entsprechenden Bestandtheile sammelt, erhält man für letztere Projectionen

$$\omega''_{ry'}\omega'_{z'} - \omega''_{rz'}\omega'_{y'}, \quad \omega''_{rz'}\omega'_{x'} - \omega''_{rx'}\omega'_{z'}, \quad \omega''_{rx'}\omega'_{y'} - \omega''_{ry'}\omega'_{x'}.$$

Aus allen einzelnen Bestandtheilen erhält man demnach jetzt:

$$\frac{d\omega''_{x'}}{dt} = \frac{d\omega''_{rx'}}{dt} + \alpha_{x'} + (\omega''_{ry'}\omega'_{z'} - \omega''_{rz'}\omega'_{y}),$$

$$\frac{d\omega''_{y'}}{dt} = \frac{d\omega''_{ry'}}{dt} + \alpha_{y'} + (\omega''_{rz'}\omega'_{x'} - \omega''_{rx'}\omega'_{z'}),$$

$$\frac{d\omega''_{z'}}{dt} = \frac{d\omega''_{rz'}}{dt} + \alpha_{z'} + (\omega''_{rx'}\omega'_{y'} - \omega''_{ry'}\omega'_{x'}).$$

Sind $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$, $\omega'_{z'}$, $\alpha_{x'}$, $\alpha_{y'}$, $\alpha_{z'}$ nicht unmittelbar bekannt, dagegen $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$, $\alpha_x = \frac{d\omega_{x'}}{dt}$, $\alpha_y = \frac{d\omega_{y'}}{dt}$, $\alpha_z = \frac{d\omega_{z'}}{dt}$ in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, so erhält man erstere Grössen aus letzteren durch Projection und zwar am einfachsten mit Hülfe der drei Euler'schen Winkel, welche die Lage des Coordinatensystems der x', y', z' gegen das feste System der x, y, z bestimmen.

XVII. Capitel.

Beschleunigung zweiter und höherer Ordnung.

§. 1. Von einem beliebigen Punkte O sei nach einem in Bewegung begriffenen Punkte M zur Zeit t der Radiusvector $OM = r$ gezogen. Das Bogenelement $MM' = ds$ der Bahn des Punktes M ist das geometrische Differential und die Geschwindigkeit $v = ds : dt$ die geometrische Derivirte von r. Von O ziehen wir ferner einen zweiten Radiusvector $OM_1 = r_1$, geometrisch gleich dieser Derivirten. Beschreibt M seine Bahn, so beschreibt M_1 den Hodographen derselben. Das Bogenelement $M_1 M_1' = ds_1$ des Hodographen ist das geometrische Differential und $ds_1 : dt = v_1$ die geometrische Derivirte von r_1 oder die Geschwindigkeit von M_1; diese Grössen stellen die Elementarbeschleunigung und die Beschleunigung φ des Punktes M dar. Ein dritter Radiusvector, $OM_2 = r_2$, geometrisch gleich $v_1 = \varphi$ liefert durch die Bewegung seines Endpunktes M_2 einen zweiten Hodographen, dessen Bogenelement $M_2 M_2' = ds_2$ das geometrische Differential von φ ist, während die Derivirte $ds_2 : dt = v_2$ die Derivirte der Beschleunigung φ darstellt. Man nennt v_2 die Beschleunigung zweiter Ordnung der Bewegung des Punktes M und bezeichnet sie mit $\varphi^{(2)}$ und deshalb oft auch die Beschleunigung φ erster Ordnung mit $\varphi^{(1)}$. Ebenso heisst ds_2 die Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung der Bewegung von M.

Indem man auf diesem Wege weitergeht, erhält man 1. eine Reihe Curven (M), (M_1), $(M_2) \ldots$, deren jede für die vorhergehende die Bedeutung eines Hodographen hat und welche von den Punkten M, M_1, $M_2 \ldots$ beschrieben werden, 2. eine Reihe von Radienvectoren r, r_1, $r_2 \ldots$ von denen jeder, wie r_n, die Geschwindigkeit der Bewegung auf der vorhergehenden Hodographencurve (M_{n-1}) wäre und die Beschleunigung der Bewegung auf der zweitvorhergehenden Curve (M_{n-2}) darstellt. Diese Radienvectoren stellen die Reihe der geometrischen Derivirten von r dar und heissen der Reihe nach r_1 die Geschwindigkeit v, r_2 die Beschleunigung φ der Bewegung des Punktes M, $r_3 = \varphi^{(2)}$ die Beschleunigung zweiter, $r_4 = \varphi^{(3)}$ die Beschleunigung dritter, $r_{n+1} = \varphi^{(n)}$ die Beschleunigung $n$ter Ordnung von M. Da man erst spät auf die Wichtigkeit der Glieder $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}, \ldots$ der ganzen Kette von Grössen aufmerksam wurde, so ist die übliche Bezeichnungsweise und Nomenclatur nicht sehr consequent. Verschiedene

Schriftsteller haben diesen Mangel zu beseitigen gesucht und schreiben als zusammengehörig

$$\begin{array}{rl} r,\ r_1,\ r_2,\ r_3 \ldots & r_n \ldots\ldots \\ v,\ v_1,\ v_2 \ldots . & v_{n+1} \ldots\ldots \\ \varphi^{(1)},\ \varphi^{(2)}, \ldots\ldots & \varphi^{(n+1)} \ldots . \\ H_1,\ H_2,\ H_3, \ldots & H_n \ldots . \end{array}$$

wo v die Geschwindigkeit, $\varphi^{(1)} = \varphi$ die Beschleunigung und H_n den n^{ten} Hodographen bedeutet, dessen Radiusvector r_n ist.

Die Kette der Beschleunigungen aller Ordnungen steht mit der Evolutenkette der Curve (M) in inniger Beziehung und zeigt ähnliche Eigenschaften der Periodicität, des Abbrechens, etc. wie diese.

§. 2. Wir wenden uns jetzt zunächst zur Bestimmung der Beschleunigung zweiter Ordnung eines Punktes. Es seien (Fig. 217) M, M', M'', M''' aufeinanderfolgende Punkte der Bahn des beweglichen Punktes, entsprechend den Zeiten t, $t + dt$, etc. MT, $M'T'$, $M''T''$ die Tangenten in M, M', M'', also $MM'M''$, $M'M''M'''$ die Schmiegungsebenen in M und M'. Die Beschleunigung erster Ordnung $\varphi = M\Phi$ zur Zeit t fällt in die erstere dieser Schmiegungsebenen, die Beschleunigung $\varphi + d\varphi = M'\Phi'$ zur Zeit $t + dt$ in die letztere; jene bildet mit der Tangente MT des Punktes M einen Winkel α, diese mit der Tangente des Punktes M' den Winkel $\alpha + d\alpha$. Ziehen wir nun durch M' eine Linie $M'\Phi$ geometrisch gleich φ, so stellt die unendlich kleine Strecke $\Phi\Phi'$ die Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung nach Grösse, Richtung und Sinn dar und ist der Quotient $\frac{\Phi\Phi'}{dt}$ die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ zweiter Ordnung selbst, die wir in der Richtung $\Phi\Phi'$ an Φ oder auch an M antragen können. Wir zerlegen nun zunächst $\varphi^{(2)}$ in zwei Componenten, eine parallel φ, die andere senkrecht zu φ; dieselben sind, wenn $d\lambda$ den unendlich kleinen Winkel $\Phi'M'\Phi$ bezeichnet, $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\varphi\frac{d\lambda}{dt}$, nämlich $\frac{\Phi Q}{dt}$ und $\frac{Q\Phi'}{dt}$. Daher ist $[\varphi^{(2)}] = \left[\frac{d\varphi}{dt}\right] + \left[\varphi\frac{d\lambda}{dt}\right]$.

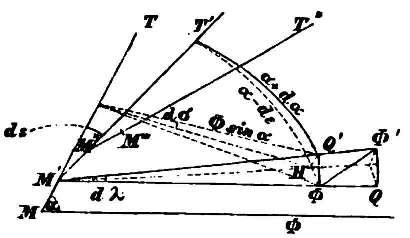

Fig. 217.

Die erstere dieser Componenten zerlegen wir weiter in zwei andere, parallel der Tangente und der Hauptnormalen des Punktes M, nämlich in $\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha$ und $\frac{d\varphi}{dt}\sin\alpha$. Die andere Componente $\varphi\frac{d\lambda}{dt}$ aber spalten wir in zwei weitere, von denen die eine in die Schmiegungsebene des Punktes M fällt, während die andere zu dieser Ebene senkrecht ist. Beschreiben wir nämlich um M' mit $M'\Phi = \varphi$ als Radius eine Kugel, so bestimmen die Ebene $\Phi' M' \Phi$, in welcher φ und $\varphi + d\varphi$ liegen, die Schmiegungsebene $T' M' \Phi$ des Punktes M und die Schmiegungsebene $T' M' \Phi'$ von M' ein sphärisches Dreieck $\Phi Q' T'$, dessen Seiten $\Phi Q' = \varphi d\lambda$, $\Phi T' = \varphi \,.\, (\alpha - d\varepsilon)$, wo $d\varepsilon$ den Contingenzwinkel TMT' bedeutet und $Q'T' = \varphi\,(\alpha + d\alpha)$ sind. Fällen wir in demselben die Höhe $Q'H$, so zerfällt $\varphi d\lambda$ in die beiden Componenten ΦH und $Q'H$ und also $\varphi \dfrac{d\lambda}{dt}$ in $\dfrac{\Phi H}{dt}$ und $\dfrac{Q'H}{dt}$, oder weil $HT' = Q'T'$, also $\Phi H = \varphi \,.\, (\alpha - d\varepsilon - \alpha - d\alpha) = -\varphi\,(d\alpha + d\varepsilon)$ und $Q'H = \varphi \sin\alpha \,.\, d\sigma$ ist, wenn $d\sigma$ den unendlich kleinen Winkel der beiden Schmiegungsebenen in M und M' bedeutet, in die Componenten $-\varphi\left(\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)$ und $\varphi \sin\alpha \,.\, \dfrac{d\sigma}{dt}$, erstere in der Schmiegungsebene von M, letztere senkrecht zu ihr. Demnach ist $\left[\dfrac{d\varphi}{dt}\right] = \left[\dfrac{d\varphi}{dt}\cos\alpha\right] + \left[\dfrac{d\varphi}{dt}\sin\alpha\right]$, $\left[\varphi\dfrac{d\lambda}{dt}\right] = -\left[\left(\varphi\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)\right] + \left[\varphi \sin\alpha \,.\, \dfrac{d\sigma}{dt}\right]$. Die erstere der beiden Componenten $-\varphi\left(\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)$ ist senkrecht zu φ und bildet, da φ gegen MT unter dem Winkel α geneigt ist, mit der Tangente und der Hauptnormalen in M die Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ und $\pi - \alpha$ und zerfällt daher in die tangentielle Componente $-\varphi\left(\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)\sin\alpha$ und die Componente längs der Hauptnormalen $\varphi\left(\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)\cos\alpha$. Demnach hätten wir nach passender Reduction an Componenten der Beschleunigung zweiter Ordnung längs der Tangente

$$\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha - \varphi\frac{d\alpha}{dt}\sin\alpha - \varphi\frac{d\varepsilon}{dt}\sin\alpha = \frac{d(\varphi\cos\alpha)}{dt} - \varphi\frac{d\varepsilon}{dt}\sin\alpha = \frac{d\varphi_t}{dt} - \varphi_n\frac{d\varepsilon}{dt}$$

und längs der Hauptnormalen

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin\alpha + \varphi\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \varphi\cos\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d(\varphi\sin\alpha)}{dt} + \varphi\cos\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varphi_n}{dt} + \varphi_t\frac{d\varepsilon}{dt},$$

sowie endlich zur Schmiegungsebene senkrecht, also parallel der Binormalen oder Krümmungsaxe $\varphi\sin\alpha\dfrac{d\sigma}{dt} = \varphi_n\dfrac{d\sigma}{dt}$. Wir wollen die drei Componenten von $\varphi^{(2)}$ parallel der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen mit $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_n^{(2)}$, $\varphi_b^{(2)}$ bezeichnen, so dass wir also setzen:

$$\varphi_t^{(2)} = \frac{d\varphi_t}{dt} - \varphi_n \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \varphi_n^{(2)} = \frac{d\varphi_n}{dt} + \varphi_t \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \varphi_b^{(2)} = \varphi_n \frac{d\sigma}{dt},$$

worin φ_t, φ_n die Bedeutung der Tangential- und Normalbeschleunigung erster Ordnung haben, wie früher. Nun sind der Krümmungshalbmesser ϱ und der Schmiegungshalbmesser r einer Curve: $\varrho = \frac{ds}{d\varepsilon}$, $r = \frac{ds}{d\sigma}$, daher erhält man mit Rücksicht auf $\frac{ds}{dt} = v$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{\varrho}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{v}{r}$$

und kann die vorstehenden Formeln auch folgendermassen schreiben:

$$\varphi_t^{(2)} = \frac{d\varphi_t}{dt} - \varphi_n \frac{v}{\varrho} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\varrho^2}$$

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{d\varphi_n}{dt} + \varphi_t \frac{v}{\varrho} = \frac{d \cdot \left(\frac{v^2}{\varrho}\right)}{dt} + \frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v}\frac{d\left(\frac{v^3}{\varrho}\right)}{dt} = 3\,\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}$$

$$\varphi_b^{(2)} = \varphi_n \frac{v}{r} = \frac{v^3}{\varrho r}.$$

Der Inhalt dieser Formeln, welche zuerst von Résal (*Traité de cinématique pure, Chap. VI, p. 271*) in etwas anderer Weise als hier abgeleitet wurden, kann in folgenden Satz gefasst werden:

Die Beschleunigung zweiter Ordnung eines Punktes zerfällt in drei Componenten, parallel der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen der Bahn desselben. Die Tangentialcomponente ist der Ueberschuss der zweiten Derivirten der Geschwindigkeit über den Quotienten des Cubus der Geschwindigkeit durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers; die Normalcomponente in der Schmiegungsebene ist der Ueberschuss des dreifachen Produktes aus dem Quotienten der Geschwindigkeit durch den Krümmungshalbmesser in die Tangentialbeschleunigung erster Ordnung über das Produkt aus dem Quotienten vom Cubus der Geschwindigkeit durch das Quadrat des Krümmungshalbmessers in das Verhältniss des Differentials des Krümmungshalbmessers zum Bogenelemente der Bahn; die Binormalcomponente endlich ist gleich dem Cubus der Geschwindigkeit, dividirt durch das Produkt aus dem Krümmungshalbmesser und dem Schmiegungshalbmesser.

Die Formel für $\varphi_t^{(2)}$ ist bei Résal unrichtig; er findet eine Summe statt der Differenz, worauf bereits Somoff (*Mémoire sur les accélerations de divers ordres. St. Pétersbourg, 1864*, in den *Mém. de l'Acad. des scien-*

ces de St. Pétersbourg, *VII^e Série*, *T. VIII*, *No. 5* oder Theoret. Mechanik, übers. von Ziwet, I, p. 61) aufmerksam gemacht hat. Die beiden ersten Componenten enthalten den Krümmungshalbmesser der Bahn, die dritte ausser diesem auch den Schmiegungshalbmesser. Für ebene Bahnen ist $\varphi_b^{(2)} = 0$; für die gleichförmige Kreisbewegung ist $\varphi_n^{(2)} = 0$. Damit ein Punkt eine Curve doppelter Krümmung beschreibe, muss die Schmiegungsebene sich continuirlich ändern und da die Beschleunigung in sie hineinfällt, auch diese. Damit dies eintrete, muss zu der Beschleunigung jeden Augenblick die binormale, unendlich kleine Beschleunigungscomponente $\varphi_b^{(2)} dt$ hinzutreten.

1. Ein Punkt besitzt eine nach Grösse und Richtung constante Beschleunigung. In diesem Falle ist $\varphi^{(2)} = 0$, $\varphi_t^{(2)} = \varphi_n^{(2)} = \varphi_b^{(2)} = 0$. Die Bedingung $\varphi_n^{(2)} = 0$ liefert die Gleichung $\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds} = \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\varrho}$ oder, da $d\varrho$ das Bogenelement der Evolute ist und diese Curve mit der Bahn gleichen Contingenzwinkel $d\varepsilon$ besitzt, also $\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho : d\varepsilon}{ds : d\varepsilon} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$ ist, wenn ϱ_1 den Krümmungshalbmesser der Evolute bezeichnet:

$$\frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\varrho}.$$

Der bewegliche Punkt beschreibt in Folge der constanten Beschleunigung eine Parabel, deren Diameter die Richtung der Beschleunigung besitzen. Bildet nun diese mit der Normalen der Parabel den Winkel δ, so ist $\frac{dv}{dt} = \varphi \sin\delta$, $\frac{v^2}{\varrho} = \varphi\cos\delta$ und erhält man mithin

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho},$$

d. h. bei jeder Parabel schneidet der durch den Curvenpunkt laufende Durchmesser auf einem im Krümmungsmittelpunkte auf der Normalen errichteten Perpendikel von dessen Fusspunkte aus ein Drittel des Krümmungshalbmessers der Evolute der Parabel ab.

2. Ein Punkt besitzt eine Beschleunigung, welche fortwährend nach einem festen Centrum C gerichtet und dem Abstande von diesem proportional ist, welches ist seine Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der zweiten Ordnung?

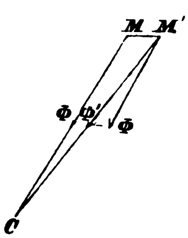

Fig. 218.

Es sei (Fig. 218) C das feste Centrum, $MC = r$, $M'C = r + dr$, $M\Phi = \varphi = \varepsilon r$, $M'\Phi' = \varphi + d\varphi = \varepsilon(r + dr)$. Zieht man durch M' die Linie $M'\Phi$ geometrisch gleich φ, so stellt $\Phi\Phi'$ die Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung $\varphi^{(2)} dt$ dar und ist $\varphi^{(2)} = \frac{\Phi\Phi'}{dt}$. Das Dreieck $M'\Phi\Phi'$ ist aber ähnlich CMM'. Daher ist $\Phi\Phi'$ parallel der Tangente in M. Der bewegliche Punkt besitzt daher nur tangentielle Beschleunigung zweiter Ordnung und zwar liefern dieselben Dreiecke

$$\varphi^{(2)}\, dt : \varepsilon r = ds : r,$$

d. h. $\varphi^{(2)} = \varepsilon v$. **Man hat also, da $\varphi_b^{(2)}$ für alle ebenen Bewegungen Null ist:**

$$\varphi^{(2)} = \varphi_t^{(2)} = \varepsilon v, \; \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{v^3}{\varrho^2} + \varepsilon v$$

$$3\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds} = 0.$$

Der Punkt beschreibt eine Ellipse um C als Mittelpunkt; wenn ϱ_1 den Krümmungshalbmesser der Evolute bedeutet, so wird $\frac{d\varrho}{ds} = \frac{\varrho_1}{\varrho}$. Ferner ist $\varphi_t = \frac{dv}{dt}$, $\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}$ und wenn man wieder mit δ den Winkel bezeichnet, den die Normale mit dem Diameter des Punktes M bildet, so hat man $\operatorname{tg}\delta = \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\varrho}$ und mit Hülfe dieser Relation ergibt die letzte Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \tfrac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho},$$

welche den Krümmungshalbmesser der Evolute der Ellipse liefert, ähnlich wie bei Nr. 1.

Man kann von der vorliegenden Aufgabe zur vorhergehenden zurückgehen, wenn man r ins Unendliche wachsen und ε Null werden lässt, aber so, dass εr constant bleibt. Der Mittelpunkt der Ellipse rückt ins Unendliche, es wird $\varphi^{(2)} = 0$ u. s. f.

Kennt man überhaupt für irgend eine Bewegung $\varphi_n^{(2)}$, so kann man das Verhältniss der Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ für die Evolute der Bahn und die Bahn selbst finden. Es ist nämlich, wenn δ wie oben den Winkel bedeutet, den die Beschleunigung φ mit der Normalen der Bahn bildet,

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt}\left(3 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\operatorname{tg}\delta\right),$$

mithin

$$\tfrac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho} = \left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{\varrho\,\varphi_n^{(2)}}{v\,\frac{dv}{dt}}\right)\operatorname{cotg}\delta.$$

3. **Ein Punkt besitzt eine nach einem festen Centrum F (s. Fig. 124) gerichtete, dem Quadrate des Abstandes von demselben umgekehrt proportionale Beschleunigung erster Ordnung, welches ist seine Beschleunigung zweiter Ordnung?**

Nach Cap. VIII, §. 2, Nr. 2, S. 315 ist die Beschleunigung $\varphi = \frac{c}{b^2} \cdot 2\,a\omega$ und also der Geschwindigkeit $2\,a\omega$ des Punktes H proportional und der Richtung nach um $\frac{1}{2}\pi$ von dieser verschieden. Daher ist die gesuchte Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der zweiten Ordnung des Punktes M proportional der Beschleunigung des Punktes H, gleichfalls um $\frac{1}{2}\pi$ umgedreht. Der Punkt H ist ein Punkt eines Systems, welches um F rotirt und in welchem M eine relative Bewegung längs des Radiusvectors FM besitzt. Der Punkt H besitzt daher eine Tangentialbeschleunigung senkrecht zu MF und eine Normalbeschleunigung längs MF. Um die erstere zu bestimmen, müssen wir die Winkelbeschleunigung des Systems mit $2a$ multipliciren, die Normalbeschleunigung ist $2\omega^2 a$. Um aber die Winkelbeschleunigung des Systems zu finden, dividiren wir die Componente des mit M zusammenfallenden Systempunktes, welche senkrecht zu MF ist, durch r. Nun besteht die gesammte Beschleunigung dieses Systempunktes aus der absoluten Beschleunigung von M und dessen relativer Beschleunigung im entgegengesetzten Sinne genommen nebst der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung. Die beiden ersteren sind längs MF gerichtet und liefern also keinen Beitrag zu der hier gesuchten Grösse, die letztere aber ist $2\omega \,.\, v_r$, senkrecht zu MF und entgegengesetzt gerichtet mit der Geschwindigkeit ωr. Die relative Geschwindigkeit v_r von M ergibt sich mit Hülfe des Dreiecks $MM'Q$, nämlich

$$v_r = \frac{M'Q}{dt} = \frac{MQ}{dt} \cdot \operatorname{tg}(M'MQ) = \frac{MQ}{dt} \operatorname{tg}\beta,$$

wenn β den Winkel bedeutet, den die Normale in M mit dem Radiusvector MF bildet. Da nun $MQ = r\omega dt$ ist, so wird $v_r = \omega r \operatorname{tg}\beta$ und folglich die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung $2\omega^2 r \operatorname{tg}\beta$. Sie liefert daher für die Winkelbeschleunigung des Systems $2\omega^2 \operatorname{tg}\beta$ und hiermit die Tangentialbeschleunigung von H gleich $4\omega^2 a \operatorname{tg}\beta$. Die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ zweiter Ordnung des Punktes M hat demnach die Componenten längs des Radiusvectors FM und senkrecht dazu im entgegengesetzten Sinne von ωr, gleich

$$4\frac{ac}{b^2} \operatorname{tg}\beta \,.\, \omega^2, \quad \frac{2\,ac}{b^2}\omega^2.$$

Indem wir die Projectionssumme dieser Componenten für die Tangente und Normale von M bilden, erhalten wir

$$\varphi_t^{(2)} = 4\frac{ac}{b^2} \operatorname{tg}\beta \sin\beta \,.\, \omega^2 - 2\frac{ac}{b^2}\cos\beta \,.\, \omega^2, \quad \varphi_n^{(2)} = -6\frac{ac}{b^2}\sin\beta \,.\, \omega^2, \quad \varphi_b^{(2)} = 0\,.$$

4. Ein Punkt beschreibt mit constanter Geschwindigkeit v_0 eine Schraubenlinie auf einer beliebigen Cylinderfläche, welches sind die Componenten seiner Beschleunigung zweiter Ordnung?

Da v constant ist, so erhält man

$$\varphi_t^{(2)} = -\frac{v_0^3}{\varrho^2}, \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{v_0^3}{\varrho^2} \cdot \frac{d\varrho}{ds}, \quad \varphi_b = \frac{v_0^3}{\varrho r}.$$

Ist nun ds_0 das Bogenelement und ϱ_0 der Krümmungshalbmesser des zu den Erzeugungslinien senkrechten ebenen Cylinderschnittes und β der Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugungslinie, so wird

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sin^2\beta}, \quad r = \frac{\varrho_0}{\sin\beta\cos\beta}\,^{*)}, \quad d\varrho = \frac{d\varrho_0}{\sin^2\beta}, \quad ds = \frac{ds_0}{\sin\beta}$$

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{d\varrho_0}{ds_0} = \frac{1}{\sin\beta} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_0},$$

wenn ϱ_1 den Krümmungshalbmesser der Evolute jenes Cylinderschnitts bedeutet. Hierdurch gelangt man zu den Formeln

$$\varphi_t^{(2)} = -\frac{v_0^3}{\varrho_0^3} \cdot \sin^4\beta, \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{v_0^3}{\varrho_0^3} \cdot \varrho_1 \sin^3\beta, \quad \varphi_b^{(2)} = \frac{v_0^3}{\varrho_0^3} \cdot \sin^3\beta\cos\beta\,.$$

Die Grösse $v_0 \sin\beta$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Projection des beweglichen Punktes auf dem Cylinderschnitt bewegt. Bezeichnen wir sie mit w_0, so gehen die Formeln über in

$$\varphi_t^{(2)} = -\frac{w_0^3}{\varrho_0^3}\sin\beta, \quad \varphi_n^{(2)} = -\frac{w_0^3}{\varrho_0^3}\varrho_1, \quad \varphi_b = \frac{w_0^3}{\varrho_0^3}\cos\beta$$

---

*) S. meine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung", S. 83.

und sind $-\frac{w_0^3}{\varrho_0^2}$ und $-\frac{w_0^3}{\varrho_0^3}$ die Werthe von $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_n^{(2)}$, welche der Projectionsbewegung in dem Cylinderschnitt entsprechen.

Ist der Cylinder ein Kreiscylinder, so ist $\varrho_1 = 0$, also $\varphi_n^{(2)} = 0$.

§. 3. Für ebene Curven besteht zwischen der Normalcomponenten $\varphi_n^{(2)}$ der Beschleunigung zweiter Ordnung und der Schmiegungsparabel, d. h. der Parabel, welche die Curve vierpunktig berührt, ein inniger Zusammenhang. Wie sich §. 2., No. 1. ergab, bildet bei jeder Parabel der Diameter mit der Normalen seines Endpunktes einen Winkel δ, dessen Tangente gleich dem dritten Theile des Verhältnisses vom Krümmungshalbmesser der Parabelevolute zum Krümmungshalbmesser der Parabel ist. Die Schmiegungsparabel hat nun mit der Curve zwei aufeinanderfolgende Krümmungskreise, mithin auch zwei aufeinanderfolgende Krümmungsmittelpunkte und hat also ihre Evolute zwei Punkte oder ein Bogenelement mit der Evolute jener gemein. Da eine Curve und ihre Evolute gleichen Contingenzwinkel besitzen, so haben die Evolute der Schmiegungsparabel und der Curve auch gleichen Krümmungshalbmesser ϱ_1. Daher bildet der Diameter der Schmiegungsparabel mit der Normalen der Curve, welcher sie sich anschmiegt, einen Winkel δ, für welchen $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho}$ ist. Es gibt, nebenbei bemerkt, eine ganze Schaar Kegelschnitte, welche von derselben Parabel in demselben Punkte vierpunktig berührt werden, weil ein Kegelschnitt erst durch fünf Punkte bestimmt ist. Nach §. 2., No. 2. besteht die Gleichung für δ auch für Ellipsen und Hyperbeln, wenn δ von dem Durchmesser mit der Normalen gebildet wird. Daher ist für alle Kegelschnitte der Schaar, welche von einer Parabel vierpunktig berührt werden, der Diameter des Berührungspunktes gemeinschaftlich und liegen also die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte in gerader Linie, nämlich auf ihm. Nun haben wir, wenn β den Winkel bedeutet, den die Beschleunigung der ebenen Bewegung irgend eines Punktes mit der Normalen seiner Bahn bildet,

$$\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho}, \quad \varphi_t = \frac{dv}{dt} = \varphi_n \operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho}$$

und wenn man diese Werthe in die Formel $\varphi_n^{(2)} = 3\frac{v}{\varrho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\varrho^2}\frac{\varrho_1}{\varrho}$ einführt, ergibt sich

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{3\,\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\delta) = \frac{3\,\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varrho}} \cdot \frac{\sin(\beta-\delta)}{\cos\beta \cdot \cos\delta}.$$

Die Richtung der Beschleunigung φ bestimmt nun in dem Krümmungskreise und in der Schmiegungsparabel zwei Sehnen, c, c' (Fig. 219) durch welche sich die rechte Seite dieser Gleichung umgestalten lässt. Für c

fanden wir bereits Cap. VIII, §. 7 die Gleichung $v^2 = \frac{1}{2} c\varphi$; für c' wollen wir jetzt die betreffende Relation suchen. Da die Diameter der Schmiegungsparabel mit der Normalen den Winkel δ bilden, so ist die Gleichung derselben in Bezug auf den Diameter und die Tangente des Punktes M als Coordinatenaxen $y^2 = 2\varrho \cos\delta \,.\, x$ (s. Salmon, anal. Geometrie der Kegelschnitte, deutsch v. Fiedler, p. 280) und liefert die Figur weiter die Relationen

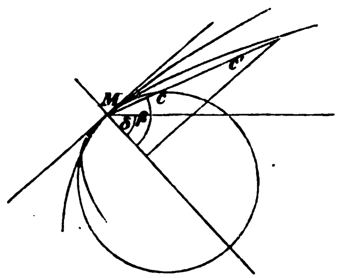

Fig. 219.

$$\frac{c'}{y} = \frac{\cos\delta}{\sin(\beta - \delta)}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \delta)},$$

also, wenn man hieraus x entnimmt und in die Parabelgleichung einführt

$$y = 2\varrho \frac{\cos\delta \cos\beta}{\sin(\beta - \delta)},$$

wodurch

$$c' = 2\varrho \frac{\cos^2\delta \cos\beta}{\sin^2(\beta - \delta)}$$

wird.

Hiermit ergibt sich nun für $\varphi_n^{(2)}$:

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{3\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} c' \cos\beta}} = 3\varphi_n \sqrt{\frac{\varphi}{\frac{1}{2} c'}},$$

oder mit Hülfe von $v^2 = \frac{1}{2} c\varphi$, $\varrho\varphi_n = v^2$:

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{6 v^3}{\varrho \sqrt{c c'}},$$

d. h. die Normalcomponente der Beschleunigung zweiter Ordnung der ebenen Bewegung eines Punktes ist der sechsfache Cubus der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser und das geometrische Mittel aus den Sehnen, welche die Richtung der Beschleunigung im Krümmungskreise und der Schmiegungsparabel bestimmt.

Den in der vorstehenden Untersuchung vorkommenden Diameter der Schmiegungsparabel nennt Abel Transon (*Liouville, Journal de mathémat. T. VI.*) die Deviationsaxe. Da nämlich die Normale die mit der Tangente parallelen Sehnen des Krümmungskreises, jener Diameter aber die der Tangente gleichfalls parallelen Sehnen der Schmiegungsparabel halbirt, so gibt die Tangente des Winkels δ ein Mass für die Abweichung des Curvenpunktes von der Schmiegungsparabel an, wenn diese Abweichung auf einer der Tangente parallelen und ihr unendlich nahen Geraden geschätzt wird.

Ueber die Schmiegungsparabel vgl. meine Abhandlung „Ueber die Berührung ebener Curven mit der Parabel" (Schlömilch's Zeitschr. f. Mathem. und Physik B. II, p. 58).

§. 4. Für eine geradlinige Bewegung reducirt sich $\varphi^{(2)}$ auf $\varphi_t^{(2)} = \frac{d^3 v}{dt^2}$. Projicirt man daher eine Bewegung auf eine Axe, etwa die x-Axe eines Coordinatensystems, so wird $\frac{d^3 x}{dt^3}$ die Beschleunigung zweiter Ordnung $\varphi_x^{(2)}$ der Projectionsbewegung darstellen. Zugleich ersieht man, dass sie die Projection der Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ der Hauptbewegung auf diese Axe ist. Denn das Dreieck $\Phi M' \Phi'$ (Fig. 217) liefert in der Projection für $\Phi\Phi'$ das Differential $d\varphi_x$. Bildet also $\Phi\Phi'$ mit der Projectionsaxe den Winkel α, so hat man

$$d\varphi_x = \Phi\Phi' \,.\, \cos\alpha\,, \quad \frac{d\varphi_x}{dt} = \varphi_x^{(2)} = \frac{\Phi\Phi'}{dt} \,.\, \cos\alpha = \varphi^{(2)} \,.\, \cos\alpha\,.$$

Projicirt man daher die Bewegung auf drei rechtwinklige oder schiefe Coordinatenaxen, so erhält man

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \varphi_x^{(2)}, \quad \frac{d^3 y}{dt^3} = \varphi_y^{(2)}, \quad \frac{d^3 z}{dt^3} = \varphi_z^{(2)}$$

als Gleichungen der Bewegung, wenn $\varphi_x^{(2)}$, $\varphi_y^{(2)}$, $\varphi_z^{(2)}$ als Functionen von t, x, y, z, v_x, v_y, v_z, φ_x, φ_y, φ_z gegeben sind. Ihre Integration führt neun Constanten ein, welche durch die Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangsbeschleunigung bestimmt werden.

§. 5. Ein Punkt beschreibe eine Curve und befinde sich zur Zeit t in M, zur Zeit $t + \tau$ in M'. Von irgend einem festen Punkte O ziehen wir $OM = r$, $OM' = r'$. Dann stellt die Sehne $MM' = \sigma$ die geometrische Differenz von r dar und kann dieselbe durch die Geschwindigkeit v und die Beschleunigungen $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... der verschiedenen Ordnungen dargestellt werden. Ist nämlich x die Projection von r auf irgend eine Axe, Δx die Projection der Sehne σ auf dieselbe, so hat man nach dem Taylor'schen Satze, da r und x Functionen von t sind

$$\Delta x = \frac{dx}{dt} \cdot \tau + \frac{1}{2!} \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \tau^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 x}{dt^3} \cdot \tau^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \tau^n + R$$

wo R das Restglied der Reihe bedeutet. Da $\Delta x = \sigma \cos(\sigma x)$ und offenbar für alle Ordnungen der Beschleunigung

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \varphi^{(n-1)} \cos(\varphi^{(n-1)} x)$$

ist, so erhält man

$$\sigma \cos(\sigma x) = v \cos(v x) \,.\, \tau + \frac{1}{2!} \varphi^{(1)} \cos(\varphi^{(1)} x) \,.\, \tau^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} \varphi^{(n-1)} \cos(\varphi^{(n-1)} x) \,.\, \tau^n + R \,.$$

Aus dieser Gleichung, welche für alle Richtungen der Projectionsaxe gelten muss, erhellt, dass sich ein Polygon $MAA_1A_2 \ldots A_{n-2}A_{n-1}$ construiren lässt, dessen Seiten

$$MA = v\tau,\ AA_1 = \frac{1}{2!}\varphi^{(1)}\tau^2,\ A_1A_2 = \frac{1}{3!}\varphi^{(2)}\tau^3, \ldots A_{n-2}A_{n-1} = \frac{1}{n!}\varphi^{(n-1)}\tau^n$$

die Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen der verschiedenen Ordnungen haben, so dass die Sehne σ die geometrische Summe der Seiten derselben wird, nämlich

$$[\sigma] = [v\tau] + \left[\frac{1}{2!}\varphi^{(1)}\tau^2\right] + \left[\frac{1}{3!}\varphi^{(2)}\tau^3\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n!}\varphi^{(n-1)}\tau^n\right] + [\Phi],$$

wo $\Phi = \dfrac{R}{\cos(\Phi x)}$ ist.

Genügt nun die Function x von t den Bedingungen der Entwickelbarkeit in eine Reihe, so wird $\lim R = 0$ und in Folge dessen auch $\lim \Phi = 0$ und ergibt sich aus der unendlichen Reihe

$$[\sigma] = [v\tau] + \left[\frac{1}{2!}\varphi^{(1)}\tau^2\right] + \left[\frac{1}{3!}\varphi^{(2)}\tau^3\right] + \cdots ,$$

dass die Bewegung des Punktes M während der Zeit von t bis $t + \tau$ als die Resultante von unendlich vielen geradlinigen Bewegungen von den Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigungen aller Ordnungen angesehen werden darf, deren Wege durch die Glieder $v\tau$, $\frac{1}{2}\varphi^{(1)}\tau^2$, $\frac{1}{6}\varphi^{(2)}\tau^3, \ldots$ angegeben werden. Die erste Bewegung längs der Tangente der Bahn ist eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit v des Punktes M zur Zeit t, die zweite eine gleichförmig veränderliche Bewegung von der Beschleunigung erster Ordnung $\varphi^{(1)}$, u. s. f., die n^{te} Bewegung hängt von der Beschleunigung $\varphi^{(n-1)}$ ab und ihr Weg ist proportional τ^n.

Vgl. Möbius, über die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems (Crelle, Journ. B. 36, p. 91); Somoff, theoret. Mechanik I, p. 64.

§. 6. Setzen wir τ unendlichklein und schreiben die Formel des vorigen Paragraphen für die Bewegung des Punktes M

$$[r'] = [r] + [v\tau] + [\tfrac{1}{2}\varphi^{(1)}\tau^2] + [\tfrac{1}{6}\varphi^{(2)}\tau^3] + \cdots$$

sowie für die Bewegung eines andern Punktes, welcher zur Zeit t mit M zusammentrifft, wofür aber $v, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ andere Functionen, etwa $v_1, \varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \ldots$ sind, so hat man ebenso

$$[r_1'] = [r] + [v_1\tau] + [\tfrac{1}{2}\varphi_1^{(1)}\tau^2] + [\tfrac{1}{6}\varphi_1^{(2)}\tau^3] + \cdots$$

und folglich, wenn man beide Gleichungen von einander abzieht,

$$[r'] - [r_1'] = [(v - v_1)\tau] + \tfrac{1}{2}[(\varphi^{(1)} - \varphi_1^{(1)})\tau^2] + \tfrac{1}{6}[(\varphi^{(2)} - \varphi_1^{(2)})\tau^3] + \cdots$$

Aus dieser Gleichung kann man für die Uebereinstimmung zweier Bewegungen ähnliche Schlüsse ziehen, wie aus der analog gebildeten Gleichung der analytischen Geometrie für die mehr oder weniger innige Berührung zweier Curven. Ist blos $[v] = [v_1]$ zur Zeit t, so stimmen beide Bewegungen blos in der Geschwindigkeit überein und kann man sagen, dass ihre Uebereinstimmung eine solche 1. Ordnung sei. Ist ausserdem auch $[\varphi^{(1)}] = [\varphi_1^{(1)}]$, d. h. sind auch die Beschleunigungen beider zur Zeit t dieselben, so findet eine Uebereinstimmung 2. Ordnung statt u. s. w. Ist die zweite Bewegung von einer Anzahl unbestimmter Constanten abhängig, so können diese so bestimmt werden, dass diese Bewegung mit einer gegebenen Bewegung in eine Uebereinstimmung trete, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist, als die Anzahl der Constanten. Für die Untersuchung einer Bewegung kann es von Interesse sein, ihr eine andere zu substituiren, welche mit ihr bis zu einer gegebenen Ordnung übereinstimmt. Eine Bewegung, welche mit einer gegebenen Bewegung zur Zeit t blos in der Geschwindigkeit übereinstimmt, wird sich zu ihr ähnlich verhalten, wie die Tangente einer Curve zur Curve selbst. Eine Bewegung, welche mit einer andern die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zur Zeit t gemein hat, wird dieser gegenüber dieselbe Rolle spielen, wie der Krümmungskreis der Curve gegenüber.

Diese Andeutungen lassen sich auch für die Beziehungen der Bewegungen zweier Systeme verwerthen. Die hier ausgesprochenen Ideen der Uebereinstimmung der Bewegungen zweier Punkte, rühren von Lagrange her und sind zuerst von A. Comte entwickelt worden (Cours de philosophie positive, Paris 1864, Vol. I., p. 472). Vgl. auch Padeletti, Sulle relazioni tra cinematica e meccanica (Battaglini, Giornale di Matematica, Vol. XIV (1876), p. 203).

§. 7. In Bezug auf die Beschleunigungen der Systempunkte eines unveränderlichen, in Bewegung begriffenen Systems, beginnen wir mit der Untersuchung der ebenen Bewegung. Nach Cap. XIII, §. 5 hat die Beschleunigung φ erster Ordnung für die ebene Bewegung eines Systempunktes M zur Zeit t zwei Componenten, eine centripetale, nach dem Beschleunigungsmittelpunkt G (Fig. 220) gerichtete $\omega^2 p$ und eine zu dieser senkrechte $\omega' p$, bei positiven ω' dem Sinne von ω folgende, wo p den Abstand MG bezeichnet. Zur Zeit $t + dt$ sei M' die Lage des Systempunktes und G' der dieser Zeit entsprechende Mittelpunkt der Beschleunigungen; dann werden $(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)(p + dp)$ und $(\omega' + d\omega')(p + dp)$ die betreffenden Componenten der Beschleunigung sein, erstere längs $M'G'$ gerichtet, letztere senkrecht zu $M'G'$. Die geometrischen Differentialien

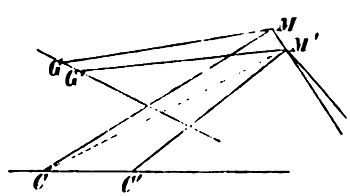

Fig. 220.

$[(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)(p + dp)] - [\omega^2 p]$ und $[(\omega' + d\omega')(p + dp)] - [\omega' p]$ stellen die Componenten der Elementarbeschleunigung $\varphi^{(2)} dt$ zweiter Ordnung und durch dt dividirt, die Componenten der Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ selbst dar. Um die erste derselben zu reduciren, zerlegen wir $(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)(p + dp)$ nach den Richtungen $M'M$, MG, GG'. Diese Zerlegung erfolgt mit Hülfe einer dem Viereck $M'MGG'$ ähnlichen Figur und liefert

$$\begin{aligned}&[(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)(p + dp)]\\ &= [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,M'M] + [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,MG] + [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,GG'].\end{aligned}$$

Setzt man die Wechselgeschwindigkeit des Beschleunigungsmittelpunktes G gleich u_1, nämlich $GG' : dt = u_1$ und bedenkt, dass $MM' = CM\,.\,\omega dt = r\omega dt$ ist, wo C das Momentancentrum bedeutet, so ergibt sich für das geometrische Differential der Centripetalbeschleunigung

$$-[\omega^3 r dt] + [pd\,.\,\omega^2] + [\omega^2 u_1 dt]$$

und hat also die Beschleunigung zweiter Ordnung die drei von der Aenderung der Centripetalbeschleunigung herrührenden Componenten

$(\omega^2)' p$ in der Richtung von p und von dem Sinne MG,

$\omega^2 u_1$ nach Richtung und Sinn mit der Wechselgeschwindigkeit des Beschleunigungsmittelpunktes G übereinstimmend und

$\omega^3 r$ in der Richtung der Geschwindigkeit des Punktes M, aber von entgegengesetztem Sinne mit ihr.

In gleicher Weise behandeln wir das geometrische Differential der zu p senkrechten Beschleunigungscomponente $\omega' p$. Wir zerlegen

$$(\omega' + d\omega')(p + dp)$$

nach dreien zu $M'M$, MG, GG' senkrechten Richtungen mit Hülfe eines dem Viereck $M'MGG'$ ähnlichen Vierecks. Es ist dann

$$\begin{aligned}&[(\omega' + d\omega')(p + dp)]\\ &= [(\omega' + d\omega')\,.\,M'M] + [(\omega' + d\omega')\,.\,MG] + [(\omega' + d\omega')\,GG']\end{aligned}$$

und ergibt sich mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen für das gesuchte geometrische Differential

$$[\omega\omega' r dt] + [d\omega'\,.\,p] + [\omega' u_1 dt]$$

und folgen als Componenten von $\varphi^{(2)}$, entspringend aus $\omega' p$:

$\omega'' p$ senkrecht zu MG, bei positivem ω'' harmonirend mit ω

$\omega' u_1$ normal zur Curve (G) der Beschleunigungsmittelpunkte und

$\omega\omega' r$ längs MC, C zugewandt.

Die Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ zweiter Ordnung jenes Systempunktes hat daher die 6 Componenten: 1) Die centripetale $(\omega^2)' p$, nach dem Mittelpunkte der Beschleunigungen erster Ordnung gerichtet und ihm zugewandt, 2) die zu ihr senkrechte $\omega'' p$, bei positivem ω''

mit der Winkelgeschwindigkeit ω harmonirend, 3) die Componente $\omega^2 u_1$ nach Richtung und Sinn übereinstimmend mit der Wechselgeschwindigkeit u_1 des Beschleunigungsmittelpunktes G, 4) die zu ihr senkrechte $\omega' u_1$ von der Richtung der Normalen der Curve der Mittelpunkte G, 5) die Componente $\omega^3 r$ von der Richtung der Geschwindigkeit, aber von entgegengesetztem Sinn und 6) die zu ihr senkrechte Componente $\omega\omega' r$, nach dem Mittelpunkte C der Geschwindigkeiten hin gerichtet.

Die Componenten 3) und 4) sind allen Systempunkten gemeinschaftlich und liefern eine Resultante $u_1 \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$, welche gegen die Tangente der Curve (G) unter dem Winkel λ geneigt ist, wofür $\operatorname{tg} \lambda = \omega' : \omega^2$; die Componenten 1) und 2) geben eine Resultante $p \sqrt{4\,\omega^2 \omega'^2 + \omega''^2}$, proportional p und unter constantem Winkel $\lambda^{(2)}$ gegen den Stral p geneigt, wofür $\operatorname{tg} \lambda^{(2)} = \omega'' : (\omega^2)'$ ist; die beiden Componenten 5) und 6) endlich lassen sich zu einer Resultante $r\omega \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ zusammensetzen, proportional der Geschwindigkeit und gegen r unter dem Winkel λ geneigt, aber auf entgegengesetzter Seite mit der Beschleunigungscomponente $r \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ (Cap. XIII, §. 3) in Bezug auf r.

§. 8. Beziehen wir den Systempunkt M auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, dessen x-Axe die Richtung von u_1, dessen y-Axe senkrecht dazu ist, beide positiv genommen im Sinne von u_1 und $u_1 \dfrac{d\omega}{dt}$ und bezeichnen wir die Coordinaten des Momentancentrums C in Bezug auf dieses System mit x_1, y_1, so sind die Richtungscosinusse der sechs Componenten von $\varphi^{(2)}$ gegen die Axen der Reihe nach $-x:p$, $-y:p$ für die centripetale, $y:p$, $-x:p$ für die zu ihr senkrechte; $1, 0$ für $\omega^2 u_1$ und $0, 1$ für $\omega' u_1$ sowie $-(y-y_1):r$, $(x-x_1):r$ für $\omega^3 r$ und $-(x-x_1):r$, $-(y-y_1):r$ für $\omega\omega' r$ und daher die Componenten X, Y von $\varphi^{(2)}$ parallel diesen Axen:

$$X = -3\omega\omega' x + (\omega'' - \omega^3) y + \omega\omega' x_1 + \omega^3 y_1 + \omega^2 u_1$$
$$Y = -(\omega'' - \omega^3) x - 3\omega\omega' y - \omega^3 x_1 + \omega\omega' y_1 + \omega' u_1 .$$

Die Systempunkte, deren Beschleunigungscomponenten zweiter Ordnung parallel der Tangente und Normale der Curve (G) der Beschleunigungsmittelpunkte verschwinden, liegen auf den beiden Geraden

$$0 = -3\omega\omega' x + (\omega'' - \omega^3) y + \omega\omega' x_1 + \omega^3 y_1 + \omega^2 u_1$$
$$0 = -(\omega'' - \omega^3) x - 3\omega\omega' y - \omega^3 x_1 + \omega\omega' y_1 + \omega' u_1 ,$$

welche aufeinander senkrecht stehen. Es ergibt sich hieraus die Existenz eines Beschleunigungscentrums G_2 der zweiten Ordnung, dessen Coordinaten x_2, y_2 diesen Gleichungen zugleich genügen. Setzt man dieselben in diese Gleichungen ein und addirt sie zu den Ausdrücken für X, Y, so ergeben sich diese Grössen unter der einfacheren Form

$$X = -3\omega\omega'' \xi + (\omega'' - \omega^3)\eta$$
$$Y = -3\omega\omega'' \eta - (\omega'' - \omega^3)\xi ,$$

wo $\xi = x - x_2$, $\eta = y - y_2$ die Coordinaten von M in Bezug auf ein dem System

(xy) paralleles Coordinatensystem $(\xi\eta)$ in G_2 sind. Wenn man die Entfernung des Systempunktes M von G_2 mit p_2 bezeichnet, so werden die Neigungscosinusse der Linie MG_2 und der auf ihr senkrechten Geraden, letztere dem Sinne nach mit ω harmonirend genommen: $-\xi : p_2$, $-\eta : p_2$; $\eta : p_2$, $-\xi : p_2$ und sind daher $-3\omega\omega'\xi$ und $-3\omega\omega'\eta$ die Componenten einer von M nach G_2 gerichteten Beschleunigungscomponente zweiter Ordnung $3\omega\omega' p_2 = 3p_2 \frac{d.\frac{1}{2}\omega^2}{dt}$, sowie $(\omega''-\omega^3)\eta$ und $-(\omega''-\omega^3)\xi$ die einer anderen, zu MG_2 senkrechten Componenten $p_2(\omega''-\omega^3)$. Daher der Satz:

Die Beschleunigung zweiter Ordnung eines Systempunktes im unveränderlichen, in der Ebene sich bewegenden ebenen System zerfällt in jedem Momente in zwei Componenten, von denen die eine nach dem Beschleunigungscentrum G_2 der zweiten Ordnung hin gerichtet, die andere aber zu ihr senkrecht ist und bei positivem ω'' dem Sinne nach mit der Winkelgeschwindigkeit des Systems harmonirt. Beide sind dem Abstande des Punktes von G_2 proportional und werden erhalten, die eine, indem man diesen Abstand mit der dreifachen Derivirten des halben Quadrates der Winkelgeschwindigkeit, die andere, indem man ihn mit dem Ueberschusse der zweiten Derivirten der Winkelgeschwindigkeit über den Cubus derselben multiplicirt. Die Beschleunigung der zweiten Ordnung selbst ist jenem Abstande gleichfalls proportional, also auf concentrischen Kreisen um das Beschleunigungscentrum der zweiten Ordnung constant und unter constantem Winkel gegen die Radien dieser Kreise geneigt, dessen Tangente $(\omega''-\omega^3):3\omega'\omega''$ ist.

Ist die Wiekelgeschwindigkeit des Systems constant, so reducirt sich die Gesammtbeschleunigung zweiter Ordnung auf $-p_2\omega^3$, senkrecht zum Abstande MG_2 und dem Sinne von ω entgegengesetzt.

§. 9. Um die Normal- und Tangentialcomponente $\varphi_n^{(2)}$, $\varphi_t^{(2)}$ der Beschleunigung $\varphi^{(2)}$ zweiter Ordnung eines Systempunktes $M(\xi, \eta)$ zu bilden, seien in Bezug auf das Coordinatensystem des Beschleunigungsmittelpunktes G_2 des vorigen Paragraphen die Coordinaten des Mittelpunktes C der Geschwindigkeiten ξ_0, η_0. Dann sind $(\xi-\xi_0):r$, $(\eta-\eta_0)r$ die Richtungscosinusse der Normalen CM und $(\eta-\eta_0):r$, $-(\xi-\xi_0):r$ die der Tangente der Bahn des Systempunktes und erhält man

$$\begin{aligned} r\varphi_n^{(2)} &= X(\xi-\xi_0) + Y(\eta-\eta_0) = -3\omega\omega'(\xi^2+\eta^2) \\ &\quad + [3\omega\omega'\xi_0 + (\omega''-\omega^3)\eta_0]\xi + [-(\omega''-\omega^3)\xi_0 + 3\omega\omega'\eta_0]\eta, \\ r\varphi_t^{(2)} &= X(\eta-\eta_0) - Y(\xi-\xi_0) = (\omega''-\omega^3)(\xi^2+\eta^2) \\ &\quad - [(\omega''-\omega^3)\xi_0 - 3\omega\omega'\eta_0]\xi - [(\omega''-\omega')\eta_0 + 3\omega\omega'\xi_0]\eta. \end{aligned}$$

Die Systempunkte, deren Normalbeschleunigung 2. Ordnung verschwindet, liegen daher auf dem Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 - \left[\xi_0 + \frac{\omega'' - \omega^3}{3\omega\omega'}\eta_0\right]\xi + \left[\frac{\omega'' - \omega'}{3\omega\omega'}\xi_0 - \eta_0\right]\eta = 0,$$

Die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung 2. Ordnung Null ist, auf dem weiteren Kreise:

$$\xi^2 + \eta^2 - \left[\xi_0 - \frac{3\omega\omega'}{\omega'' - \omega^3}\eta_0\right]\xi - \left[\eta_0 + \frac{3\omega\omega'}{\omega'' - \omega^3}\xi_0\right]\eta = 0.$$

Beide Kreise enthalten den Mittelpunkt C der Geschwindigkeiten. Sie enthalten auch den Mittelpunkt der Beschleunigung zweiter Ordnung, den Ursprung des Coordinatensystems.

§. 10. Man kann ganz in derselben Weise, wie früher für die Beschleunigung 1. Ordnung geschah, die vorstehenden Untersuchungen vollständig analytisch einkleiden und die Existenz des Beschleunigungsmittelpunktes G_2 so darthun, dass man die Ausdrücke für $\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^3y}{dt^3}$ gleich Null setzt, wodurch man zur Bestimmung dieses Punktes zwei lineare Gleichungen erhält.

Die vorstehenden Lehren können in ähnlicher Weise zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Evoluten ebener Curven dienen, wie die Lehren des Cap. XIII. zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Bahnen der Systempunkte führten.

§. 11. Wir bestimmen jetzt die Beschleunigung zweiter Ordnung $\varphi^{(2)}$ eines Systempunktes für die sphärische Bewegung. Die Beschleunigung φ der ersten Ordnung des Systempunktes M zur Zeit t hat zwei Componenten, die centripetale $\omega^2 r$ in der Richtung von $MP = r$ (Fig. 221) senkrecht zur Momentanaxe c und die von der Winkelbeschleunigung α herrührende $\alpha r'$, senkrecht zur Ebene, welche den Punkt M mit der Axe h der Winkelbeschleunigung verbindet (Cap. XIV, §. 2), so dass also

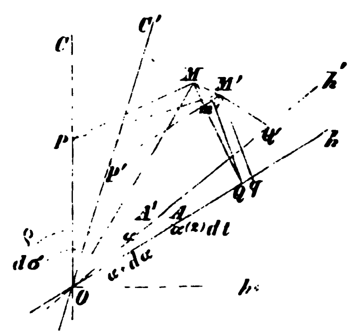

Fig. 221.

$$[\varphi] = [\omega^2 r] + [\alpha r']$$

ist, wo r' den Abstand MQ von der Axe h bedeutet. Ebenso ist zur Zeit $t + dt$, zu welcher der bewegliche Punkt sich in M' befindet, seine Beschleunigung

$$[\varphi'] = [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)(r + dr)] + [(\alpha + d\alpha)(r' + dr')],$$

wo $r + dr = M'P'$ und $r' + dr' = M'Q'$ die Abstände des Punktes M' von den folgenden Axen $c'h'$ der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung bezeichnen. Das geometrische Differential von φ oder die

Elementarbeschleunigung zweiter Ordnung $\varphi'^{(2)}dt$ des Punktes M ist hiernach die geometrische Summe der beiden geometrischen Differentialien

$$[(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,(r + dr)] - [\omega^2 r],\quad [(\alpha + d\alpha)\,(r' + dr')] - [\alpha r],$$

welche wir einzeln bestimmen wollen.

Um das aus der Centripetalbeschleunigung herrührende Differential zu reduciren, zerlegen wir $(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,(r + dr)$ nach den Seiten des Vierecks $M'MPP'$ und erhalten

$$[(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,(r + dr)]$$
$$= [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,M'M] + [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,MP] + [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,PP'].$$

Daher ist der fragliche Differential die geometrische Summe

$$[(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,M'M] + [(d\,.\,\omega^2)\,.\,MP] + [(\omega^2 + d\,.\,\omega^2)\,.\,PP']$$

oder, wenn man bedenkt, dass $MM' = \omega r dt$ ist und abkürzt, die Summe

$$-[\omega^3 r dt] + [(d\,.\,\omega^2) r] + [\omega^2\,.\,PP'],$$

deren Glieder die Richtungen $M'M$, MP und PP' haben. Hierin ist blos PP' noch weiter zu transformiren. Es ist abér, wenn, wie früher $d\sigma$ den Winkel (cc') der Momentanaxen c und c' bedeutet

$$[PP'] = [OP\,.\,d\sigma] + [d\,.\,OP].$$

Ferner ist, wenn $OM = s$ und $\sphericalangle MOP = \varrho$ gesetzt wird, $OP = s \cos\varrho$ und $d\,.\,OP = s\,.\,d\cos\varrho$. Eine Kugel vom Radius gleich der Einheit, um O beschrieben, liefert durch die Durchschnitte mit den Axen c, c' und dem Strale s ein unendlichschmales sphärisches Dreieck $pp'm$, in welchem

$$pp' = d\sigma,\quad pm = \varrho,\quad p'm = \varrho + d\varrho$$

ist und der Seite $\varrho + d\varrho$ ein Winkel gegenüberliegt, gleich der Neigung ϑ der Ebene $(c_1 M)$ gegen die Ebene (ch), weniger der Elementaramplitude ωdt. Daher ist

$$\cos(\varrho + d\varrho) = \cos\varrho\,.\,\cos d\sigma + \sin\varrho \cos d\sigma\,.\,\cos(\vartheta - \omega dt)$$

oder reducirt, $d.\cos\varrho = \sin\varrho\cos\vartheta.d\sigma$. Hiemit ist $d.OP = s.\sin\varrho\cos\vartheta.d\sigma$, also

$$[PP'] = [s\cos\varrho\,.\,d\sigma] + [s\,.\,\sin\varrho\cos\vartheta\,.\,d\sigma]$$

und folglich

$$[\omega^2\,.\,PP'] = [\omega^2 s\cos\varrho d\sigma] + [\omega^2 s\,.\,\sin\varrho\cos\vartheta\,.\,d\sigma],$$

resp. in der Richtung von OP und senkrecht dazu.

Setzt man diese Grösse in den Ausdruck des fraglichen Differentials ein, dividirt mit dt und benutzt die Formel $\dfrac{d\sigma}{dt} = \psi$ für die Wechselgeschwindigkeit der Momentanaxe, so ergibt sich für den Bestandtheil der Beschleunigung zweiter Ordnung, welcher von der Aenderung der Centripetalbeschleunigung herrührt, die geometrische Summe

$$-[\omega^3 r] + [(\omega^2)' r] + [\omega^2 \psi s\cos\varrho] + [\omega^2 \psi s\sin\varrho\cos\vartheta],$$

deren Glieder nach Richtung und Sinn übereinstimmen mit $M'M$, MP, der Axe der Normalwinkelbeschleunigung ψ und der Momentanaxe.

Um das zweite der obigen Differentialien zu reduciren, müssen wir eine Bemerkung über die Winkelbeschleunigung $\alpha^{(2)}$ zweiter Ordnung vorausschicken. Es seien α und $\alpha + d\alpha$ auf ihren Axen h, h' aufgetragen und werde $\alpha + d\alpha$ in zwei Componenten, nämlich α um die Axe h und eine unendlichkleine Componente $d\varpi^{(2)}$ zerlegt. Diese unendlichkleine Componente, welche das geometrische Differential von α ist, nennen wir die Elementarwinkelbeschleunigung zweiter Ordnung und sie selbst, durch das Zeitelement dt dividirt, die Winkelbeschleunigung $\alpha^{(2)}$ zweiter Ordnung. Sie hat eine bestimmte Axe $h^{(2)}$. Demnach ist $\alpha + d\alpha$ um h' aequivalent α und h und und $\alpha^{(2)}dt$ um $h^{(2)}$. Der Winkelbeschleunigung α um h verdankt der Systempunkt M zur Zeit t die Beschleunigung $\alpha \,.\, MQ$, senkrecht zur Ebene (h, M); der Winkelbeschleunigung $\alpha + d\alpha$ um h' zur Zeit $t + dt$ die Beschleunigung $(\alpha + d\alpha) \,.\, M'Q'$ senkrecht zur Ebene (h', M). Letztere ist aber nach dem eben Entwickelten aequivalent der Beschleunigung $\alpha \,.\, M'q$ senkrecht zur Ebene (h, M') in Verbindung mit $\alpha^{(2)}dt \,.\, M'q''$ senkrecht zur Ebene $(h^{(2)}, M')$, wenn $M'q$ und $M'q''$ die Abstände des Punktes M' von h und $h^{(2)}$ bedeuten, d. h. es ist

$$[(\alpha + d\alpha)M'Q'] = [\alpha \,.\, M'q] + [\alpha^{(2)}dt \,.\, M'q''].$$

Hierin ist $\alpha \,.\, M'q$ weiter zu reduciren; denn es ist $M'q$ von MQ verschieden. Errichtet man auf h eine Ebene senkrecht, z. B. in Q und projicirt $M'q$ auf sie, wodurch man $m'Q$ erhält, so liefert das geschlossene Polygon $M'qQMm'M'$, in welchem die Seiten $m'M'$ und qQ geometrisch entgegengesetzt gleich sind, wenn wir $\alpha \,.\, M'q$ nach seinen Seiten zerlegen:

$$[\alpha \,.\, M'q] = [\alpha \,.\, MQ] + [\alpha \,.\, Mm'].$$

Es ist aber Mm' die Projection von $MM' = r\omega dt$ auf die Ebene senkrecht zur Axe der Winkelbeschleunigung. Bezeichnet u_α die Projection der Geschwindigkeit $r\omega$ auf diese Ebene, so ist $Mm' = u_\alpha \,.\, dt$ und folgt

$$[(\alpha + d\alpha)M'Q'] = [\alpha \,.\, MQ] + [\alpha u_\alpha dt] + [\alpha^{(2)}dt \,.\, M'q'']$$

und hieraus ersieht man, da $M'q''$ nur um Unendlichkleines von Mq'' ververschieden ist, dass

$$[\alpha u_\alpha] + [\alpha^{(2)} q_2]$$

den Bestandtheil von $\varphi^{(2)}$ bildet, welches von der Aenderung der Winkelbeschleunigung herrührt. Indem wir alle Beschleunigungsbestandtheile zweiter Ordnung sammeln, erhalten wir den folgenden Satz:

Während der sphärischen Bewegung eines unveränderlichen Systems um einen Punkt besitzt jeder Systempunkt eine Beschleunigung zweiter Ordnung, welche in folgende sechs Componenten zerfällt: 1. eine Componente $(\omega^2)'r$ centripetal gerichtet gegen die Momentanaxe; 2. eine weitere $\omega^2\psi s \cos\varrho$, parallel zur Axe der Normalwinkelbeschleunigung und im Sinne dieser gerichtet, gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit ω, dem Abstande $s\cos\varrho$ des Radius r vom Rotationscentrum des Systems und der Normalwinkelbeschleunigung $\omega\psi$; 3. eine fernere $\omega^2\psi s \sin\varrho \cos\vartheta$, parallel der Momentanaxe im Sinne der Linie, welche auf ihr ω darstellt, gleich der Winkelgeschwindigkeit ω multiplicirt mit der Normalwinkelbeschleunigung $\omega\psi$ und der Projection $s \,.\, \sin\varrho \cos\vartheta$ des Radius r auf die Ebene (ch); 4. eine Componente $\omega^3 r$, der Geschwindigkeit des Systempunktes entgegengesetzt; 5. die Componente αu_α gleich dem Producte aus der Winkelbeschleunigung und der Projection u_α der Geschwindigkeit ωr auf eine zur Axe h der Winkelbeschleunigung senkrechte Ebene, sowie endlich 6. die Componente $\alpha^{(2)} q_2$ gleich dem Produkte der Winkelbeschleunigung zweiter Ordnung und dem Abstande des Systempunktes von deren Axe, senkrecht gerichtet gegen die Ebene, welche durch den Systempunkt und diese Axe geht.

Die letztere Componente kann man wieder in zwei andere zerfällen, indem man $\alpha^{(2)}$ in zwei Componenten auflöst, eine tangentiale $\frac{d\alpha}{dt}$ um die Axe A und eine normale $\alpha \cdot \frac{d\mu}{dt}$, wenn $d\mu$ den Winkel der Axen hh' bedeutet. Man erhält $q\,\frac{d\alpha}{dt}$ und $q_2\,\alpha\,\frac{d\mu}{dt}$.

§. 12. Wir suchen jetzt die Componenten von $\varphi^{(2)}$ parallel dreien rechtwinkligen Coordinatenaxen. Die z-Axe sei die Momentanaxe, die x-Axe die Axe der Normalwinkelbeschleunigung und die y-Axe senkrecht zu beiden. Die Richtungscosinusse für die centripetale Componente $(\omega^2)' r$ sind dann $-x:r$, $-y:r$, 0 und daher ihre Componenten $-(\omega^2)'x$, $-(\omega^2)'y$, 0; die Richtungscosinusse der zweiten Componente $\omega^2\psi s \,.\, \cos\vartheta = \omega^2\psi z$ sind $1, 0, 0$; die der dritten $\omega^2\psi s \,.\, \sin\varrho\cos\vartheta = \omega^2\psi x$: $0, 0, 1$; für die vierte sind sie $y:r$, $-x:r$, 0. Um die Bestandtheile zu finden, welche die fünfte Componente parallel den Axen liefert, zerlegen wir die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung parallel den Axen und bestimmen, ähnlich wie Cap. XVI, §. 4 das, was die einzelnen Partialcomponenten zur Bildung jener Grössen beitragen. Denn es lassen sich die dort durchgeführten Betrachtungen auf den vorliegenden ganz analogen Fall unmittelbar übertragen. Die Componenten von ωr sind $-\omega y$, ωx, 0, die von α aber $\alpha_x = \omega\psi$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = \omega'$. Daher sind die fraglichen Componenten

$$\begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ \alpha_y & \alpha_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega x & 0 \\ 0 & \omega' \end{vmatrix} = \omega\omega' x, \quad \begin{vmatrix} \omega_z & \omega_x \\ \alpha_z & \alpha_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega y \\ \omega' & \omega\psi \end{vmatrix} = \omega\omega' y,$$

$$\begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ \alpha_x & \alpha_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega y & \omega x \\ \omega\psi & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\psi x.$$

Die sechste Componente endlich liefert, wenn $\alpha_x^{(2)}$, $\alpha_y^{(2)}$, $\alpha_z^{(2)}$ die Componenten von $\alpha^{(2)}$ in Bezug auf die Axen bedeuten, wie Cap. XIV, §. 15, die Bestandtheile

$$\begin{vmatrix} \alpha_y^{(2)} & \alpha_z^{(2)} \\ y & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_z^{(2)} & \alpha_x^{(2)} \\ z & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_x^{(2)} & \alpha_y^{(2)} \\ x & y \end{vmatrix}.$$

Die Grössen $\alpha_x^{(2)}$, $\alpha_y^{(2)}$, $\alpha_z^{(2)}$ ergeben sich durch Projection des aus α, $\alpha + d\alpha$ und $\alpha^{(2)} dt$ gebildeten Dreiecks. Man erhält nämlich zunächst $\alpha_y^{(2)} dt = d \,.\, \alpha_y$, $\alpha_z^{(2)} dt = d \,.\, \alpha_z$ und weiter mit Hülfe von $\alpha_x = \omega\psi$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = \omega'$ unmittelbar $\alpha_x^{(2)} = (\omega\psi)'$, $\alpha_z^{(2)} = \omega''$, $\alpha_y^{(2)}$ aber muss direct bestimmt werden. Nun ersieht man aus Fig. 221, dass, weil α in der xz-Ebene liegt, die Projection von $\alpha^{(2)} dt$ auf die y-Axe gleich der Projection von $\alpha + d\alpha$ auf diese Axe ist. Es ist diese Grösse daher mit dem Sinus des Winkels zu multipliciren, den ihre Richtung mit der xz-Ebene bildet. Ist nun di der Winkel zwischen den Richtungen von α und $\alpha + d\alpha$, $\varkappa$ aber der Winkel, den die Ebene dieser beiden Linien mit der xz-Ebene bildet, so wird $di \,.\, \sin\varkappa$ der gesuchte Sinus, also $\alpha_y^{(2)} dt = (\alpha + d\alpha) di \,.\, \sin\varkappa$, mithin $\alpha_y^{(2)} = \alpha \sin\varkappa \cdot \frac{di}{dt}$ sein. Daher liefert die 6. Componente

$$\alpha z \sin\varkappa \frac{di}{dt} - \omega'' y, \quad \omega'' x - (\omega\psi)' z, \quad (\omega\psi)' y - \alpha x \sin\varkappa \frac{di}{dt}.$$

Man erhält daher nach einer kleinen Reduction für die Componenten von $\varphi^{(2)}$:

$$X = -\omega\omega' x + (\omega^3 - \omega'')y + \left(\omega^2\psi + \alpha \sin\varkappa \frac{di}{dt}\right) z,$$

$$Y = -\omega\omega' y - (\omega^3 - \omega'')x - (\omega\psi)' z,$$

$$Z = -\alpha \sin\varkappa \frac{di}{dt} \cdot x + (\omega\psi)' y.$$

Aus diesen Ausdrücken ergibt sich, dass ein Beschleunigungsmittelpunkt zweiter Ordnung existirt, dass derselbe aber mit dem Rotationscentrum des Systems zusammenfällt.

Mit Hülfe derselben Ausdrücke bildet man auch mit Leichtigkeit die Tangential-, Normal- und Binormalcomponente $\varphi_t^{(2)}$, $\varphi_n^{(2)}$, $\varphi_b^{(2)}$ von $\varphi^{(2)}$ für den Systempunkt M. Man hat X, Y, Z auf die Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale zu projiciren.

§. 13. In gleicher Weise kann man auch die Beschleunigung zweiter Ordnung im System behandeln, welches eine Windungsbewegung besitzt.

Denn das System hat in Bezug auf die Axen c_1, h_1, welche durch den Mittelpunkt der Beschleunigungen erster Ordnung zur Momentanaxe c und Winkelbeschleunigungsaxe h parallel gezogen werden können, die Beschleunigungscomponenten $\omega^2 p$, $\alpha p'$, von derselben Form und Bedeutung, wie sie §. 11 für die sphärische Bewegung vorausgesetzt wurden. Es kann daher die ganze Betrachtung der §§. 11 und 12 auf die Windungsbewegung übertragen werden. Man übersieht leicht, dass hier ein Beschleunigungsmittelpunkt zweiter Ordnung existirt.

§. 14. Zum Schlusse des vorliegenden Capitels wollen wir noch das Wesentlichste aus der Theorie der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung der Bewegung des unveränderlichen Systems entwickeln. Wir beginnen mit der ebenen Bewegung und beweisen den Satz:

Wenn für irgend eine Ordnung n der Beschleunigung eines in seiner Ebene sich bewegenden ebenen Systems in jedem Zeitmomente ein Punkt G_n existirt von der Eigenschaft, dass die Beschleunigung $\varphi^{(n)}$ aller Systempunkte M den Abständen MG_n von jenem Punkte proportional ist und mit MG_n einen constanten Winkel α bildet, so gibt es im System einen weiteren Punkt G_{n+1}, aber auch nur einen einzigen, dessen Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$ nächst höherer Ordnung verschwindet, während die Beschleunigung der Ordnung $(n+1)$ für alle Systempunkte dem Abstande derselben von G_{n+1} proportional ist und mit diesem Abstande constanten Winkel bildet.

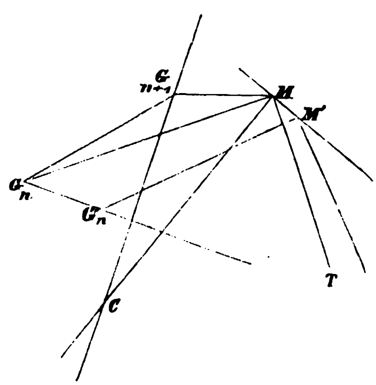

Fig. 222.

Die Beschleunigung $\varphi^{(n)}$ des Systempunktes M zur Zeit t (Fig. 222), welche mit dem Strale MG_n den Winkel α bildet, kann nämlich in zwei Componenten zerfällt werden, die eine längs MG_n, die andere senkrecht hiezu. Sie sind

$$\varphi^{(n)} \cos \alpha = \vartheta_N^{(n)} \,.\, MG_n$$

und

$$\varphi^{(n)} \sin \alpha = \vartheta_T^{(n)} \,.\, MG_n \;,$$

wo $\vartheta_N^{(n)}$ und $\vartheta_T^{(n)}$ die betreffenden Componenten in der Einheit der Entfernung von G_n sind. Zur Zeit $t + dt$ befinde sich der Systempunkt in M' und seien

$$(\vartheta_N^{(n)} + d \,.\, \vartheta_N^{(n)}) \,.\, M'G'_n, \quad (\vartheta_T^{(n)} + d \,.\, \vartheta_T^{(n)}) \,.\, M'G'_n$$

die dieser Zeit entsprechenden Componenten, erstere nach dem folgenden

Beschleunigungsmittelpunkte G'_n, letztere senkrecht zu $M'G'_n$ gerichtet. Die Grössen

$$[(\vartheta_N^{(n)} + d\,.\,\vartheta_N^{(n)})\,.\,M'G'_n] - [\vartheta_N^{(n)}\,.\,MG_n]$$

und

$$[(\vartheta_T^{(n)} + d\,.\,\vartheta_T^{(n)})\,M'G'_n] - [\vartheta_T^{(n)}\,.\,MG_n]$$

stellen daher die geometrischen Differentialien der Componenten $\varphi^{(n)}\cos\alpha$, $\varphi^{(n)}\sin\alpha$ oder die Componenten der Elementarbeschleunigung $(n+1)$ter Ordnung dar und liefern, wenn man sie mit dt dividirt, die Componenten von $\varphi^{(n+1)}$.

Eine Zerlegung nach den Seiten des Vierecks $M'MG_nG'_n$ gibt nun zunächst

$$\begin{aligned}[(\vartheta_N^{(n)} + d\,.\,\vartheta_N^{(n)})\,.\,M'G'_n] &= [(\vartheta_N^{(n)} + d\,.\,\vartheta_N^{(n)})\,.\,M'M] \\ &+ [(\vartheta_N^{(n)} + d\,.\,\vartheta_N^{(n)})\,.\,MG_n] + [(\vartheta_N^{(n)} + d\,.\,\vartheta_N^{(n)})\,.\,G_nG'_n]\end{aligned}$$

und wenn man bedenkt, dass $MM' = \omega r\,dt$ ist, wenn $r = CM$ den Abstand des Punktes M vom Momentancentrum C bedeutet und $G_nG'_n = u_n dt$ wird, wo u_n die Wechselgeschwindigkeit des Beschleunigungsmittelpunktes G_n mit bezeichnet, die Componenten der Beschleunigung $(n+1)$ter Ordnung $\varphi^{(n+1)}$, welche aus der centripetalen Beschleunigung $\vartheta_N^{(n)}\,.\,MG_n$ herrühren:

$$\vartheta_N^{(n)}\,.\,\omega r,\quad \frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt}\cdot MG_n,\quad \vartheta_N^{(n)}\cdot u_n,$$

parallel den Richtungen $M'M$, MG_n, $G_nG'_n$.

Ebenso liefert eine Zerlegung nach den Seiten eines mit $M'MG_nG'_n$ congruenten Vierecks, dessen Seiten auf den Seiten dieses senkrecht stehen,

$$\begin{aligned}[(\vartheta_T^{(n)} + d\,.\,\vartheta_T^{(n)})\,.\,M'G'_n] &= [(\vartheta_T^{(n)} + d\,.\,\vartheta_T^{(n)})\,.\,M'M] \\ &+ [(\vartheta_T^{(n)} + d\,.\,\vartheta_T^{(n)})\,.\,MG_n] + [(\vartheta_T^{(n)} + d\,.\,\vartheta_T^{(n)})\,.\,G_nG'_n]\end{aligned}$$

und hiemit als Componenten der Beschleunigung $\varphi^{(n+1)}$, welche aus $\vartheta_T^{(n)}\,.\,MG_n$ entspringen:

$$\vartheta_T^{(n)}\,.\,\omega r,\quad \frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt}\cdot MG_n,\quad \vartheta_T^{(n)}\,.\,u_n$$

längs MC, senkrecht zu MG_n und senkrecht zu $G_nG'_n$. Es ist daher

$$\begin{aligned}[\varphi^{(n+1)}] = [\vartheta_N^{(n)}\,.\,\omega r] + [\vartheta_T^{(n)}\,.\,\omega r] + \left[\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt}\cdot p_n\right] + \left[\frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt}\cdot p_n\right] \\ + [\vartheta_N^{(n)}\cdot u_n] + [\vartheta_T^{(n)}\cdot u_n],\end{aligned}$$

wo $p_n = MG_n$ gesetzt ist.

Bilden wir nun die Componenten $X^{(n+1)}$, $Y^{(n+1)}$ von $\varphi^{(n+1)}$ in Bezug auf die Tangente und Normale der Curve (G_n) der Beschleunigungsmittelpunkte G_n, so erhalten wir, wie leicht zu übersehen ist:

$$
\begin{aligned}
X^{(n+1)} = -\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt}\,x + \frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt}\,y &- \vartheta_N^{(n)}\,\omega\,(y - y_0) \\
&- \vartheta_T^{(n)}\,\omega\,(x - x_0) + \vartheta_N^{(n)}\,u_n, \\
Y^{(n+1)} = -\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt}\,y - \frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt}\,x &+ \vartheta_N^{(n)}\,\omega\,(x - x_0) \\
&- \vartheta_T^{(n)}\,\omega(y - y_0) + \vartheta_T^{(n)}\,.\,u_n,
\end{aligned}
$$

wo x, y die Coordinaten des Systempunktes M, x_0, y_0 die des Momentancentrums bezüglich der Tangente und Normale von (G_n) als Axen sind. Es gibt nun ein System von Werthen x_{n+1}, y_{n+1}, welches für x, y eingesetzt, diese Ausdrücke zu Null macht. Hiemit ist die Existenz des Beschleunigungsmittelpunktes G_{n+1} hypothetisch dargethan; es existirt für die Ordnung $n + 1$, wenn es für die Ordnung n besteht. Zieht man die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
0 = -\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt}\,x_{n+1} + \frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt}\,y_{n+1} &- \vartheta_N^{(n)}\,\omega(y_{n+1} - y_0) \\
&- \vartheta_T^{(n)}\,\omega\,(x_{n+1} - x_0) + \vartheta_N^{(n)}\,.\,u_n, \\
0 = -\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt}\,y_{n+1} - \frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt}\,x_{n+1} &+ \vartheta_N^{(n)}\,\omega\,(x_{n+1} - x_0) \\
&- \vartheta_T^{(n)}\,\omega\,(y_{n+1} - y_0) + \vartheta_T^{(n)}\,.\,u_n,
\end{aligned}
$$

von den vorstehenden Ausdrücken für $X^{(n+1)}$, $Y^{(n+1)}$ ab und setzt

$$x - x_{n+1} = \xi, \quad y - y_{n+1} = \eta,$$

so folgt,

$$
\begin{aligned}
X^{(n+1)} &= -\left(\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt} + \vartheta_T^{(n)}\,\omega\right)\xi + \left(\frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt} - \vartheta_N^{(n)}\,\omega\right)\eta, \\
Y^{(n+1)} &= -\left(\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt} + \vartheta_T^{(n)}\,\omega\right)\eta - \left(\frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt} - \vartheta_N^{(n)}\,\omega\right)\xi,
\end{aligned}
$$

welche Gleichungen ausdrücken, dass $\varphi^{(n+1)}$ aus zwei Componenten besteht, deren eine, $\left(\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt} + \vartheta_T^{(n)}\,\omega\right) \cdot p_{n+1}$ von M nach G_{n+1} gerichtet ist, während die andere, $\left(\frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt} - \vartheta_N^{(n)}\,\omega\right) \cdot p_{n+1}$ zu ihr senkrecht ist, wo $MG_{n+1} = p_{n+1}$ gesetzt wurde. Da beide dem Abstande MG_{n+1} proportional sind, so ist $\varphi^{(n+1)}$ diesem Abstande ebenfalls proportional und auf concentrischen Kreisen um G_{n+1} constant. Die Tangente des Winkels, welchen $\varphi^{(n+1)}$ mit dem Strale p_{n+1} bildet, ist

$$\left(\frac{d\,.\,\vartheta_T^{(n)}}{dt} - \vartheta_N^{(n)}\omega\right) : \left(\frac{d\,.\,\vartheta_N^{(n)}}{dt} + \vartheta_T^{(n)}\omega\right),$$

mithin gleichfalls constant.

Da für die Beschleunigung erster Ordnung ein Mittelpunkt existirt so gibt es einen solchen für die zweite und aus der Existenz dieses folgt die Existenz eines solchen für die dritte Ordnung u. s. f.

Im Falle, dass $\vartheta_N^{(n)}$ und $\vartheta_T^{(n)}$ constant sind, ergibt sich der Mittelpunkt G_{n+1} der Beschleunigungen $(n+1)$ter Ordnung sehr leicht. Zieht man nämlich durch das Momentancentrum C einen Stral senkrecht zur Tangente der Curve (G_n), so kann man auf ihm diesseits oder jenseits von C einen Punkt finden, für welchen die Componenten $\vartheta_N^{(n)}\omega r$ und $\vartheta_N^{(n)} u_n$ sich tilgen. Aus der Bedingung $\vartheta_N^{(n)}\omega r = \vartheta_N^{(n)} u_n$ folgt sein Abstand von C, nämlich $r = u_n : \omega$. Ebenso gibt es auf demselben Strale einen Punkt, für welchen sich die Componenten $\vartheta_T^{(n)}\omega r$ und $\vartheta_T^{(n)} u_n$ tilgen. Sein Abstand r ist derselben Bedingung $r = u_n : \omega$ unterworfen. Daher erfüllt ein und derselbe Punkt beide Bedingungen. Er ist Mittelpunkt der Beschleunigungen $\varphi^{(n+1)}$, da die übrigen Componenten verschwinden.

§. 15. Eine analytische Behandlung der Beschleunigungen höherer Ordnung für die ebene Bewegung hat keine weiteren Schwierigkeiten. Sind x, y die Coordinaten des Punktes M in der absoluten Ebene, x', y' seine Coordinaten in Bezug auf ein dem beweglichen System angehöriges Axensystem und x_0, y_0 die Coordinaten von dessen Ursprung, so ist

$$x = x_0 + ax' + a'y', \quad y = y_0 + bx' + b'y'$$

und daher, wenn $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, $a^{(n)}$, $a'^{(n)}, \ldots$ $n$malige Differentiationen bedeuten,

$$x^{(m)} = x_0^{(m)} + a^{(m)}x' + a'^{(m)}y', \quad y^{(m)} = y_0^{(m)} + b^{(m)}x' + b'^{(m)}y',$$

woraus für $x^{(m)} = 0$, $y^{(m)} = 0$ der Mittelpunkt der Beschleunigungen sofort folgt.

Bildet man die Grössen

$$\begin{vmatrix} x^{(m)}, & -y^{(m)} \\ y^{(n)}, & x^{(n)} \end{vmatrix} = A_{mn}, \quad \begin{vmatrix} x^{(m)} & y^{(m)} \\ x^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = B_{mn}$$

und setzt für $x^{(m)}$, $x^{(n)}$, $y^{(m)}$, $y^{(n)}$ ihre Werthe in $x_0^{(m)}$, $a^{(m)}, \ldots$ ein, so ergeben sich die Formen:

$$A_{mn} = (a^{(m)}a^{(n)} + b^{(m)}b^{(n)})(x'^2 + y'^2) + Mx' + Ny' + P,$$
$$B_{mn} = (a^{(n)}b^{(m)} - a^{(m)}b^{(n)})(x'^2 + y'^2) + M'x' + N'y' + P'.$$

Sind D_m, D_n die Strecken, deren Projectionen auf die Axen $x^{(m)}$, $y^{(m)}$; $x^{(n)}$ $y^{(n)}$ sind d. h. die Beschleunigungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung des Punktes M, so ist

$$\cos(D_m D_n) = \frac{x^{(m)}x^{(n)} + y^{(m)}y^{(n)}}{D_m D_n}, \quad \sin(D_m D_n) = \frac{x^{(m)}y^{(n)} - x^{(n)}y^{(m)}}{D_m D_n}$$

d. h. es ist

$$A_{mn} = D_m D_n \cos(D_m D_n), \quad B_{mn} = D_m D_n \sin(D_m D_n).$$

A_{mn} ist also das geometrische Produkt der Beschleunigungen des Systempunktes M, B_{mn} ist das Moment der einen Beschleunigung in Bezug auf den Endpunkt der anderen, wenn beide in ihren Richtungen von M aus aufgetragen werden. Aus den Formeln für A_{mn}, B_{mn} zieht man nachstehende Folgerungen:

1. Der Ort aller Punkte im System, für welche $A_{mn} = k$, d. h. constant ist, ist ein Kreis; alle, den verschiedenen Werthen von k entsprechenden Kreise sind concentrisch.

2. Der Ort $B_{mn} = k$ ist gleichfalls ein Kreis.

3. Der Ort der Punkte, wofür $A_{mn} = kA_{\mu\nu}$, ist ein Kreis $A_{mn} - kA_{\mu\nu} = 0$, welcher durch die Schnittpunkte von $A_{mn} = 0$ und $A_{\mu\nu} = 0$ hindurchgeht.

4. Ebenso sind die Orte $A_{mn} = kB_{\mu\nu}$, $B_{mn} = kB_{\mu\nu}$ Kreise.

D_0 bedeutet den Radiusvector, D_1 die Geschwindigkeit, D_2 die Beschleunigung; $D_2 \cos(D_1 D_2)$ ist die Tangentialbeschleunigung, $D_2 \sin(D_1 D_2)$ die Normalbeschleunigung. Man erhält daher bis zur zweiten Ordnung die speciellen, zum Theil bekannten Sätze:

1. Der Ort $B_{01} = k$ der Punkte gleicher Flächengeschwindigkeiten $rv \sin(rv)$ ist ein Kreis.

2. Der Ort $A_{11} = v^2 = k$ ist ein Kreis.

3. Der Ort $A_{22} = \varphi^2 = k$ constanter Beschleunigung ist ein Kreis.

4. Die Orte constanter Verhältnisse $D_1 : D_2$, $D_1 : D_2 \cos(D_1 D_2)$, $D_1 : D_2 \sin(D_1 D_2)$ sind Kreise.

5. Der Ort der Punkte constanten Winkels zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung ist ein Kreis u. s. w.

§. 16. Ebenso hat man für die Beschleunigungen höherer Ordnung der sphärischen und der Windungsbewegung mit Hülfe der Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ax' + a'y' + a''z', & x^{(n)} &= x_0^{(n)} + a^{(n)}x' + a'^{(n)}y' + a''^{(n)}z', \\ y &= y_0 + bx' + b'y' + b''z', & y^{(n)} &= y_0^{(n)} + b^{(n)}x' + b'^{(n)}y' + b''^{(n)}z', \\ z &= z_0 + cx' + c'y' + c''z', & z^{(n)} &= z_0^{(n)} + c^{(n)}x' + c'^{(n)}y' + c''^{(n)}z', \end{aligned}$$

aus denen für $x^{(n)} = y^{(n)} = z^{(n)} = 0$ sogleich die Existenz des Mittelpunktes der Beschleunigungen n^{ter} Ordnung folgt, nachstehende Folgerungen wo

$$D_n = [x^{(n)2} + y^{(n)2} + z^{(n)2}]^{\frac{1}{2}}$$

die Beschleunigung n^{ter} Ordnung bezeichnet:

1. Der Ort aller Punkte, deren Beschleunigungen n^{ter} Ordnung dieselbe Richtung haben (Richtungscosinusse α, β, γ) ist die Gerade $x^{(n)} : y^{(n)} : z^{(n)} = \alpha : \beta : \gamma$.

2. Der Ort aller Punkte, deren Beschleunigungen n^{ter} Ordnung einer Ebene parallel sind, d. h. senkrecht zu einer Geraden (α, β, γ) ist die Ebene

$$x^{(n)} . \alpha + y^{(n)} . \beta + z^{(n)} . \gamma = 0 .$$

Sie geht durch den Mittelpunkt der Beschleunigungen $x^{(n)} = 0$, $y^{(n)} = 0$, $z^{(n)} = 0$.

3. Der Ort aller Punkte, deren Beschleunigungen n^{ter} Ordnung den Erzeugungslinien einer Kegelfläche $F(x, y, z) = 0$ parallel sind, ist eine Kegelfläche desselben Grades $F(x^{(m)}, y^{(m)}, z^{(m)}) = 0$, welche den Mittelpunkt der Beschleunigungen zum Mittelpunkte hat. Sie geht in eine Cylinderfläche über, wenn dieser Mittelpunkt ins Unendliche rückt oder wenn eine Beschleunigungsaxe besteht.

4. Der Ort aller Punkte, deren Beschleunigung n^{ter} Ordnung dieselbe Grösse k hat, ist das Ellipsoid $x^{(m)\,2} + y^{(m)\,2} + z^{(m)\,2} = k^2$, dessen Mittelpunkt im Beschleunigungsmittelpunkte liegt.

5. Der Ort $D_m D_n \cos(D_m D_n) = x^{(m)} x^{(n)} + y^{(m)} y^{(n)} + z^{(m)} z^{(n)} = \text{const.}$ ist eine Fläche 2. Grades; der Ort

$$[D_m D_n \sin(D_m D_n)]^2 = \begin{vmatrix} y^{(m)} & y^{(n)} \\ z^{(m)} & z^{(n)} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z^{(m)} & z^{(n)} \\ x^{(m)} & x^{(n)} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x^{(m)} & x^{(n)} \\ y^{(m)} & y^{(n)} \end{vmatrix}^2 = k^2$$

eine Fläche 4. Grades.

6. Der Ort $(D_m D_n) = 0$ ist der Schnitt der drei Hyperboloide

$$\begin{vmatrix} y^{(m)} & y^{(n)} \\ z^{(m)} & z^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z^{(m)} & z^{(n)} \\ x^{(m)} & x^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x^{(m)} & x^{(n)} \\ y^{(m)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Das erste und dritte derselben enthalten die Gerade $y^{(m)} = 0$, $y^{(n)} = 0$ und schneiden sich also noch in einem cubischen Kegelschnitt. Da die Gerade nicht auf dem zweiten Hyperboloid liegt, so stellt der Kegelschnitt allein den Ort vor.

7. Der Ort der Punkte, für welche der Winkel $(D_m D_n)$ constant ist, ist im Allgemeinen eine Fläche 4. Grades. Man erhält ihre Gleichung, indem man setzt
$[x^{(m)} x^{(n)} + y^{(m)} y^{(n)} + z^{(m)} z^{(n)}]^2 = k^2 (x^{(m)\,2} + y^{(m)\,2} + z^{(m)\,2})(x^{(n)\,2} + y^{(n)\,2} + z^{(n)\,2})$.
Für $(D_m D_n) = \frac{\pi}{2}$ reducirt sie sich auf den 2. Grad.

8. Der Ort der Punkte, für welche D_p senkrecht ist zu D_m und zu D_n, ist eine Curve doppelter Krümmung 4. Grades.

9. Es gibt 8 Punkte im System, für welche D_p, D_m, D_n alle drei zu einander rechtwinklig sind.

10. Das 6 fache Volumen V_{mnp} der Pyramide, welche von D_m, D_n, D_p gebildet wird, ist

$$6\, V_{mnp} = \begin{vmatrix} x^{(m)} & y^{(m)} & z^{(m)} \\ x^{(n)} & y^{(n)} & z^{(n)} \\ x^{(p)} & y^{(p)} & z^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Es ist constant für die Punkte einer Fläche 3. Grades. Verschwindet dasselbe, so fallen D_m, D_n, D_p für die Punkte der Fläche in eine Ebene.

11. Der Ort aller Punkte, für welche D_m, D_n, D_p, D_q in eine Ebene fallen, wird von den gemeinsamen Punkten der vier Flächen $V_{mnp} = 0$, $V_{mnq} = 0$, $V_{mpq} = 0$, $V_{npq} = 0$ dritten Grades gebildet. Auf den beiden ersten Flächen liegt der Ort aller Punkte, wofür Winkel $(D_m D_n) = 0$ ist. Dieser Ort ist nach 6. ein cubischer Kegelschnitt. Sie schneiden sich daher noch in einer Curve 6. Ordnung, welche den Ort darstellt.

12. Die Punkte, für welche fünf Beschleunigungen D_m, D_n, D_p, D_q, D_r in eine Ebene fallen, sind gemeinschaftliche Punkte der Flächen $V_{mnp} = 0$, $V_{mnq} = 0$, $V_{mnr} = 0$, $V_{mpq} = 0$, $V_{mpr} = 0$, $V_{mqr} = 0$, $V_{npq} = 0$, $V_{npr} = 0$, $V_{nqr} = 0$, $V_{pqr} = 0$. Sie stellen nur vier Bedingungen $V_{mnp} = 0$, $V_{mnq} = 0$, $V_{mpr} = 0$, $V_{pqr} = 0$ dar. Die drei ersten dieser vier Flächen 3. Ordnung schneiden sich in 27 Punkten. Neun von diesen sind aber Durch-

schnitte der Flächen $V_{mpr} = 0$ mit dem cubischen Kegelschnitt $(D_m D_n) = 0$; neun andere sind die Schnittpunkte von $V_{mnq} = 0$ mit dem Kegelschnitte $(D_m D_n) = 0$. Diese 18 Punkte gehören dem Orte nicht an, weil sie im Allgemeinen nicht auf $V_{pqr} = 0$ liegen. Daher bleiben nur 9 Punkte, welche den fraglichen Ort bilden.

Die in den §§. 11. 12. mitgetheilten Sätze, von denen einige für die 1. Ordnung der Beschleunigung bereits früher bekannt waren und bereits früher entwickelt wurden, sind enthalten in der Abhandlung von C. Jordan, Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace (Bullet. de la Société mathém. de France, T. I, p. 144 (1873)). Wir fügen denselben noch hinzu:

Die Punkte, deren Beschleunigung n^{ter} Ordnung durch einen gegebenen Punkt A gehen, liegen auf einer Curve 4. Ordnung. Denn sind a, b, c die Coordinaten von A, x, y, z die eines Systempunktes, so müssen die Gleichungen bestehen,

$$(x-a):(y-b):(z-c) = x^{(n)} : y^{(n)} : z^{(n)}.$$

Es sind aber x, y, z, $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, $z^{(n)}$ lineare Functionen von den Coordinaten x', y', z' des Punktes in Bezug auf das dem System angehörige Coordinatensystem. Die Curve geht durch den Mittelpunkt der Beschleunigungen von der Ordnung n. — Die Richtungen der Beschleunigungen n^{ten} Ordnung, welche durch einen Punkt A gehen, bilden eine Kegelfläche dritten Grades, deren Grad den Grad des Complexes angibt, welchen die Beschleunigungsrichtungen n^{ter} Ordnung des Systems bilden. Unter den Complexkegeln sind 4 Kegel 2. Grades.

§. 17. Nach Cap. III, §. 15 kann die absolute Bewegung eines Punktes aus der relativen Bewegung desselben und der Bewegung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes zusammengesetzt werden. Daher konnte auch die absolute Geschwindigkeit aus der relativen und der Geschwindigkeit des Systempunktes gebildet werden; ferner zeigte der Satz von Coriolis, dass die absolute Beschleunigung die geometrische Summe der relativen Beschleunigung, der Beschleunigung des Systempunktes und der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung ist. Ein ähnlicher Satz wurde von Somoff für die Beschleunigungen aller Ordnungen aufgestellt und mit seiner Hülfe die relative Beschleunigung aller Ordnungen entwickelt. S. Somoff, Sur les accélérations des diverses ordres dans le mouvement relatif. (Bullet. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg, 1865, oder Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du bulletin physico-mathématique et du Bulletin de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg, T. III, p. 669, sowie „Theoret. Mechanik“, übers. v. Ziwet, Th. I, p. 392 u. ffg.)

Für die zweite Ordnung hatte Resal in seiner Cinématique pure den betreffenden Satz bereits aufgefunden.

Einige Literatur zur Beschleunigung höherer Ordnungen.

Die erste Idee der Beschleunigungen zweiter und höherer Ordnung gebührt Jacobi, welcher bei seiner Doctorpromotion am 13. August 1825 als fünfte These den Satz vertheidigte: „Theoria mechanices analytica causam agnoscere nullam potest, quidni, sicuti differentialia prima velocitatis nomine, secunda virium insignimus, simile quid ad altiora quoque differentialia adhibeatur; de quibus theoremata proponi possint, prorsus analoga iis, quae de vi et de velocitate circumferuntur.“ Denselben Gedanken entwickelte 1845 A. Transon, Note sur les principes de la Mécanique, Journ. de Mathém. p. Liouville, T. X, p. 320); ebenso **Möbius**, Ueber die phoronomische Deutung des Taylor'schen Theorems (Berichte der Verhandlungen der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1848, oder Crelle's Journal, B. 36, p. 91). Die Ausbildung der geometrischen Differentiation führte zur weiteren Ausbildung der Theorie der Beschleunigungen, mit der sie im Grunde identisch ist.

Weiteres sehe man in den im Texte citirten Schriften von **Résal** und **Somoff**, insbes. in des letzteren: Mémoire sur les accélérations de divers ordres. (Mém. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg, VII. Série, T. VIII, Nr. 5.)

Von besonderer Bedeutung ist die von **Rittershaus** in seiner Abhandlung: „Kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung" (Civilingenieur, B. 24, p. 1) entwickelte Methode, welche für alle Ordnungen der Beschleunigung werthvolle Aufschlüsse gibt.

XVIII. Capitel.

Einiges über den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand projectivisch-veränderlicher Systeme.

§. 1. Es seien in einer Ebene zwei ähnliche Systeme Σ_1, Σ_2 vereinigt. Jedem Punkte A_1 des ersten ist ein Punkt A_2 des zweiten, jeder Geraden g_1 eine Gerade g_2 homolog. Den Punkten der Punktreihe auf g_1 entsprechen die Punkte der Punktreihe auf g_2, so dass diese Reihen einander ähnlich sind, und zwar ist das Aehnlichkeitsverhältniss für alle solche Paare homologer Punktreihen dasselbe; allen Geraden eines Punktes A_1 entsprechen die Geraden des homologen Punktes, so dass die beiden Büschel A_1, A_2 congruent sind; jeder Figur von Σ_1 ist eine ihr ähnliche von Σ_2 homolog. Die unendlich ferne Gerade der Gesammtebene ist eine Doppellinie. Die Systeme können auf zwei Arten in der Gesammtebene vereinigt sein, gleichartig und ungleichartig, je nachdem homologe Stralenbüschel denselben oder entgegengesetzten Sinn haben.

Nehmen wir an, die Systeme haben gleichartige Lage. Es seien A_1, A_2 (Fig. 223) ein Paar homologer Punkte; sie sind die Mittelpunkte congruenter gleichliegender Stralenbüschel, deren homologe Stralen sich auf einem Kreise schneiden, welcher durch A_1, A_2 hindurchgeht. Dem Strale $A_1 A_2$, als einem Strale d_1 des Büschels A_1, entspricht ein Stral d_2 des Büschels A_2, welcher von dem Kreise in A_2 berührt wird. Mit A_2 fällt ein Punkt B_1 des Systems Σ_1 zusammen, welchem ein Punkt B_2 auf d_2 entspricht. B_1 und B_2 sind gleichfalls Mittelpunkte homologer congruenter Büschel, welche einen zweiten Kreis erzeugen, der den Stral d_1 in B_1 berührt. Beide Kreise schneiden sich ausser A_2 noch in einem Punkte O. Nach diesem Punkte laufen homologe Stralen a_1, a_2 der Büschel A_1, A_2 und ebenso homologe Stralen b_1, b_2 der Büschel B_1, B_2; er ist daher sowohl ein Punkt $(a_1 b_1)$ des Systems Σ_1, als auch dessen homologer Punkt $(a_2 b_2)$ von Σ_2. **Zwei in einer Ebene vereinigte ähnliche Systeme gleichartiger Lage besitzen daher einen Doppelpunkt.** Sie können nur einen

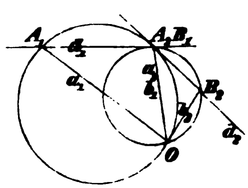

Fig. 223.

solchen haben. Im Falle, dass zwei Doppelpunkte vorhanden wären, würden die Systeme congruent sein und zusammenfallen, da das Aehnlichkeitsverhältniss auf allen homologen Geraden dasselbe ist.

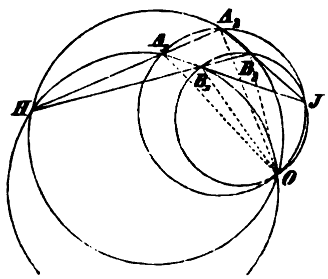

Fig. 224.

Der Doppelpunkt ist gemeinsamer Mittelpunkt zweier homologer congruenter Stralenbüschel von Σ_1 und Σ_2. Man sieht leicht, dass wenn A_1, A_2; B_1, B_2 (Fig. 224) irgend zwei Paar homologe Punkte sind und die Verbindungslinien $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ sich in einem Punkte H, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ sich in einem Punkte J schneiden, die vier Kreise $A_1 B_1 H$, $A_2 B_2 H$, $A_1 A_2 J$, $B_1 B_2 J$ durch den Doppelpunkt O gehen. Da $\triangle O A_1 B_1 \backsim \triangle O A_2 B_2$, so ist W. $A_1 O B_1 =$ W. $A_2 O B_2$ und folgt W. $A_1 O A_2$ $=$ W. $B_1 O B_2$ und da $O A_1 : O A_2 = O B_1 : O B_2$, so folgt, dass $\triangle O A_1 A_2 \backsim \triangle O B_1 B_2$ und folglich ist W. $O A_1 A_2 =$ W. $O B_1 B_2$, d. h. die Stralen OA_1, $OB_1, \ldots$, welche vom Doppelpunkte O nach den Punkten des Systems Σ_1 (oder Σ_2) gehen, bilden mit den Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$, welche diese Punkte mit den ihnen homologen verbinden, den Projectionsstralen, gleiche Winkel. Dass Winkel $A_1 O B_1 = A_1 O B_2 = A_1 H B_1$ ist, führt zu einer leichten Construktion des Doppelpunktes. Alle homologen Geradenpaare bilden denselben Winkel mit einander.

Zwei ähnliche Systeme ungleichartiger Lage haben stets eine Doppellinie.

§. 2. Ist Σ_1 die erste, Σ_2 die zweite, von der ersten unendlich wenig abweichende Lage eines ähnlich veränderlichen Systems Σ, d. h. eines Systems, welches während der Bewegung sich stets ähnlich bleibt, so sind $A_1 A_2$, $B_1 B_2, \ldots$ die Bogenelemente, welche die Punkte A_1, $B_1, \ldots$ von Σ im Zeitelemente dt beschreiben. Daher sind $A_1 A_2 : dt$, $B_1 B_2 : dt, \ldots$, die Geschwindigkeiten dieser Punkte. Die Geschwindigkeit des dem Doppelpunkte homologen Punktes ist Null. Man kann ihn daher den Mittelpunkt der Geschwindigkeiten nennen. Die Geschwindigkeiten bilden gleiche Winkel mit den Stralen, welche die Systempunkte mit dem Mittelpunkte der Geschwindigkeiten verbinden. Die Geschwindigkeiten der Punkte eines solchen Strales sind parallel und dem Abstande vom Mittelpunkte proportional.

Trägt man auf der Tangente der Bahn jedes Punktes A von A_1 aus die Geschwindigkeit nach Grösse und Sinn auf, so bilden die Endpunkte dieser Geschwindigkeitsstrecken ein dem System Σ, oder Σ_1, oder Σ_2 ähnliches System, welches denselben Punkt O zum Doppelpunkte hat. (Man braucht nur die Geschwindigkeiten der Punkte eines Strales zu verfolgen, welche durch den Doppelpunkt geht.)

§. 3. Die Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems Σ kann auf mannigfache Art bestimmt werden. Sie ist bestimmt, wenn zwei Systempunkte A, B sich auf zwei Geraden a, b so bewegen, dass sie auf denselben ähnliche Punktreihen A_1, A_2, $A_3 \ldots$, B_1, B_2, $B_3 \ldots$ durchlaufen, so dass also $A_1 A_2 : B_1 B_2 = A_2 A_3 : B_2 B_3 = \ldots$ ist. Ist O der Doppelpunkt zweier auf einanderfolgender Lagen Σ_1, Σ_2 des Systems Σ, und H der Schnittpunkt von a und b, so schneiden sich die Kreise $A_1 B_1 H$, $A_2 B_2 H$ in einem Punkte O, welcher Doppelpunkt von Σ_1, Σ_2 ist. Aber dieser Punkt ist zugleich Doppelpunkt von Σ_2, Σ_3, indem der Kreis $A_3 B_3 H$ durch denselben hindurchgeht, ebenso ist er Doppelpunkt je zweier auf einanderfolgender Lagen. Für die auf diese

Weise bestimmte Bewegung bleibt also der Mittelpunkt der Aehnlichkeit und der Geschwindigkeiten für alle Lagen ein und derselbe Punkt. Wenn ferner C_1, C_2, C_3 ... auf einanderfolgende Lagen eines weiteren Systempunktes C sind, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OA_1C_1, OA_2C_2, OA_3C_3 ...., dass der Punkt C eine Gerade $C_1C_2C_3$ ... beschreibt. Bei der genannten Bewegung beschreiben also alle Systempunkte, ausser dem Mittelpunkte der Aehnlichkeit gerade Linien. Man kann die Bewegung daher die geradlinige Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems nennen. Wegen des allen aufeinanderfolgenden Lagen gemeinsamen Doppelpunktes ist sie das Analogon der Rotation beim unveränderlichen System. Die Gerade AC des Systems erzeugt auf den Bahnen der Punkte A und C ähnliche Punktreihen. Es sind mithin die Punktreihen, welche die Punkte einer Systemgeraden auf ihren Bahngeraden erzeugen alle unter sich ähnliche Reihen.

Die verschiedenen Lagen derselben Systemgeraden sind daher die Projectionsstralen für je zwei ähnliche Reihen, welche je zwei ihrer Punkte während der geradlinigen Bewegung auf ihren geradlinigen Bahnen erzeugen. Es ist aber bekannt, dass die Geraden selbst Projectionsstralen sind, und mithin erzeugen die verschiedenen Lagen einer Systemgeraden dieselbe Parabel durch Umhüllung, welche durch die geradlinigen Bahnen der auf ihr liegenden Punkte des ähnlichveränderlichen Systems umhüllt wird. Die Bewegung erfolgt also so, dass jede Systemgerade eine bestimmte Parabel umhüllt. Fällt man vom Mittelpunkte O der Aehnlichkeit Perpendikel OP auf alle Lagen der Systemgeraden AB, so sind die Dreiecke OA_1P_1, OA_2P_2, ... ähnlich; es liegen daher die Fusspunkte P alle in einer Geraden, der Scheiteltangente der Parabel und ist O ihr Brennpunkt.

Die Systempunkte umhüllen also eine Schaar Parabeln, welche den Mittelpunkt der Aehnlichkeit zum gemeinsamen Brennpunkt haben. Es sei A ein Systempunkt und Mittelpunkt eines Stralenbüschels von Systemgeraden. Jede dieser Geraden erzeugt eine Parabel und fällt einmal im Laufe der Bewegung mit der Bahnlinie des Punktes A zusammen; daher schneiden sich die Scheiteltangenten aller von den Stralen des Büschels erzeugten Parabeln in dem Fusspunkte des Perpendikels OP_0, welches man von O auf die Bahnlinie von A fällen kann, und liegen die Scheitel aller dieser Parabeln auf dem über OP_0 als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Ein ähnlich veränderliches System Σ kann aus einer beliebigen ersten Lage Σ_1 in eine beliebige zweite Lage Σ_2 durch geradlinige Bewegung übergeführt werden.

Eine andere Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems ist die, bei welcher zwei Punkte auf ähnlichen Curven ähnliche Punktreihen erzeugen. Auch hiefür bleibt der Mittelpunkt der Aehnlichkeit unverändert derselbe und alle Systempunkte beschreiben auf ähnlichen Curven ähnliche Punktreihen.

Bewegen sich drei Punkte eines ähnlich veränderlichen Systems auf drei Geraden, so ist der Mittelpunkt der Aehnlichkeit aller aufeinanderfolgender Lagen derselbe Punkt und beschreibt jeder Systempunkt eine Gerade.

Sind die vorgenannten Curven mit den ähnlichen Punktreihen Kreise, so entsteht die kreisförmige Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems. Gehen dabei die Kreise durch den Mittelpunkt der Aehnlichkeit, so ergibt sich die Bewegung, welche von Durand (Nouv. annales de mathém. 2e. Série, T. VI, p. 60), Wiener (Annali di matematica, Ser. 2da, T. I, p. 139) und Affolter (Grunert's Archiv für Mathem., Th. 55, p. 175) untersucht wurde.

Durch drei Systemgerade, welche durch drei feste Punkte gehen, ist die Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems bestimmt. Denn die drei Geraden erzeugen drei congruente Stralenbüschel, deren homologe Stralentripel ein sich ähnlich bleibendes Dreieck bestimmen.

§. 4. Es seien Σ_1, Σ_2, Σ_3 drei unendlich wenig von einander verschiedene Lagen eines ähnlich veränderlichen Systems Σ entsprechend den Zeiten t, $t + dt$, $t + 2dt$; dasselbe kann durch geradlinige Bewegung aus der Lage Σ_1 in die Lage Σ_2 übergehen und ebenso aus der Lage Σ_2 durch eine andre geradlinige Bewegung in die Lage Σ_3 gelangen. Ein beliebiger Systempunkt M beschreibt in zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen die Bogenelemente $M_1 M_2$ und $M_2 M_3$ seiner Bahn (Fig. 225). Ein Hülfssystem σ, gleichfalls ähnlich veränderlich, falle zur Zeit t mit Σ_1 zusammen und gelange zugleich mit Σ nach Σ_2, setze aber dann die geradlinige Bewegung fort und gelange in eine Lage Σ'_2 derart, dass die Punkte aus den Lagen M_2 nach M'_2 gelangen, so dass die Bogenelemente $M_2 M'_2 = M_1 M_2$ werden. Die Möglichkeit erhellt aus §. 2. Denn die Dreiecke, wie $O M_1 M_2$, welche die Punkte M_1, M_2 mit dem Mittelpunkte O der Aehnlichkeit von Σ_1 und Σ_2 bilden, sind unter sich ähnlich. Ebenso sind die Dreiecke $O M_2 M'_2$ unter sich ähnlich; ist also für irgend einen Systempunkt von σ $M_2 M'_2 = M_1 M_2$, so findet diese Gleichheit für alle Punkte statt. Aus der Lage Σ'_2 kann aber σ in die Lage Σ_3 durch eine weitere geradlinige ähnliche Bewegung gelangen. Die Linien $M'_2 M_3$ sind nun die Deviationen der Punkte M von Σ, proportional den Beschleunigungen derselben und haben deren Richtung. Trägt man auf ihren Richtungen, welche man durch die Punkte M_1 ziehen kann, von den Punkten M_1 aus die Beschleunigungen $\varphi = M'_2 M_3 : \frac{1}{2} dt^2$ auf, so bilden ihre Endpunkte, wie es §. 3 mit den Endpunkten der Geschwindigkeiten v der Fall war, ein dem beweglichen System Σ ähnliches System.

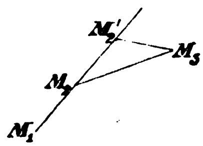

Fig. 225.

Dieselben Betrachtungen, welche wir eben anstellten, um zu dem ähnlichen System der Endpunkte der Beschleunigungen zu gelangen, gelten auch für den Uebergang des Systems aus der dritten Lagen in eine vierte u. s. f., d. h. die Endpunkte der Beschleunigungen aller Ordnungen bilden zu jeder Zeit t ein dem beweglichen System ähnliches System.

Das System der Endpunkte der Beschleunigungen irgend einer Ordnung hat mit dem ihm ähnlichen System Σ einen Doppelpunkt. Die Beschleunigung dieses Punktes ist Null, die Beschleunigungen der Punkte eines Strales, welcher durch ihn hindurchgeht, sind parallel, aber auf verschiedenen Seiten dieses Punktes entgegengesetzt. Wir nennen diesen Punkt den **Mittelpunkt der Beschleunigungen**. Die Stralen des Mittelpunktes der Beschleunigungen bilden mit der Beschleunigung der Systempunkte, nach welchen sie hinlaufen, gleiche Winkel u. s. f. Wir erhalten daher leicht die folgenden Sätze, welche für das unveränderliche System bereits in früheren Capiteln sich ergaben:

In jedem ähnlich veränderlichen System gibt es zu jeder Zeit und für jede Ordnung der Beschleunigungen einen Punkt ohne Beschleunigung, den Mittelpunkt der Beschleunigungen. Die Richtung der Beschleunigung der Systempunkte bildet mit den Stralen, welche sie mit diesem Mittelpunkte verbinden, gleiche Winkel. Die Beschleu-

nigung der Systempunkte ist ihrem Abstande von diesem Mittelpunkte proportional und folglich auf einem um denselben beschriebenen Kreise von derselben Grösse. Die Beschleunigungen der Punkte auf einem Strale des Mittelpunktes der Beschleunigungen sind parallel und diesseits und jenseits desselben entgegengesetzten Sinnes.

§. 5. Man erkennt ferner leicht die Richtigkeit der Sätze:

Der Ort aller Punkte des ähnlich veränderlichen Systems, für welche das Verhältniss der Beschleunigung zur Geschwindigkeit zur Zeit t denselben Werth hat, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf dem Strale liegt, welcher die Mittelpunkte der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen verbindet; dieser Kreis theilt die Entfernung dieser beiden Punkte harmonisch.

Der Ort aller Punkte, deren Beschleunigung und Geschwindigkeit zur Zeit t denselben Winkel σ bilden, ist ein Kreis, welcher die Mittelpunkte der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen enthält. Sind nämlich C und G (Fig. 226) die Mittelpunkte der Geschwindigkeiten v und der Beschleunigungen φ, so bildet die Geschwindigkeit eines beliebigen Systempunktes M mit CM einen constanten Winkel α und die Beschleunigung mit GM einen constanten Winkel λ und ist $\sigma \pm \lambda = CMG + \alpha$ und mithin $CMG = \sigma \pm \lambda - \alpha$, also constant.

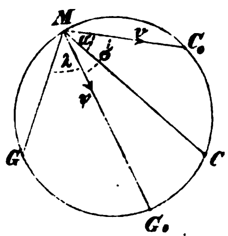

Fig. 226.

Die Geschwindigkeiten v aller Punkte des Kreises gehen durch einen festen Punkt C_0 des Kreises, die Beschleunigungen φ derselben durch einen andern festen Punkt G_0 desselben. Jedem Werthe des Winkels σ, den v und φ mit einander bilden, entspricht ein solcher Kreis.

Für $\sigma = 0$ fallen die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der Punkte des Ortes zusammen. Der Ort heisst der Wendekreis des Systems. Seine Punkte beschreiben zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente, welche in dieselbe Gerade fallen, d. h. sie passiren eben Wendepunkte ihrer Bahnen. Die Punkte C_0, G_0 fallen in einen Punkt zusammen, den Wendepol J. Die Punkte des Ortes haben keine Normalbeschleunigung.

Für $\sigma = \frac{1}{2}\pi$, d. h. für die Punkte, deren Beschleunigung rechtwinklig zur Geschwindigkeit ist, wird die Tangentialbeschleunigung Null; die Punkte C_0, G_0 sind die Endpunkte eines Durchmessers des Ortes. Der Kreis der Punkte ohne Tangentialbeschleunigung heisst der Tangentialkreis.

An den Ort der Punkte ohne Normalbeschleunigung lässt sich die Untersuchung über die Krümmung der Bahnen anschliessen und die Aufgabe lösen: „Wenn die Krümmungsradien der Bahnen dreier Punkte bekannt sind, den Krümmungshalbmesser für die Bahn jedes anderen Punktes zu finden."

Weitere Untersuchungen über die Kinematik ebener ähnlich veränderlicher Systeme, insbesondere auch über die Krümmung der Bahnen, finden sich bei Grouard, Figures planes semblables (l'Institut, 1865, p. 159 u. 179; 1870, p. 27, 84, 124 u. 171), sowie in den besonders werthvollen und gründlichen Abhandlungen von Burmester: 1) Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich veränderlicher ebener Systeme (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik XIX. Bd., p. 154); 2) Kinematisch-geom. Untersuchung der Bewegung affin-veränderlicher und collinear-veränderlicher ebener Systeme (ebendas., XIX. Bd., p. 464); 3) Kinem.-geom. Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme (ebendas., XX. Bd., pg. 381); 4) Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme (ebendas., XXIII. Bd., pg. 108); 5) Ueber den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme (Civilingenieur, XXIV. Bd., 2. u. 3. Heft). Die ähnlich veränderliche Bewegung kommt bereits 1830 bei Chasles vor (Note sur les propriétés du système de deux corps semblables entr'eux etc. Bulletin des Sciences math. p. Férussac, Nov. 1830).

Es verdient bemerkt zu werden, dass man die Theorie der Bewegung des ähnlich veränderlichen ebenen Systems zum Theil aus der Theorie des unveränderlichen ebenen Systems ableiten kann, indem man das unveränderliche System auf eine Parallelebene von einem endlich entfernten Punkte aus in allen seinen Lagen projicirt.

§. 6. In zwei affinen ebenen Systemen Σ_1, Σ_2 entspricht jedem Punkt ein Punkt, jeder Geraden eine Gerade und sind die Punktreihen homologer Geraden ähnlich, jedoch so, dass das Aehnlichkeitsverhältniss von einem Paar homologer Geraden zum andern variabel ist. Die unendlich fernen Geraden sind homolog und jedem Paar Parallellinien des einen Systems entspricht ein Paar Parallellinien im andern; einem Parallelogramm ist also ein Parallelogramm homolog. Zwei homologe Stralenbüschel sind im Allgemeinen nicht congruent. Zwei ebene Systeme, welche Parallelprojectionen von einander sind, sind affine Systeme.

Es seien zwei affine ebene Systeme Σ_1, Σ_2 in irgend einer Ebene vereinigt und die Verbindungslinien der homologen Punkte A_1, A_2; B_1, B_2; ... (die Projectionsstralen) gezogen. Sind insbesondere $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und $A_2, B_2, C_2 \ldots$ homologe Punktreihen und man theilt die Strecken A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, in demselben Verhältniss durch die Punkte $A_3, B_3, C_3, \ldots$, so liegen dieselben in einer Geraden und bilden eine den Reihen $A_1B_1C_1, \ldots$ und $A_2B_2C_2 \ldots$ ähnliche Reihe. Theilt man daher alle Projectionsstrecken der beiden Systeme in demselben Verhältniss, so bilden die Theilpunkte ein drittes, den Systemen Σ_1, Σ_2 affines System Σ_3. Indem man das Theilungsverhältniss variiren lässt, erzeugen $A_3, B_3, C_3, \ldots$ auf den Projectionsstralen ähnliche Reihen. Man erkennt hieraus die Möglichkeit, dass ein sich affin bleibendes System sich so bewegt, dass alle Punkte Geraden beschreiben und auf diesen ähnliche Punktreihen erzeugen. Durch drei Paar homologe Punkte sind Σ_1, Σ_2 bestimmt. Daher beschreiben alle Punkte des beweglichen Systems Gerade, wenn dies mit drei Punkten der Fall ist.

Sind Σ_1, Σ_2 gleichartiger Lage, so haben sie einen Doppelpunkt und die unendlich ferne Gerade zur Doppellinie ohne Doppelpunkte. Sind daher Σ_1, Σ_2 zwei unendlich nahe Lagen des beweglichen Systems Σ, so besitzen dieselben einen einzigen Doppelpunkt, welcher Mittelpunkt der Geschwindigkeit ist und wenn man in den Punkten von Σ die Geschwindigkeiten als Längen nach Grösse, Richtung und Sinn anträgt, so bilden sie ein dem System Σ affines System, welches den Mittelpunkt der Geschwindigkeiten mit ihm gemein hat.

Aehnliche Betrachtungen, wie in §. 4 zeigen, dass es für das affin veränderliche ebene System für alle Ordnungen der Beschleunigung einen Mittelpunkt derselben gibt und dass die Endpunkte der Beschleunigungen aller Ordnungen ein dem beweglichen System affines System bilden.

Während beim ähnlich-veränderlichen System der Ort aller Punkte, deren Beschleunigung irgend einer Ordnung dieselbe Grösse a hat ein Kreis ist, **ist dieser Ort der Punkte gleicher Beschleunigung a beim affin veränderlichen System eine Ellipse mit dem Mittelpunkt der Beschleu-**

nigungen, als **Mittelpunkt der Ellipse**. Ist nämlich O der Doppelpunkt zweier in einer Ebene vereinigter affiner Systeme Σ_1, Σ_2 und sind A_1, A_2 ein Paar homologer Punkte, so beschreibe man um O mit dem Radius a einen Kreis, ziehe den Radius $O\alpha$ parallel A_1A_2, ferner $\alpha A'_1$ parallel OA_2 bis zum Schnittpunkt A'_1 mit dem Strale OA_1 und hierauf $A'_1A'_2$ parallel A_1A_2 bis zum Schnittpunkte A'_2 mit OA_2. Dann sind A'_1 und A'_2 homologe Punkte von Σ_1, Σ_2 wegen $OA'_1 : OA_1 = OA'_2 : OA_2$) und zwar sind sie homologe Punkte vom Abstande a. Indem man mit Hülfe dieser Construction alle homologen Punktpaare von Σ_1, Σ_2 sucht, deren Abstand dieselbe Grösse a hat, erhält man zwei homologe Curven von Σ_1, Σ_2, deren homologe Punkte gleichen Abstand a haben. Ist Σ_1 das bewegliche System Σ in der Lage zur Zeit t, Σ_2 das System der Endpunkte der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen irgend welcher Ordnung, so stellt die Curve in Σ_1 den Ort aller Punkte dar, deren Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen gleiche Grösse a besitzen. Man kann zeigen, dass diese Curve dem um P mit dem Radius a beschriebenen Kreise affin, mithin eine Ellipse ist. Der Satz gilt für die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen aller Ordnungen.

§. 7. Bei zwei **allgemein collinearen**, in einer Ebene vereinigten Systemen Σ_1, Σ_2 gibt es im Allgemeinen drei Doppelpunkte und drei Doppellininn, welche dieselben paarweise verbinden. Sind die Systeme zwei unendlich nahe Lagen eines collinear veränderlichen Systems Σ, so sind die Projectionsstralen, welche die homologen Punkte A_1, A_2; B_1, B_2; ... mit einander verbinden, die Richtungen der Geschwindigkeiten der Systempunkte A, B, C und $A_1A_2 : dt$, $B_1B_2 : dt$, ... stellen die Grössen dieser Geschwindigkeiten selbst dar. Die drei Doppelpunkte haben die Geschwindigkeit Null, die Geschwindigkeiten der Punkte der drei Doppellinien fallen in diese Geraden hinein. Die Richtungen der Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte einer Geraden umhüllen einen Kegelschnitt. Während der Bewegung des Systems wechseln die drei Mittelpunkte der Geschwindigkeiten continuirlich und erzeugen in der Ebene der Bewegung eine Curve, mit welcher eine gewisse veränderliche Curve des Systems Punkt für Punkt während der Bewegung zu- sammentrifft.

Die Bewegung des Systems ist durch die Bewegung von vier Punkten im Allgemeinen bestimmt. Sie kann z. B. so erfolgen, dass die vier Punkte vier Gerade beschreiben.

Man kann die Eigenschaften der Bewegung collinear-veränderlicher Systeme durch Projection zum Theil aus der Bewegung unveränderlicher Systeme entwickeln.

§. 8. **Collineare räumliche Systeme** sind dadurch definirt, dass allen Punkten des einen, welche in gerader Linie liegen, Punkte des andern homolog sind, welche gleichfalls in einer Geraden liegen. Hieraus folgt, dass einer Ebene eine Ebene, allen Ebenen die durch einen Punkt oder eine Gerade gehen, wieder Ebenen homolog sind, welche durch den homologen Punkt oder die homologe Gerade gehen. Zu jedem System können unendlich viele andere, ihm collineare Systeme construirt werden und indem man sich eine Schaar solcher continuirlich auf einanderfolgender Systeme denkt, sieht man ein, dass ein veränderliches System sich so bewegen kann, dass es nach und nach mit allen Systemen der Schaar zusammenfällt, sich selbst also während der Bewegung collinear bleibt. Durch die gemachten Annahmen ist weder die Art der Veränderlichkeit des beweglichen Systems noch die Art der Aufeinanderfolge der Lagen desselben vollkommen bestimmt. Es gibt daher unendlich viele Bewegungen eines collinear-veränderlichen Systems.

Man kann zeigen, dass zwei collineare Systeme durch fünf Paar homologer Punkte bestimmt sind, sodass, wenn diese gegeben sind, man im Stande ist, zu jedem beliebigen sechsten Punkt des einen den ihm homologen Punkt des andern zu finden. Hieraus folgt, dass, wenn zwei solche Systeme eine beliebige Lage in demselben Raume haben, sie höchstens vier Doppelpunkte besitzen können, ohne vollständig zusammenzufallen. Die vier Doppelpunkte bestimmen vier Doppelebenen, deren jede drei, sowie sechs Doppellinien, deren jede zwei der vier Doppelpunkte verbindet. In jeder Doppelebene liegen also im Allgemeinen drei Doppelpunkte und drei Doppellinien, in deren jeder zwei Doppelpunkte sich finden. Wenn daher ein veränderliches System sich so bewegt, dass es sich selbst collinear bleibt, so ist die Bewegung im Allgemeinen durch folgende Eigenschaften ausgezeichnet. In jedem Momente ruhen vier bestimmte Punkte des Systems, während alle übrigen sich bewegen. Diese vier Punkte wechseln mit jeder Lage des Systems und erzeugen 4 Curven im ruhenden Raume, welche die geometrischen Orte dieser Ruhepunkte sind, sodass in jedem Momente die Bewegung von 4 Punkten, die in diese Curven eintreten, erlischt. In jedem Momente ruhen sechs Gerade des Systems, so dass deren Punkte blos in diesen Geraden sich bewegen; jede Gerade enthält zwei der eben genannten Ruhepunkte. In jedem Momente ruhen 4 Ebenen des Systems, so dass deren Punkte und Geraden sich blos in ihnen bewegen; jede solche Ebene enthält drei Ruhepunkte und drei Ruhelinien. Die angegebene Zahl der Ruhepunkte, Ruhelinien und Ruheebenen ist blos das Maximum, sie kann geringer sein; dann werden, wie man sagt, einige von ihnen ideell oder imaginär.

Entsprechen sich die unendlich fernen Ebenen beider Systeme, so werden die Systeme affin. Alle homologen Geraden enthalten ähnliche homologe Punktreihen. Drei von den 4 Doppelpunkten liegen im Unendlichen und nach ihnen gehen drei Doppellinien hin, welche sich in dem einzigen im Endlichen liegenden Doppelpunkte schneiden. Sie sind paarweise durch 3 Doppelebenen verbunden. Das Aehnlichkeitsverhältniss wechselt von Geradenpaar zu Geradenpaar.

Reduciren sich die drei unendlichfernen Doppelpunkte auf einen, also auch die durch sie hindurchgehenden Doppellinien auf eine, so werden die Systeme ähnlich und haben also nur einen Doppelpunkt und eine durch ihn hindurchgehende Doppellinie im Endlichen. Fällt auch der letzte Doppelpunkt ins Unendliche, so werden die Systeme congruent. Soll das bewegliche System während der Bewegung sich congruent bleiben, so geht es in ein unveränderliches über. Die einzige Ruhelinie im Endlichen enthält zwei homologe Punktreihen, welche durch Translation des Systems zur Coincidenz gelangen können, während die Coincidenz aller übrigen homologen Punkte durch Rotation des Systems um die Ruhelinie erfolgt. Sie ist die Axe der Schraubenbewegung des unveränderlichen Systems.

§. 9. Die Projectionsstralen zweier collinearer Systeme bilden einen Complex zweiter Ordnung; die Complexstralen sind zugleich die Schnittlinien der homologen Ebenenpaare. Sind die Systeme aufeinanderfolgende, unendlich wenig von einander abweichende Lagen desselben beweglichen Systems, so sind diese Stralen die Richtungen der Geschwindigkeiten der Systempunkte.

Die Geschwindigkeitsrichtungen der Punkte einer Geraden des beweglichen Systems erfüllen ein einfaches Hyperboloid, welches für die affinen, ähnlichen und congruenten Systeme in ein hyperbolisches Paraboloid übergeht, weil die allgemein projektivischen Punktreihen auf den beiden aufeinanderfolgenden Lagen der Geraden ähnlich, resp. congruent werden (vgl. S. 286).

Durch Betrachtungen, wie S. 292 u. ffg. ergibt sich, dass der Ort aller Systempunkte, deren Geschwindigkeitsrichtungen durch denselben Punkt hindurchgehen, ein cubischer Kegelschnitt ist und dass die Geschwindigkeitsrichtungen selbst eine Kegelfläche 2. Ordnung erfüllen.

Die Schmiegungsebenen der Bahnen, welche die Punkte einer Geraden beschreiben, sind die Schmiegungsebenen eines cubischen Kegelschnittes, denn drei auf einanderfolgende Lagen der Geraden enthalten projectivische Reihen und die Verbindungsebenen der homologen Punkttripel sind die Schmiegungsebenen eines solchen.

Für affine, ähnliche und congruente Systeme hat Burmester in Bezug auf die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in der 4. der oben citirten Abhandlungen eine Reihe von Sätzen bewiesen, welche Analoga sind zu Sätzen, welche zum Theil in frühern Capiteln dieses Buches für das unveränderliche System aufgefunden wurden. Er bedient sich dabei des Satzes, dass die Endpunkte der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller Ordnungen, wenn diese auf ihren Richtungen von den Systempunkten aus aufgetragen werden, ein dem beweglichen Systeme affines, ähnliches oder congruentes System bilden. Unter den Burmester'schen Sätzen finden sich u. a. folgende besonders wichtige:

1. Der geometrische Ort der Punkte eines affin-veränderlichen Systems, deren Geschwindigkeit dieselbe Grösse hat, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt in den Mittelpunkt der Geschwindigkeiten fällt. Derselbe Satz gilt auch für die Beschleunigungen aller Ordnungen, so dass der Mittelpunkt des Ellipsoids immer der Mittelpunkt der Beschleunigungen der betreffenden Ordnung ist.

2. Für die Geschwindigkeiten des ähnlich veränderlichen Systems ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, für das unveränderliche System ein Rotationscylinder.

3. Der Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder unveränderlichen Systems, welche keine Normalbeschleunigung besitzen und momentan Wendepunkte ihrer Bahnen passiren, ist eine Curve 6. Ordnung doppelter Krümmung, welche den Mittelpunkt der Beschleunigungen enthält.

4. Der Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder unveränderlichen Systems, welche keine Tangentialbeschleunigung besitzen, ist eine Fläche zweiter Ordnung, welche den Mittelpunkt der Beschleuniugng enthält.

5. Der Ort der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich veränderlichen oder unveränderlichen Systems, deren Beschleunigungsrichtungen durch denselben Punkt gehen, ist ein cubischer Kegelschnitt und die Richtungen der Beschleunigungen erfüllen eine Kegelfläche 2. Grades.

Aus dem letzten Satze folgern wir:

Die Beschleunigungsrichtungen der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder unveränderlichen beweglichen Systems bilden einen Liniencomplex 2. Grades.

An Literatur über die im Vorstehenden besprochenen Bewegungen fügen wir noch zu:

Mollame, Sulla trasformazione continua d'una figura piana, la quale resta sempre omografica a se stessa, e di cui quattro punti qualunque (tre dei quali non sieno per dritto) descrivono quattro linee omografiche date (Battaglini, Giornale di Matematica, Vol. IX (1871), p. 269).

Durrande, Essai sur le déplacement d'une figure de forme variable (Annales scientif. de l'école normale supérieure, 2^me^ Série, T. II (1873), p. 81); Etude de l'accéleration dans le déplacement d'un système de forme variable (Ibid. T. III (1874), p. 151). Diese Schriften entalten die analytische Theorie der Bewegungszustände collineär veränderlicher Systeme.

Ende des ersten Bandes.

Verbesserungen.

S. 1, §. 2, Z. 2 lies: von Punkten, Linien, Flächen oder Körpern.

S. 4, Z. 17 v. o. lies: Den Unterschied beider Bewegungen etc.

S. 24, Z. 14 v. u. lies: (AB, LN) statt (AB, LM) und Z. 12 v. u. LN statt CD

S. 33, Z. 20 v. u. lies: für jeden Punkt der Ebene ausserhalb oder innerhalb des Streifens Momente entgegengesetzten oder gleichen Zeichens.

S. 61, Z. 12 v. o. lies ϱ statt r.

S. 70, Z. 17 lies $\frac{G_0}{R}$.

S. 137, Z. 11 v. u. lies $\frac{1}{36} m[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2]$.

S. 145, Z. 8 v. u. lies B_2 statt A_2.

S. 151, Z. 17 lies: unveränderliches System.

S. 155, Z. 11 v. u. tilge das Zeichen: §. 11.

S. 208, Z. 1 u. 2 lies $d\vartheta$.